УДК 629-78 URL: https://ptsj.bmstu.ru/catalog/arse/adbmc/1033.html

СИНТЕЗ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ ПЛОСКИМ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ МАЛОРАЗМЕРНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

В.Е. Колесникова kolesnikovanika72@gmail.com

Самарский университет, Самара, Российская Федерация

Рассмотрено решение задачи переориентации малоразмерного космического аппарата в плоском случае движения. Для решения терминальной задачи управления аналитически получен закон управления с использованием прямого метода Ляпунова. Исследована работоспособность алгоритма для таких возмущающих факторов, как наличие возмущающего момента, неточность задания начальных условий движения, неучет аэродинамического восстанавливающего и гравитационного моментов в законе управления, наличие шумов в измерениях. Реализовано управление с учетом ограничения на максимальный управляющий момент. Исследована работоспособность алгоритма при различных значениях коэффициентов. Результаты работы могут быть применены для управления плоским угловым движением малоразмерного космического аппарата. Значимость работы заключается в полученном законе управления, гарантирующем асимптотическую устойчивость требуемого движения и обеспечивающем требуемую точность ориентации и стабилизации малоразмерного космического аппарата.

Ключевые слова: малоразмерный космический аппарат, плоское угловое движение, терминальное управление, закон управления, прямой метод Ляпунова, кандидат-функция Ляпунова

Введение. Для выполнения целевой миссии большинства космических аппаратов (КА), в том числе и малоразмерных космических аппаратов (МКА), которые используются все более активно, необходимо обеспечить их требуемое угловое положение. Ключевой особенностью МКА является необходимость учета внешних моментов при синтезе законов управления угловым движением, поскольку числовое значение управляющего момента сопоставимо со значениями внешних моментов [1]. Для околоземных орбит при синтезе законов управления угловым движением МКА необходимо учитывать не только гравитационный, но и аэродинамический момент [2].

Поскольку угловое движение КА описывается нелинейной математической моделью, для синтеза законов управления угловым движением КА можно использовать следующие подходы [3]: синтез на основе метода обратной задачи динамики; синтез систем с переменной структурой (с использованием скользящего режима); синтез систем, основанный на методе функций Ляпу-

 ISSN 2541-8009

нова; синтез систем методом линеаризации обратной связью; синтез стабилизирующих законов управления методом декомпозиции.

Среди перечисленных подходов большой практический интерес имеет так называемое ляпуновское управление, базирующееся на прямом методе Ляпунова. Этот подход гарантирует асимптотическую устойчивость требуемого движения. В связи с этим был разработан, реализован и исследован алгоритм управления плоским угловым движением МКА с использованием прямого метода Ляпунова.

Математическая постановка задачи. Зададим приближенную модель плоского углового движения МКА в плоскости круговой орбиты относительно траекторной системы координат, которая описывает изменение угла атаки под воздействием гравитационного и аэродинамического восстанавливающего моментов [4]:

$$\ddot{\alpha} - a(H)\sin\alpha - c(H)\sin 2\alpha = 0, \tag{1}$$

где α — угол атаки, град.; H — высота орбиты, на которой находится МКА, км; $a(H) = \dfrac{a_0 Slq(H)}{J_п}$ — коэффициент, обусловленный аэродинамическим восстанавливающим моментом; a_0 — коэффициент аппроксимации синусоидальной зависимостью по углу атаки коэффициента восстанавливающего аэродинамического момента, вычисленного относительно центра масс; S — характерная площадь МКА, м^2; l — характерная длина МКА, м; $q(H) = \dfrac{\rho(H)[V(H)]^2}{2}$ — скоростной напор, м; $\rho(H)$ — плотность атмосферы на высоте H, кг/м^3; $V(H) = \sqrt{\dfrac{k}{R_з + H}}$ — скорость движения по орбите, м/с; k — гравитационный параметр Земли, км^3/с^2; $R_з$ — радиус Земли, км; $J_п = J_y = J_z$ — поперечный момент инерции, кг · м^2; $c(H) = \dfrac{3(J_п - J_x)[\omega(H)]^2}{2J_п}$ — коэффициент, обусловленный действием гравитационного момента; J_x — продольный момент инерции, кг · м^2; $\omega(H) = \sqrt{\dfrac{k}{(R_з + H)^3}}$ — угловая скорость движения центра масс МКА по орбите, град./с.

