

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕГО НЕПРЕРЫВНОГО СЛИТКА

С.А. Высоцкий

vysotskysa@yandex.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Выполнен численный анализ температурного и термонапряженного состояния слитка в процессе непрерывной разливки. Построено численное решение нестационарного уравнения теплопроводности с использованием метода конечных разностей, что позволило детально проанализировать распределение температурных полей в непрерывно разливаемых слитках. Данные расчеты легли в основу моделирования термонапряженного состояния материала, учитывающего взаимосвязь температурных, упругих деформаций и деформаций ползучести. Особое внимание уделено оценке накопления повреждений в процессе охлаждения. Построены и проанализированы диаграммы поврежденности, демонстрирующие влияние режимов охлаждения на развитие внутренних дефектов. Полученные результаты способствуют оптимизации технологических параметров при охлаждении слитков в процессе непрерывной разливки, улучшению эксплуатационных характеристик непрерывнолитых заготовок и предотвращению возникновения критических дефектов.

Ключевые слова: непрерывная разливка, нестационарная теплопроводность, режимы охлаждения, термонапряженное состояние, температурные деформации, упругие деформации, деформации ползучести, поврежденность материала

Введение. Метод непрерывной разливки стали играет ключевую роль в современной металлургической отрасли, обеспечивая высокую производительность заготовок. Процесс начинается с подачи расплавленной стали в разливочный ковш, откуда он поступает в охлаждаемую форму. Здесь сталь затвердевает, принимая форму слитка. Непрерывность процесса разливки позволяет минимизировать временные и энергетические потери, обеспечивая эффективное и стабильное производство.

Настоящая работа посвящена численному анализу температурного поля и накопления повреждений в слитке на различных стадиях процесса непрерывной разливки. Исследовано изменение температуры и напряженного состояния в поперечном сечении при выходе из кристаллизатора. Особое внимание уделено анализу параметров, влияющих на охлаждение, в течение всего процесса затвердевания слитка.

Постановка температурной задачи. Для расчета температурного поля используется усовершенствованная методика, основанная на разработанной

схеме, которая опирается на равновесную модель затвердевания сплава [1–3] и метод конечных разностей для решения уравнения теплопроводности [4].

Фронт кристаллизации слитка представлен как пространственно-распределенная двухфазная зона (рис. 1), что нашло отражение в математической постановке задачи теплопроводности.

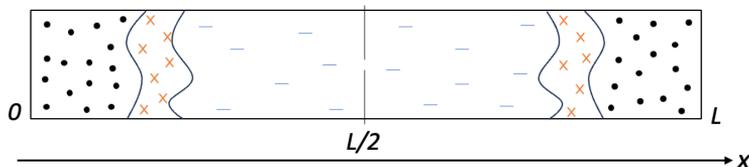


Рис. 1. Сечение слитка при затвердевании

Уравнение нестационарной теплопроводности для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + F, \quad (1)$$

где ρ — плотность материала; c — теплоемкость; T — температура материала; λ — коэффициент теплопроводности; F — функция, характеризующая пространственно-распределенный источник теплоты фазового перехода.

Введем параметр относительного количества твердой фазы ψ , который для жидкой фазы равен нулю, а для полностью затвердевшей части слитка равен единице и для двухфазной зоны изменяется от нуля до единицы. Будем полагать, что функция источника теплоты F прямо пропорциональна локальной скорости затвердевания сплава:

$$F = \rho L^* \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (2)$$

причем удельная теплота плавления L^* играет роль коэффициента пропорциональности; t — время.

Зададим локальную скорость затвердевания как производную сложной функции:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{d\psi}{dT} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3)$$

С учетом формул (2) и (3) уравнение нестационарной теплопроводности (1) преобразуется в уравнение

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho L^* \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (4)$$

Перепишем уравнение (4) следующим образом:

$$\rho c_{\text{эф}} \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T),$$

где

$$c_{\text{эф}}(T) = \begin{cases} c_L(T) & \text{при } T > T_L; \\ (1 - \psi)c_s + \psi c_L + L^* \frac{d\psi}{dT} & \text{при } T_s \leq T \leq T_L; \\ c_s(T) & \text{при } T < T_s. \end{cases} \quad (5)$$

В формуле (5) введены следующие обозначения: $c_L(T)$ — теплоемкость металла в жидком состоянии, зависящая от температуры; T_L — температура ликвидуса металла; $c_s(T)$ — теплоемкость металла в твердом состоянии, зависящая от температуры; T_s — температура солидуса металла.

