

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

П.С. Аронов

aronovps@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

### Аннотация

Представлено решение задач теории упругости методом конечных элементов с использованием функционала Рейсснера (смешанной схемы). В процессе поиска стационарной точки этого функционала приходим к седловой задаче — блочной системе линейных алгебраических уравнений, зависящих одновременно от векторов перемещений и напряжений. Одним из наиболее эффективных методов решения подобных систем является модифицированный метод симметричной последовательной верхней релаксации. Разработанный алгоритм использован также при решении аналогичных задач с учетом силы трения

### Ключевые слова

Контактная задача теории упругости, функционал Рейсснера, метод конечных элементов, метод верхней релаксации

Поступила в редакцию 12.04.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Задачи теории упругости представляют собой традиционный раздел механики деформируемого твердого тела, имеющий достаточное количество приложений в научных исследованиях и инженерных расчетах прочности конструкций. Решение подобных задач как аналитическими, так и численными методами сопряжено с проблемой интегрирования системы дифференциальных уравнений в частных производных при заданных условиях на границе. При решении краевых задач теории упругости методом конечных элементов используется, как правило, интегральная, в частности, вариационная формулировка, при этом минимизируемый функционал зависит только от одного вектора неизвестной сеточной функции (например, перемещения).

Рассмотрим смешанную формулировку конечно-элементной технологии решения задач теории упругости, позволяющую перейти к решению системы линейных алгебраических уравнений с вектором неизвестных, включающем в себя компоненты напряжений и перемещений. Также данный подход применим при решении задачи теории упругости с учетом силы трения.

### Математическая постановка задачи.

Рассмотрим математическую формулировку двумерной задачи теории упругости в прямоугольной области  $G \subset \mathbb{R}^2$  (рис. 1):

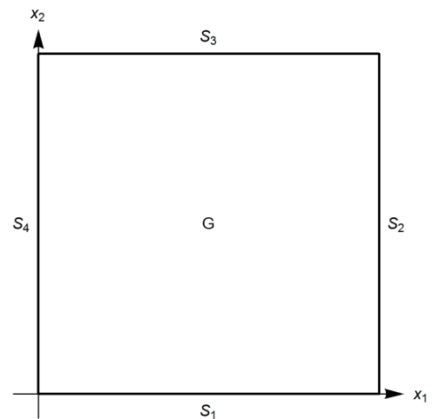


Рис. 1. Прямоугольная область  $G$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad x \in G; \\ \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{S_1} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad x \in S_1, \quad S_1 \subset \partial G; \\ \sigma_{ji}(\mathbf{x})n_j|_{S_2} = g_{S_i}(\mathbf{x}), \quad x \in S_3, \quad S_2 \subset \partial G; \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{x}) + u_{j,i}(\mathbf{x})), \quad i, j = 1, 2, \quad x \in G; \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = E_{ijkl}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{kl}^0(\mathbf{x})), \quad i, j = 1, 2, \quad x \in G. \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{e}_i$  — единичные орты координатных осей;  $x_i$  — координаты вектора;  $x \in G$ ;  $S_1, S_2, S_3, S_4 \subset \partial G$ . Здесь  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{kl}$  — компоненты тензора деформаций;  $\varepsilon_{kl}^0$  — компоненты тензора начальных деформаций;  $u_i$  — перемещения;  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  — вектор перемещения точки, расположенной на поверхности  $S_1$ ;  $E_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих постоянных;  $\rho_i(\mathbf{x})$  — компоненты вектора объемных сил;  $g_{S_i}(\mathbf{x})$  — компоненты вектора поверхностных сил;  $n_j$  — компоненты вектор нормали к соответствующей поверхности  $S_j$ .

Введем векторы напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и перемещений  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_1 \sigma_2 \tau_{12}\}^T; \\ \mathbf{u} &= \{u_1 u_2\}^T. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем матрицу операций дифференцирования (градиентов):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

и матрицу направляющих косинусов внешней нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $S$ :

$$A_S = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) & 0 \\ 0 & \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) \\ \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) & \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Матрицы переходят одна в другую путем взаимной замены операции дифференцирования на соответствующий направляющий косинус. Далее запишем уравнения в матричном виде относительно неизвестных компонентов векторов  $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T \boldsymbol{\sigma}(x) + \rho(x) = 0, \quad x \in G; \\ A \mathbf{u}(x) - D^{-1} \boldsymbol{\sigma}(x) = 0; \\ A_S^T \boldsymbol{\sigma}(x) = \mathbf{g}_S(x), \quad x \in S_1; \\ \mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_S(x), \quad x \in S_3, \end{array} \right. \quad (5)$$

где через  $D^{-1}$  обозначена матрица податливости (обратная к матрице упругости) для изотропного тела.