Перепишем уравнение (1), добавив управляющий момент:

$$\ddot{\alpha} = a(H)\sin\alpha + c(H)\sin 2\alpha + \frac{u}{J_п}, \tag{2}$$

где u — управляющий момент, Н · м.

ISSN 2541-8009

Так как $J_п$ заключен в $a(H)$ и $c(H)$, то можно перенести поперечный момент инерции в (2) в левую часть уравнения:

$$J_п \ddot{\alpha} = M_а + M_г + u, \tag{3}$$

где $M_а = a_0 Slq(H) \sin\alpha$ — аэродинамический восстанавливающий момент; $M_г = \dfrac{3(J_п - J_x)[\omega(H)]^2}{2} \sin 2\alpha$ — гравитационный момент.

С помощью управляющего момента необходимо переориентировать МКА из некоторого начального состояния

$$\alpha(t_0) = \alpha_0, \quad \dot{\alpha}(t_0) = \dot{\alpha}_0$$

в требуемое конечное

$$\alpha(t_к) = \alpha_к, \quad \dot{\alpha}(t_к) = \dot{\alpha}_к$$

за фиксированный интервал времени $t_к$.

Вывод закона управления. Прямой метод Ляпунова требует задания функции Ляпунова, отвечающей требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [5]. Кандидат-функцию Ляпунова зададим таким образом, чтобы она была положительно определенной. Для этого представим ее в виде суммы кинетической и потенциальной энергий соответственно:

$$V = \frac{1}{2} J_п \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} K_1 \alpha^2. \tag{4}$$

Коэффициент K_1 необходимо принять большим нуля $(K_1 > 0)$ для того, чтобы функция V была положительно определенной.

Найдем производную кандидат-функции Ляпунова (4):

$$\dot{V} = J_п \dot{\alpha}\ddot{\alpha} + K_1 \alpha\dot{\alpha}. \tag{5}$$

Согласно второй теореме Ляпунова, необходимо, чтобы производная $\dot{V}$ была противоположного знака с V, следовательно, в данном случае отрицательно определенной. Как видно из формулы (5), нельзя утверждать, что производная $\dot{V}$ отрицательно определена. Для того чтобы задать определенность, подставим $\ddot{\alpha}$ из (3) в (5):

$$\dot{V} = \dot{\alpha}(M_а + M_г + u) + K_1 \alpha\dot{\alpha}. \tag{6}$$

Примем закон управления таким образом, чтобы он компенсировал гравитационный и аэродинамический восстанавливающий моменты, при этом обеспечивая решение терминальной задачи управления:

$$u = -M_а - M_г - K_\alpha \alpha - K_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}. \tag{7}$$

Подставив u из (7) в (6), получим:

$$\dot{V} = -\alpha\dot{\alpha}(K_\alpha - K_1) - K_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}^2.$$

Для того чтобы производная кандидат-функции Ляпунова $\dot{V}$ была отрицательно определенной, необходимо принять $K_\alpha = K_1$ и $K_{\dot{\alpha}} > 0.$ Таким образом, получим

$$\dot{V} = -K_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}^2.$$

что удовлетворяет второй теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Моделирование управляемого движения. Для проведения численного моделирования в среде MATLAB необходимо задать исходные данные. Ниже представлены параметры орбиты, на которой находится МКА, при этом плотность атмосферы взята из [6] с учетом высоты орбиты: H = 550 км, ρ = = $2{,}4 \cdot 10^{-13}$ кг/м^3; k = 398 600 км^3/с^2; $R_з$ = 6371 км.

Малоразмерный космический аппарат имеет следующие характеристики [7]: $a_0 = -1{,}5$; $S = 0{,}01$ м^2; $l = 0{,}3$ м; $J_п = 0{,}012$ кг · м^2; $J_x = 0{,}0033$ кг · м^2.

Переориентация МКА осуществляется из начального случайного положения в требуемое конечное со следующими граничными условиями: α_0 = = 100°; α_x = 0°; $\dot{\alpha}_0$,= 3 град./с; $\dot{\alpha}_к$,= 0 град./с; t_0 = 0 с; $t_к$ = 500 с.

Коэффициенты $K_1, K_\alpha, K_{\dot{\alpha}}$ выбраны следующим образом:

$$K_\alpha = K_1 = 0{,}001, K_{\dot{\alpha}} = 0{,}0005.$$

В результате моделирования закона управления в среде MATLAB получены графики, изображенные на рис. 1 и 2. На рис. 1 показана зависимость угловой скорости от угла атаки, называемый фазовым портретом. На рис. 2 видно, как меняется управляющий момент в течение времени переориентации.