Таким образом, учет выделения теплоты в двухфазной зоне сводится к определению зависимости эффективной удельной теплоемкости сплава от температуры $c_{\text{эф}} = c_{\text{эф}}(T)$. Существуют разные аппроксимации эффективной теплоемкости, в проводимом исследовании применяется аппроксимация в виде константы, поскольку предполагается, что затвердевание стали линейно зависит от температуры:

$$c_{\text{эф}}(T) = \begin{cases} c_L & \text{при } T > T_L; \\ c_s + \frac{L^*}{T_L - T_s} & \text{при } T_s \leq T \leq T_L; \\ c_s & \text{при } T < T_s. \end{cases} \quad (6)$$

Зависимость эффективной теплоемкости от температуры представлена на рис. 2.

В начальный момент времени температура расплавленной стали равна «температуре перегрева», которая, в свою очередь, принимается выше температуры ликвидуса T_L на 30 °С.

Представим физическую постановку задачи с граничными условиями Ньютона — Рихмана (граничные условия третьего рода):

$$\rho c_{\text{эф}}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L; \quad (7)$$

$$x = 0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = k(T_e - T), \quad t > 0;$$

$$x = L: \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = k(T_e - T), \quad t > 0,$$

где k — коэффициент теплоотдачи, зависящий от плотности орошения и положения сечения в процессе вытягивания слитка (рис. 3); T_e — температура внешней среды.

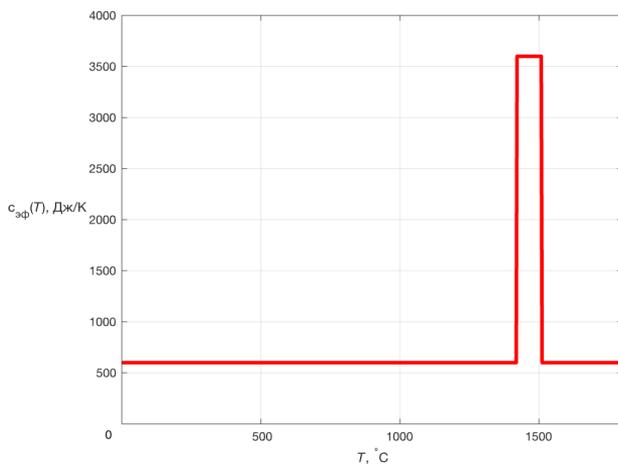


Рис. 2. Зависимость эффективной теплоемкости от температуры при $T_s = 1420$ °C, $T_L = 1510$ °C

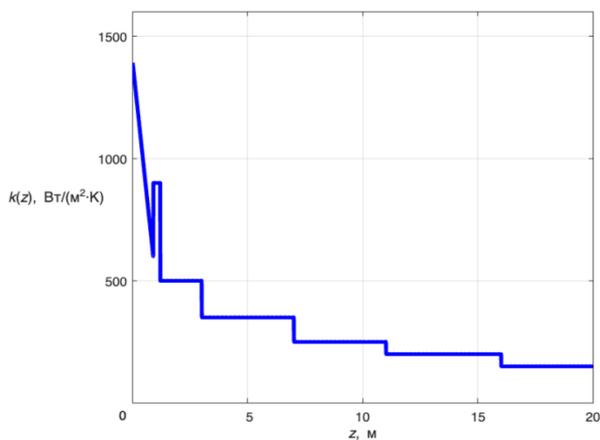


Рис. 3. Зависимость коэффициента теплоотдачи от координаты положения сечения

Решение температурной задачи. Метод конечных разностей (МКР) широко применяется для решения дифференциальных уравнений в частных производных, особенно в краевых задачах. Основная идея метода заключается в замене производных в уравнении их конечноразностными аппроксимациями.

Разобьем пластину по толщине на $N - 1$ равных промежутков, т. е. построим конечно-разностную сетку (рис. 4).

Определим значение температуры в i -м узле в момент времени $t = t_n = \tau n$ как $T(x_i, t_n) = T_i^n$. Здесь τ — шаг интегрирования по временной координате; n — номер шага по времени.

Далее заменим дифференциальные операторы в формуле (7) на их конечно-разностные аналоги. Будем пользоваться неявной схемой

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2}.$$

Аппроксимация частных производных конечными разностями приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\rho c_{эф}^n \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2},$$

при этом $c_{эф}^n$ вычисляются по формуле (6), $i = 2, \dots, N - 1, n \geq 0$.