**Смешанная формулировка конечно-элементной технологии.** Рассмотрим первую форму функционала Рейсснера [1, 2]:

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \int_V \left[ \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A} \mathbf{u} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \right] dV - \int_V \mathbf{u}^T \boldsymbol{\rho} dV - \int_{S_1} \mathbf{u}^T \mathbf{g}_S dS - \int_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma} dS. \quad (6)$$

Построим систему линейных алгебраических уравнений для определения вектора  $\{\boldsymbol{\sigma} \ \mathbf{u}\}^T$ , используя условие стационарности функционала  $\Pi$ . Для этого вычислим производные по векторам  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\mathbf{u}$  с учетом того, что  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_S$  на границе области  $S$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \int_G \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} dV = 0; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} = \int_G \boldsymbol{\sigma}^T dV - \int_G \boldsymbol{\rho} dV - \int_S \mathbf{g}_S dS = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Рассмотрим восьмиузловой конечный элемент. Интерполяционный полином для такого элемента записывается в следующем виде:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2.$$

Функции формы квадратичного четырехугольного элемента, записанные в локальной системе координат [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1); \\ N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta); \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1); \\ N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi); \\ N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1); \\ N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta); \\ N_7 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1); \\ N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi). \end{array} \right. \quad (8)$$

Перемещения  $u_1$  и  $u_2$  внутри элемента задаются зависимостью:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} = [N]^{(e)} \{u\}^{(e)}, \quad (9)$$

где

$$[N]^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & \dots & N_8^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & \dots & 0 & N_8^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\{u\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_1^{(e1)} \\ u_2^{(e1)} \\ u_1^{(e2)} \\ u_2^{(e2)} \\ \vdots \\ u_1^{(e8)} \\ u_2^{(e8)} \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Соотношения между деформациями и перемещениями в двумерном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \\ \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (12)$$

или с учетом (9)

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\}, \quad (13)$$

где

$$[B] = \frac{1}{2S^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8^{(e)}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x_1} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8^{(e)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_8^{(e)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_8^{(e)}}{\partial x_1} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

В соответствии с общепринятой терминологией введем в рассмотрение следующие матрицы и векторы:

$$[A] = -\sum_{e=1}^{k_{el}} [a_V^{(e)}]^T \left( \int_G [D^{-1(e)}] dV \right) [a_V^{(e)}]; \quad (15)$$

$$[B] = \sum_{e=1}^{k_{el}} [a_V^{(e)}]^T \left( \int_G [A^{(e)}] dV \right) [a_V^{(e)}]; \tag{16}$$

$$[R_1] = \sum_{e=1}^{k_{el}} [a_V^{(e)}]^T \left( \int_G [\rho^{(e)}] dV \right) [a_V^{(e)}]; \tag{17}$$

$$[R_2] = \sum_{e=1}^{k_{el}} [a_S^{(e)}]^T \left( \int_S [g_S^{(e)}] dS \right) [a_S^{(e)}], \tag{18}$$

где  $[D^{-1}^{(e)}]$  и  $[A^{(e)}]$  — локальные матрицы податливости и градиентов конечного элемента;  $[\rho^{(e)}]$  и  $[g_S^{(e)}]$  — локальные векторы объемных и поверхностных сил, соответственно.

Структуру матриц  $[a_V^{(e)}]$  и  $[a_S^{(e)}]$  можно описать как число строк равное локальному числу узлов рассматриваемого конечного элемента, а число столбцов — общему числу узлов конечно-элементной сетки. Тогда с учетом соотношений (15)–(18) уравнения (7) можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_1 + R_2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

**Алгоритм решения.** Запишем систему линейных алгебраических уравнений как

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Рассмотрим модифицированный метод симметричной последовательной верхней релаксации (SSOR) [4] для системы (20):

$$\left\{ \begin{aligned} A \frac{\sigma^{k+\frac{1}{2}} - \sigma^k}{\tau} + A \sigma^k + B u^k &= 0; \\ -\alpha C \frac{u^{k+1} - u^k}{2\tau} + B^T \sigma^{k+\frac{1}{2}} &= R; \\ A \frac{\sigma^{k+1} - \sigma^{k+\frac{1}{2}}}{\tau} + A \sigma^{k+\frac{1}{2}} + B u^{k+1} &= 0. \end{aligned} \right. \tag{21}$$

Матрицу  $C$  представим в следующем виде:

$$C = B^T \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} B. \quad (22)$$

Для решения тестовых задач рассмотрим сетку, состоящую из 36 восьми-узловых конечных элементов и 133 узлов.