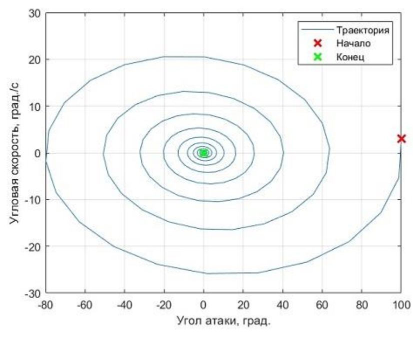

Рис. 1. Фазовый портрет

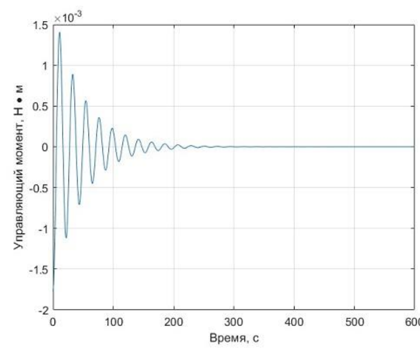

Рис. 2. Зависимость управляющего момента от времени

В результате моделирования получено, что фактическое конечное значение угла атаки составляет $-3{,}7 \cdot 10^{-4}$ град., угловой скорости — $-1{,}4 \cdot 10^{-5}$ град./с (при требуемых нулевых значениях). Анализ этих данных показывает, что МКА переориентировался из начального положения в требуемое конечное.

На рис. 3, 4 видно, что на протяжении всего времени переориентации кандидат-функция Ляпунова принимает только положительные значения, а ее производная — только отрицательные, что доказывает выполнение второй теоремы Ляпунова.

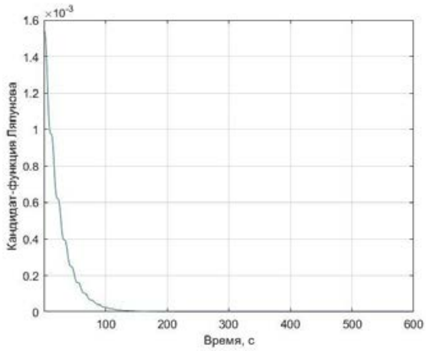

Рис. 3. Зависимость кандидат-функции Ляпунова от времени

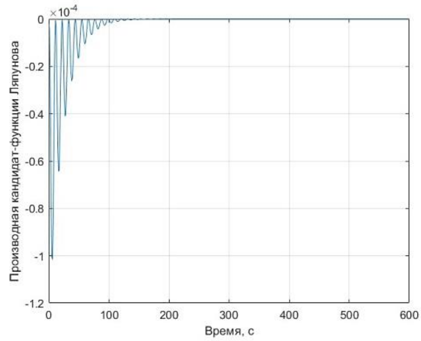

Рис. 4. Зависимость производной кандидат-функции Ляпунова от времени

На рис. 5, 6 видно, как изменяются значения угла атаки и угловой скорости в зависимости от времени. Можно заметить, что конечные значения данных величин равны нулю.

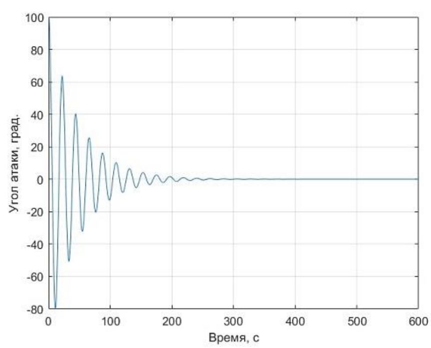

Рис. 5. Зависимость угла атаки от времени

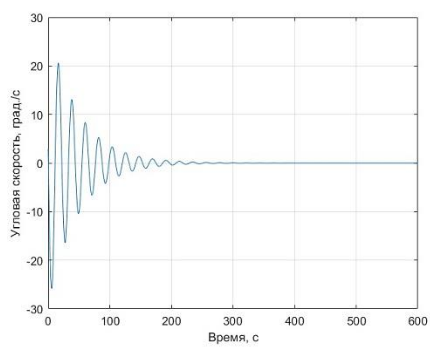

Рис. 6. Зависимость угловой скорости от времени

 ISSN 2541-8009

Исследование работоспособности алгоритма для различных возмущающих факторов. Результаты исследования, где первые три и последний фактора были заданы через нормальный закон распределения с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением 3…5 %, представлены в табл. 1.