Выборную схему аппроксимации частных производных графически представим на рис. 4.

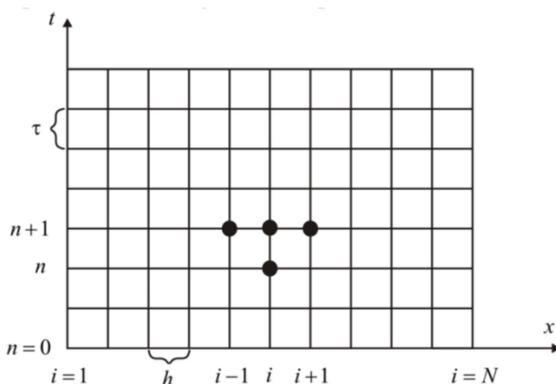


Рис. 4. Шаблон неявной четырехточечной схемы [5]

Рис. 4 наглядно демонстрирует, что используется четырехточечная разностная схема — три точки берутся на новом временном слое и одна со старого временного слоя.

Далее, аппроксимируя граничные условия, получим замкнутую СЛАУ, которую решим методом прогонки. Результат распределения температурного поля в непрерывном слитке при постоянной скорости вытягивания $v = 0,9$ м/мин покажем на рис. 5.

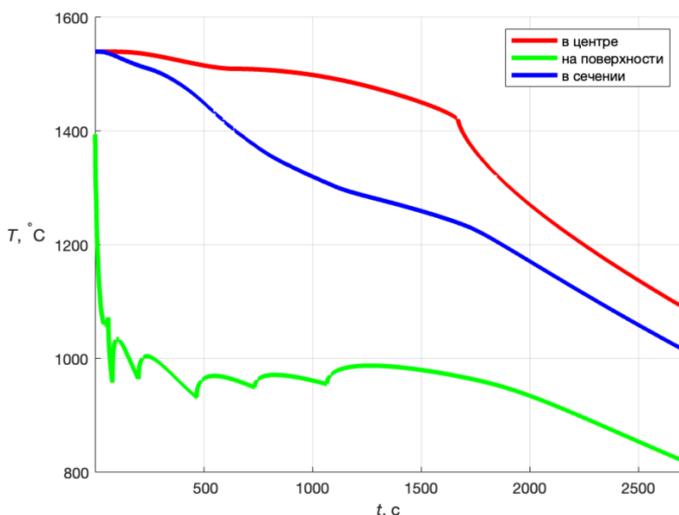


Рис. 5. Распределение температурного поля в слитке при постоянной скорости вытягивания

Напряженно-деформированное состояние. Ввиду большой протяженности слитка задачу по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) можно считать плоской, будем считать, что роликовые секции обеспечивают отсутствие выпучивания оболочки слитка, тогда соотношение для скорости обобщенной плоской деформации описывается формулой из [6]:

$$\xi = \xi^e + \xi^t + \xi^c, \quad (8)$$

где ξ^e — скорость упругих деформаций; ξ^t — скорость температурных деформаций; ξ^c — скорость деформаций ползучести.

Для решения задачи в приращениях деформаций [7] формулу (8) преобразуем к виду

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon^e + \Delta \epsilon^t + \Delta \epsilon^c. \quad (9)$$

Необходимо переопределить массив температур, поскольку считается, что затвердевание каждой ячейки происходит в ее середине. На рис. 6 красными точками показаны центры затвердевания ячеек, в которых нам необходимо определить температуру. Для k -й точки температуру T_k будем рассчитывать как $T_k = \frac{T_i + T_{i-1}}{2}$.

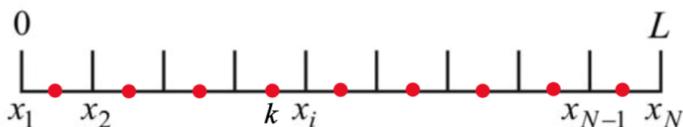


Рис. 6. Центры затвердевания ячеек

Приращение температурных деформаций $\Delta \epsilon^t$ будем вычислять по формуле

$$\Delta \epsilon_k^{tn} = \alpha_t (T_k^{n+1} - T_k^n),$$

где α_t — коэффициент линейного теплового расширения.