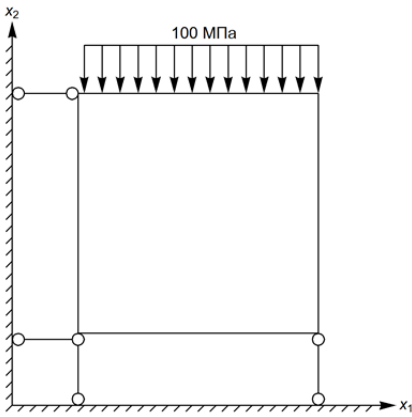


Рис. 2. Расчетная схема (первая тестовая задача)

**Решение задач теории упругости.**

Первая тестовая задача: двумерная пластина закреплена с помощью шарниров и нагружена так, как показано на рис. 2. Требуется провести численное моделирование напряженно-деформированного состояния пластины.

Пластина выполнена из материала, модуль упругости которой  $E = 210$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

На рис. 3 представлены распределения перемещений  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$ . Во всех узлах сетки напряжение  $\sigma_2$  равно 100 МПа, а  $\sigma_1 = \tau_{12} = 0$ .

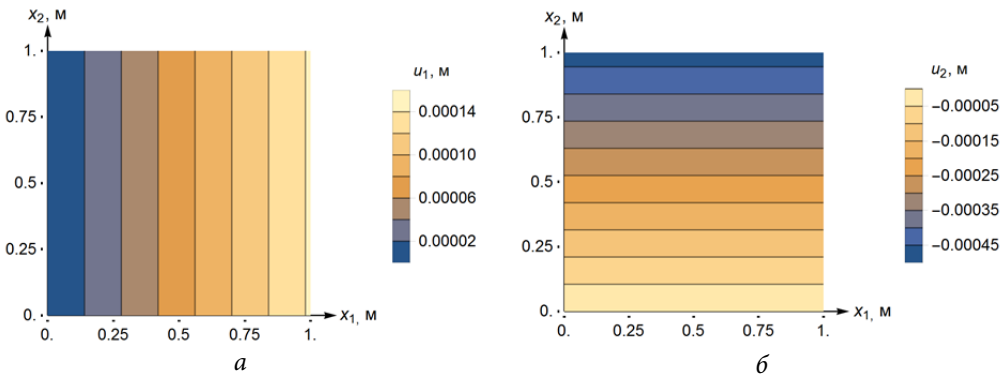


Рис. 3. Распределения перемещений:

$a - u_1(x)$ ;  $b - u_2(x)$  (первая тестовая задача)

Формулировка второй тестовой задачи аналогична первой за исключением того, что на поверхности  $S_1$  учитывается влияние силы трения с коэффициентом трения  $\mu = 0,1$  (рис. 4). Для этого в узлах конечно-элементной сетки, принадлежащих поверхности  $S_1$ , прикладывается касательное напряжение  $\tau_{12}$ :

$$\begin{aligned} \tau_{12}(\mathbf{x})|_{S_1} &= -\text{sgn}(u_1(\mathbf{x}))\mu|\sigma_2(\mathbf{x})|, \\ |\tau_{12}(\mathbf{x})| &\geq \mu|\sigma_2(\mathbf{x})|; \\ u_1(\mathbf{x}) &= 0, \quad |\tau_{12}(\mathbf{x})| < \mu|\sigma_2(\mathbf{x})|. \end{aligned} \quad (23)$$

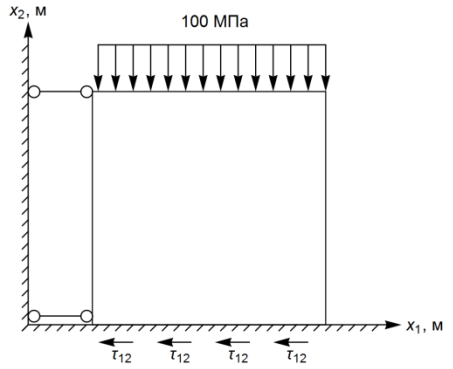


Рис. 4. Расчетная схема (вторая тестовая задача)

На рис. 5, а и б представлены распределения перемещений  $u_1(\mathbf{x})$  и  $u_2(\mathbf{x})$ , соответственно.

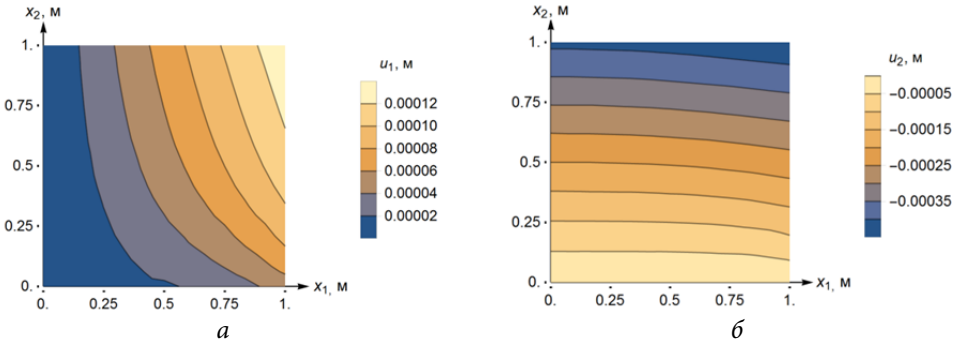


Рис. 5. Распределения перемещений:

а —  $u_1(\mathbf{x})$ ; б —  $u_2(\mathbf{x})$  (вторая тестовая задача)

На рис. 6, а и б представлены распределения напряжений  $\sigma_2(\mathbf{x})$  и  $\tau_{12}(\mathbf{x})$ , соответственно.