Таблица 1. **Результаты исследования работоспособности алгоритма для различных возмущающих факторов**

Фактор	Ошибка по углу атаки, град.	Ошибка по угловой скорости, град./с
Возмущающий момент	$-4{,}0 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}6 \cdot 10^{-5}$
Неточность знания начальных условий движения	$-3{,}7 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}5 \cdot 10^{-5}$
Совместное действие первых двух факторов	$-4{,}0 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}9 \cdot 10^{-5}$
Неучет аэродинамического момента в законе управления	$-3{,}7 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}4 \cdot 10^{-5}$
Неучет гравитационного момента в законе управления	$-3{,}7 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}4 \cdot 10^{-5}$
Наличие шумов в измерениях	$-3{,}7 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}4 \cdot 10^{-5}$

Таким образом, из табл. 1 можно сделать следующий вывод: терминальная задача управления решена верно, поскольку конечные значения величин близятся к нулю. Но необходимо учесть, что первые три фактора оказывают влияние на работоспособность алгоритма, так как получившиеся конечные значения угла атаки и угловой скорости наиболее удалены от значений, полученных при моделировании закона управления без учета возмущающих факторов; аэродинамический, гравитационный моменты и наличие шумов в измерениях не влияют на закон управления в условиях данной задачи, поскольку конечные угол атаки и угловая скорость принимают те же значения, которые были получены при моделировании закона управления без учета возмущающих факторов.

Моделирование алгоритма управления с учетом ограничения на максимальный управляющий момент. Реализация методов синтеза систем управления осуществляется на исполнительных устройствах, в роли которых могут выступать двигатели-маховики, гиродины, двигательные установки. Однако все они имеют ограничение на максимальное значение управляющего момента, поскольку оно определяется угловым ускорением, необходимым при маневрировании, и максимальным возмущающим моментом [8]. В связи с этим необходимо разрешить задачу ограничения максимального управляющего момента для синтеза закона управления с использованием прямого метода Ляпунова.

При моделировании закона управления, где на МКА действовали только гравитационный и аэродинамический восстанавливающий моменты, максимальное значение управляющего момента по модулю получилось равным $|u_{\max}| = 0{,}0018$ Н·м. Допустим, что максимальное значение управляющего момента, которое может реализовать исполнительное устройство, составляет 70 % данного значения. В таком случае ограничение на максимальный управляющий момент будет записано в следующем виде:

$$u = \begin{cases} u, & |u| \le |u_{\max}|; \\ u_{\max}, & |u| > |u_{\max}|. \end{cases}$$

Таким образом, максимальный управляющий момент принимает значение $|u_{\max}| = 0{,}0012$ Н·м. На рис. 7 представлена зависимость управляющего момента от времени с учетом ограничения на максимальный управляющий момент.

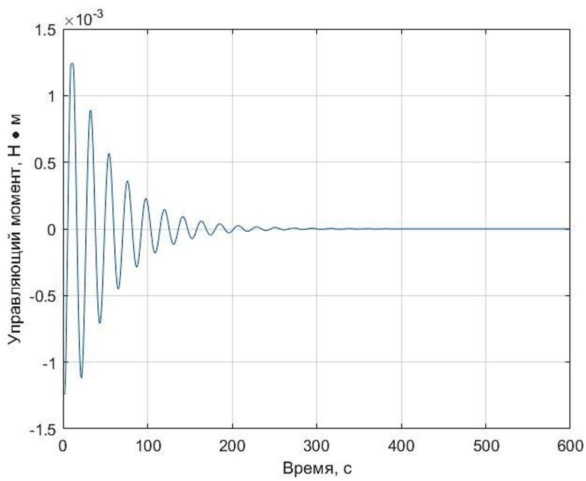

Рис. 7. Зависимость управляющего момента от времени с учетом ограничения на максимальный управляющий момент

Исследование работоспособности алгоритма при различных значениях коэффициентов. Исследуем работоспособность алгоритма при различных значениях коэффициентов K_1, K_α, $K_{\dot\alpha}$, чтобы проверить, как будут видоизменяться графики и значения величин.