Приращение упругих деформаций находят по формуле

$$\Delta \epsilon_k^{en} = \frac{1-\mu}{E} \Delta \sigma_k^n,$$

где $\Delta \sigma_k^n$ — приращение напряжений, μ — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

Приращение деформаций ползучести рассчитывают по формуле

$$\Delta \epsilon^c = \Delta t \xi^c = \frac{1}{2} B e^{\left(-\frac{T_0}{T}\right)} \sigma |\sigma|^{v-1} \Delta t = \frac{1}{2} B_T \sigma |\sigma|^{v-1} \Delta t, \tag{10}$$

где для низкоуглеродистой стали коэффициенты $T_0 = 41\,200$ К, $B = 2\,500$ МПа⁻⁴ · с⁻¹, $v = 4,7$ приняты в соответствии с [8]. В общем случае скорость деформаций ползучести можно записать в виде $\xi^c = \beta \xi_k^{cn} + (1-\beta) \xi_k^{cn+1}$, где параметр β определяет тип схемы интегрирования по времени.

Будем пользоваться неявной линеаризованной схемой ($\beta = 0$), тогда скорости деформаций ползучести вычисляются по формуле

$$\xi_k^{cn+1} = \xi_k^{cn} + \Delta \xi_k^{cn+1}, \tag{11}$$

чтобы получить выражение для $\Delta \xi_k^{cn+1}$, необходимо ξ^c разложить в ряд, в котором удержим только линейные слагаемые:

$$\Delta \xi_k^{cn+1} = \left(\frac{\partial \xi^c}{\partial \sigma} \right)_k^n \Delta \sigma_k^n,$$

из выражения (10) получим

$$\left(\frac{\partial \xi^c}{\partial \sigma} \right)_k^n = \frac{1}{2} v \left(B_T |\sigma|^{v-1} \right)_k^n,$$

тогда выражение (11) примет вид

$$\xi_k^{cn+1} = \xi_k^{cn} + \left(\frac{\partial \xi^c}{\partial \sigma} \right)_k^n \Delta \sigma_k^n.$$

С учетом полученных выражений перепишем формулу (9):

$$\Delta \varepsilon^n = \frac{1-\mu}{E} \Delta \sigma_k^n + \Delta \varepsilon_k^{tn} + \Delta t \xi_k^{cn} + \Delta t \left(\frac{\partial \xi^c}{\partial \sigma} \right)_k^n \Delta \sigma_k^n, \quad (12)$$

обозначим $\Delta \varepsilon_k^{tn} + \Delta t \xi_k^{cn} = \Delta \varepsilon_{*k}^n$, $\frac{1-\mu}{E} + \Delta t \left(\frac{\partial \xi^c}{\partial \sigma} \right)_k^n = D$, тогда (12) примет вид

$$\Delta \varepsilon^n = \Delta \varepsilon_{*k}^n + D_* \Delta \sigma_k^n, \quad (13)$$

выразим из (13) $\Delta \sigma_k^n$:

$$\Delta \sigma_k^n = \frac{1}{D_*} (\Delta \varepsilon^n - \Delta \varepsilon_{*k}^n). \quad (14)$$

Запишем граничные условия на фронте затвердевания. Они получаются из физических соображений [3], согласно которым скачок компонент тензора напряжений на фронте затвердевания равен нулю:

$$\sum_j \Delta \sigma_k^n \Delta x = 0. \quad (15)$$

В выражении (15) суммирование происходит только для затвердевших элементов. Подставим в выражение (15) соотношение (14) и выразим $\Delta \varepsilon$:

$$\Delta \varepsilon = \frac{\sum_j \Delta x \frac{\Delta \varepsilon_j}{D_j}}{\sum_j \Delta x \frac{1}{D_j}}. \tag{16}$$

После чего подставим (16) в (14) и найдем напряжения на каждом шаге по зависимости

$$\sigma_k^n = \sigma_k^{n-1} + \Delta \sigma_k^n.$$

На рис. 7, а напряжения, соответствующие не затвердевшей части слитка, равняются нулю, так как давление в жидкости много меньше общего уровня напряжений в нашей задаче (что отражается в описании граничных условий). Также мы видим характерный скачок растягивающих напряжений в момент полного затвердевания слитка (рис. 7, б). Появление растягивающих напряжений приводит к возможности возникновения повреждений в слитке.