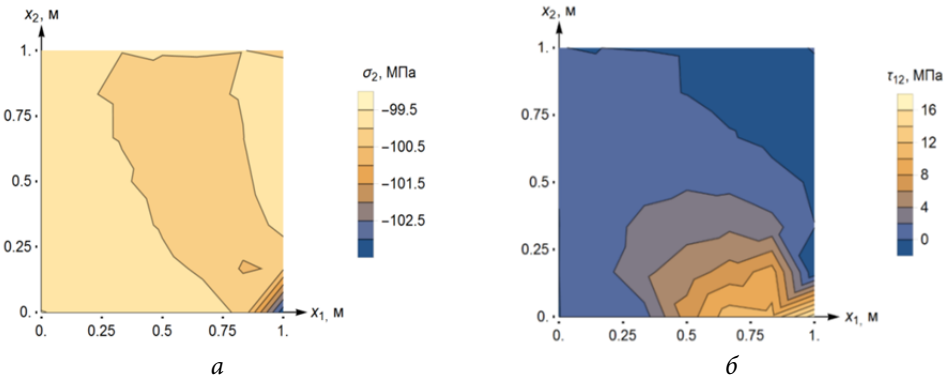


Рис. 6. Распределения напряжений:

а —  $\sigma_2(\mathbf{x})$ ; б —  $\tau_{12}(\mathbf{x})$

В статье представлено решение задачи теории упругости с использованием смешанной постановки задачи — функционала Рейсснера. Поиск стационарной точки этого функционала приводит к седловой задаче — блочной системе линейных алгебраических уравнений, зависящих одновременно от векторов напряжений и перемещений. Разработан алгоритм решения данной системы с помощью модифицированного метода симметричной последовательной верхней релаксации. Выполнено численное моделирование двумерной задачи теории упругости с использованием полученного алгоритма.

## Литература

- [1] Розин Л.А. *Вариационные постановки задач для упругих систем*. Ленинград, Изд-во Ленинградского университета, 1978. 222 с.
- [2] Розин Л.А. *Метод конечных элементов в применении к упругим системам*. Москва, Стройиздат, 1977. 129 с.
- [3] Зенкевич О., Морган К. *Конечные элементы и аппроксимация*. Москва, Мир, 1986. 318 с.
- [4] Быченков Ю.В., Чижонков Е.В. *Итерационные методы решения седловых задач*. Москва, Бином, 2010. 349 с.

**Аронов Павел Сергеевич** — студент кафедры «Прикладная математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Научный руководитель** — И.В. Станкевич, д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.



## FINITE ELEMENT NUMERICAL SOLUTION FOR PROBLEMS IN THE THEORY OF ELASTICITY

P.S. Aronov

aronovps@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

---

### Abstract

*We present a finite element numerical solution for problems in the theory of elasticity using a Reissner functional (mixed finite element method). While searching for a stationary point on this functional we arrive at a saddle point problem, which is a block system of algebraic linear equations depending on displacement and strain vectors simultaneously. A modified symmetric successive over-relaxation method is one of the most efficient methods for solving this type of problems. We also used the algorithm we developed to solve similar problems that take friction into account*

### Keywords

*Contact problems in the theory of elasticity, Reissner functional, finite element method, over-relaxation method*

© Bauman Moscow State Technical University, 2017

---

### References

- [1] Rozin L.A. Variatsionnye postanovki zadach dlya uprugikh system [Variational formulations of elastic system problems]. Leningrad, Leningrad University publ., 1978. 222 p.
- [2] Rozin L.A. Metod konechnykh elementov v primeneni k uprugim sistemam [Finite elements method in application to elastic systems]. Moscow, Stroyizdat publ., 1977. 129 p.
- [3] Zenkevich O. Morgan K. Konechnye elementy i approksimatsiya [Finite elements and approximation]. Moscow, Mir publ., 1986. 318 p.
- [4] Bychenkov Yu.V., Chizhonkov E.V. Iteratsionnye metody resheniya sedlovykh zadach [Iteration methods for saddle problems solving]. Moscow, Binom publ., 2010. 349 p.

**Aronov P.S.** — student, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Scientific advisor** — I.V. Stankevich, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.