ISSN 2541-8009

Рассмотрим случаи, когда меняются коэффициенты K_1 и K_α, а $K_{\dot{\alpha}}$ остается неизменным. Пусть $K_{\dot{\alpha}} = 0{,}0005$, а остальные коэффициенты примут значения $K_1 = K_\alpha = 10;\ 5;\ 1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001.$ Результаты моделирования представлены в табл. 2 (напомним, что требуемые конечные значения равны нулю).

Таблица 2. **Результаты моделирования**

Граничные условия	Значение коэффициентов $K_1 = K_\alpha$					
	10	**5**	**1**	**0,01**	**0,001**	**0,0001**
Конечный угол атаки, град.	$-2{,}1 \cdot 10^{-4}$	$5{,}1 \cdot 10^{-6}$	$-4{,}1 \cdot 10^{-5}$	$2{,}2 \cdot 10^{-4}$	$-3{,}7 \cdot 10^{-4}$	$-3{,}5 \cdot 10^{-4}$
Конечная угловая скорость, град./с	$-8{,}4 \cdot 10^{-3}$	$-7{,}4 \cdot 10^{-3}$	$3{,}3 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}7 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}4 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}4 \cdot 10^{-5}$

На рис. 8 и 9 представлены зависимости угла атаки от времени для всех различных значений коэффициентов $K_1 = K_\alpha = 10;\ 5;\ 1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001.$

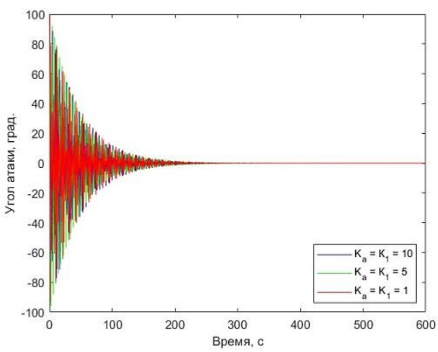

Рис. 8. Зависимость угла атаки от времени при $K_1 = K_\alpha = 10; 5; 1$

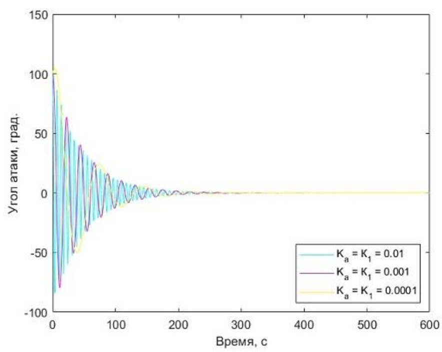

Рис. 9. Зависимость угла атаки от времени при $K_1 = K_\alpha = 0{,}01; 0{,}001; 0{,}0001$

На рис. 10 и 11 представлены зависимости угловой скорости от времени для всех различных значений коэффициентов $K_1 = K_\alpha = 10;\ 5;\ 1;\ 0{,}01;$ $0{,}001;\ 0{,}0001.$

Рассмотрим случаи, когда меняется коэффициент $K_{\dot{\alpha}}$, а K_1 и K_α остаются неизменными. Пусть $K_1 = K_\alpha = 0{,}001$, а коэффициент $K_{\dot{\alpha}}$ примет значения $K_{\dot{\alpha}} = 0{,}001;\ 0{,}0005;\ 0{,}0001.$ Результаты моделирования представлены в табл. 3 (напомним, что требуемые конечные значения равны нулю).

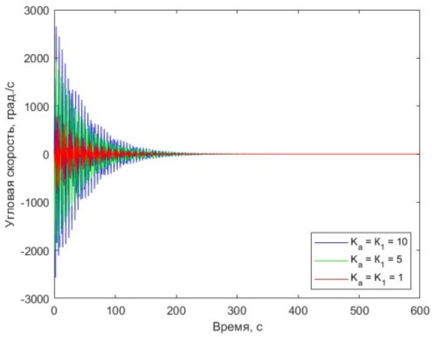

Рис. 10. Зависимость угловой скорости от времени при $K_1 = K_\alpha = 10;\ 5;\ 1$

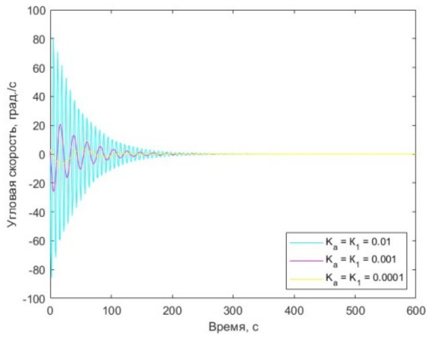

Рис. 11. Зависимость угловой скорости от времени при $K_1 = K_\alpha = 0{,}01; 0{,}001; 0{,}0001$

Таблица 3. **Результаты моделирования**

Граничные условия	Значение коэффициента $K_{\dot{\alpha}}$		
	0,001	0,0005	0,0001
Конечный угол атаки, град.	$1{,}1 \cdot 10^{-6}$	$-3{,}7 \cdot 10^{-4}$	$-7{,}9$
Конечная угловая скорость, град./с	$2{,}8 \cdot 10^{-7}$	$-1{,}4 \cdot 10^{-5}$	0,7

По табл. 3 видно, что конечные значения углов атаки и угловых скоростей при значениях коэффициентов $K_{\dot{\alpha}} = 0{,}001; 0{,}0005$ стремятся к нулю, следовательно, в этих случаях терминальная задача решается верно. При этом можно заметить, что при $K_{\dot{\alpha}} = 0{,}001$ конечные значения угловой скорости и угла атаки значительно ближе к нулю по сравнению с $K_{\dot{\alpha}} = 0{,}0005.$ При $K_{\dot{\alpha}} = 0{,}0001$ МКА не успевает переориентироваться из начального положения в требуемое за время $T = 600$ с.

На рис. 12 и 13 представлены зависимости угла атаки и угловой скорости от времени для всех различных значений коэффициента $K_{\dot{\alpha}} = 0{,}001;\ 0{,}0005;\ 0{,}0001.$

Заключение. В результате исследования реализован и исследован на работоспособность для наличия возмущающих факторов алгоритм управления плоским угловым движением МКА с использованием прямого метода Ляпунова. Смоделирован алгоритм, накладывающий ограничение на максимальное значение управляющего момента.

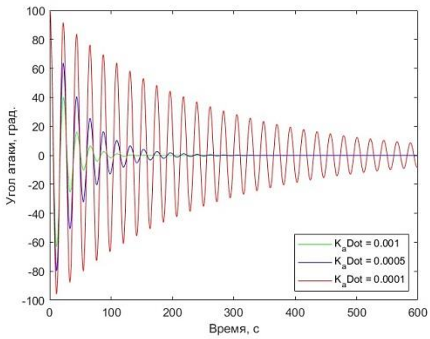

Рис. 12. Зависимость угла атаки от времени при $K_{\dot{\alpha}} = 0,001;\ 0,0005;\ 0,0001$

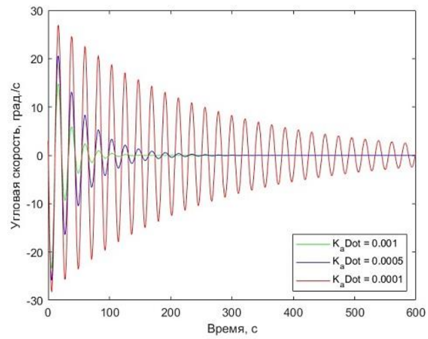

Рис. 13. Зависимость угловой скорости от времени при $K_{\dot{\alpha}} = 0,001;\ 0,0005;\ 0,0001$

В ходе исследования работоспособности алгоритма при различных значениях коэффициентов K_1, K_α, $K_{\dot{\alpha}}$ можно сделать следующие выводы:

– необходимо выбирать как можно меньшие значения коэффициентов K_1 и K_α потому что в таком случае увеличивается период колебаний угла атаки, следовательно, переориентация МКА осуществляется более плавно, также увеличивается период колебаний угловой скорости, но уменьшается ее амплитуда, следовательно, МКА будет легче стабилизировать;

– значение коэффициента $K_{\dot{\alpha}}$ необходимо подбирать исходя из начальных условий движения, а также времени переориентации, поскольку решение терминальной задачи управления при изменении этого коэффициента не всегда возможно.

Таким образом, алгоритм управления плоским угловым движением МКА с использованием прямого метода Ляпунова не является универсальным, но гарантирует асимптотическую устойчивость требуемого движения и обеспечивает требуемую точность ориентации и стабилизации аппарата [9].

Литература

[1] Белоконов И.В., Тимбай И.А., Николаев П.Н. Анализ и синтез движения аэродинамически стабилизированных космических аппаратов нанокласса формата CubeSat. *Гироскопия и навигация*, 2018, т. 26. № 3 (102), с. 69–91. https://doi.org/10.17285/0869-7035.2018.26.3.069-091

[2] Белоконов И.В., Тимбай И.А., Баринова Е.В. Выбор проектных параметров наноспутника формата CubeSat с пассивной системой стабилизации. *Гироскопия и навигация*, 2020, т. 28, № 1, с. 81–100. https://doi.org/10.17285/0869-7035.0025

[3] Филиповский В.М. *Системы управления в пространстве состояний*. Санкт-Петербург, СПбПУ, 2022, с. 51–73.

[4] Белоконов И.В., Тимбай И.А. *Движение наноспутника относительно центра масс на околоземных орбитах*. Самара, Изд-во Самарского университета, 2020, с. 32–34.

[5] Баринова Е.В. *Основы теории устойчивости движения применительно к задачам космической техники*. Самара, Изд-во Самарского университета, 2023, 31 с.

[6] ГОСТ 4401–81. *Атмосфера стандартная. Параметры*. Москва, Изд-во стандартов, 2004, 151 с.

[7] Белоконов И.В., Тимбай И.А. *Движение наноспутника относительно центра масс на околоземных орбитах*. Самара, Изд-во Самарского университета, 2020, 40 с.

[8] Беляев Н.М., Уваров Е.И. *Расчет и проектирование реактивных систем управления космических летательных аппаратов*. Москва, Машиностроение, 1974, 5 с.

[9] Маштаков Я.В. *Использование прямого метода Ляпунова в задачах управления ориентацией космических аппаратов*. Дис. … канд. физ.-мат. наук. Москва, 2019, 13 с. URL: http://library.keldysh.ru/diss.asp?id=2019-mashtakov (дата обращения 15.10.2024).

Поступила в редакцию 12.11.2024

Колесникова Виктория Евгеньевна — студентка межвузовской кафедры космических исследований, Самарский университет, Самара, Российская Федерация.

Научный руководитель — Крамлих Андрей Васильевич, кандидат технических наук, доцент межвузовской кафедры космических исследований, Самарский университет, Самара, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Колесникова В.Е. Синтез закона управления плоским угловым движением малоразмерного космического аппарата с использованием прямого метода Ляпунова. *Политехнический молодежный журнал*, 2025, № 02 (97). URL: https://ptsj.bmstu.ru/catalog/arse/adbmc/1033.html

CONTROL LAW SYNTHESIS FOR THE PLANE ANGULAR MOTION OF A SMALL-SIZED SPACECRAFT USING THE DIRECT LYAPUNOV METHOD

V.E. Kolesnikova kolesnikovanika72@gmail.com

Samara University, Samara, Russian Federation

The paper considers solution to the problem of a small-sized spacecraft reorientation in the case of planar motion. To solve the terminal control problem, a control law is obtained analytically using the direct Lyapunov method. The paper analyzes the algorithm performance for such the disturbance factors as the disturbing moment, inaccuracy in specifying the initial motion conditions, failure to take into account aerodynamic restoring and gravitational moments in the control law, and the noise in measurement. Control is implemented taking into account limitation on the maximum control moment. The algorithm performance is studied for various coefficient values. Work results could be applied to control the planar angular motion of a small-sized spacecraft. The work significance lies in the obtained control law, which guarantees asymptotic stability in the required motion and ensures the required accuracy of the small-sized spacecraft orientation and stabilization.

Keywords: small-sized spacecraft, planar angular motion, terminal control, control law, direct Lyapunov method, Lyapunov candidate function

Received 12.11.2024

Kolesnikova V.E. — Student, Inter-university Department of Space Research, Samara University, Samara, Russian Federation.

Scientific advisor — Kramlikh A.V., Ph. D. (Eng.), Associate Professor, Inter-university Department of Space Research, Samara University, Samara, Russian Federation.

Please cite this article in English as:

Kolesnikova V.E. Control law synthesis for the plane angular motion of a small-sized spacecraft using the direct Lyapunov method. *Politekhnicheskiy molodezhnyy zhurnal*, 2025, no. 02 (97). (In Russ.). URL: https://ptsj.bmstu.ru/catalog/arse/adbmc/1033.html