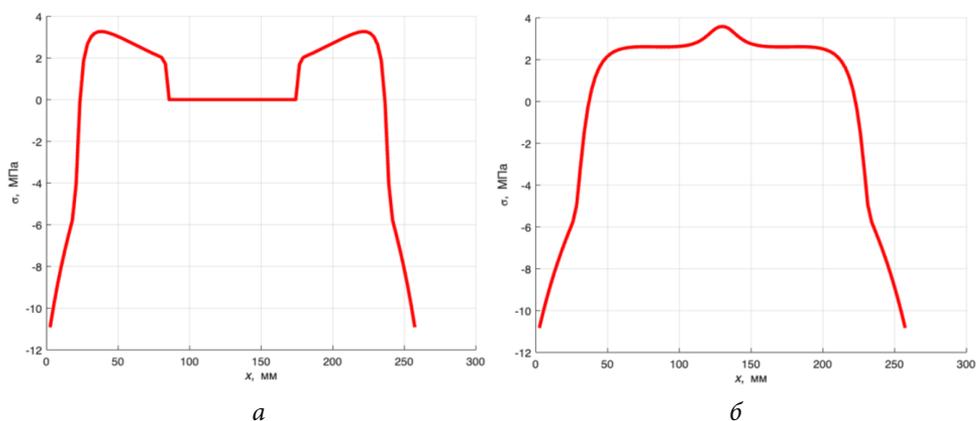


Рис. 7. Распределение напряжений в сечении:
 а — по прошествии 1000 с; б — в момент полного затвердевания слитка

Анализ поврежденности слитка. Для моделирования хрупкого разрушения металлических материалов при высоких температурах активно применяется концепция непрерывного накопления рассеянных повреждений. В начальном неповрежденном состоянии функция поврежденности ω равна нулю, при достижении ω значения единицы происходит местное разрушение в некоторой точке (области) тела [9, 10]. Тогда выражение для функции поврежденности описывается соотношением

$$\omega(x, t) = \int_{t_{cr}}^t \frac{1}{t_{разр}} dt,$$

где t_{cr} — время, при котором затвердел данный элемент слитка; $t_{разр}$ — зависимость времени разрушения от эквивалентного напряжения и температуры, имеющая вид

$$t_{разр} = \frac{C(T)}{\xi_{min}^c},$$

где $\xi_{min}^c = B_T \sigma_{эф}^v$. В свою очередь, эффективное напряжение $\sigma_{эф} = \sigma_{max}$ будем рассчитывать с помощью критерия Джонсона [11]:

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + |\sigma_1|).$$

Зависимость $C(T)$ — это константа (рис. 8), в ряде случаев зависящая от температуры и имеющая смысл предельных деформаций. Предполагается, что для пластического состояния значение коэффициента достаточно высокое, но непосредственно в температурном интервале, примыкающем к температуре солидуса (температурный интервал хрупкости $T_{хр} = 1350$ °С) происходит резкое охрупчивание материала, деформационная способность материала падает [12], вследствие чего коэффициент резко снижается до 0,2 %.

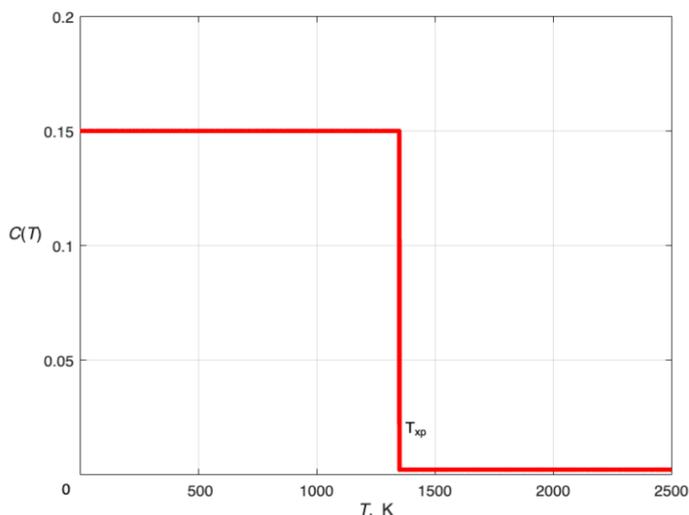


Рис. 8. Зависимость коэффициента $C(T)$

Распределение поврежденности в слитке показано на рис. 9. Резкие локальные максимумы связаны с движением слитка через разные зоны охлаждения. Под поверхностью действуют сжимающие напряжения, у зоны кристаллизации — растягивающие, что и приводит к скачкообразному росту поврежденности.

Решение задачи для переменной скорости вытягивания. На практике разливка происходит с переменной скоростью вытягивания из-за технологического замедления. Переходный скоростной режим разливки показан на рис. 10.

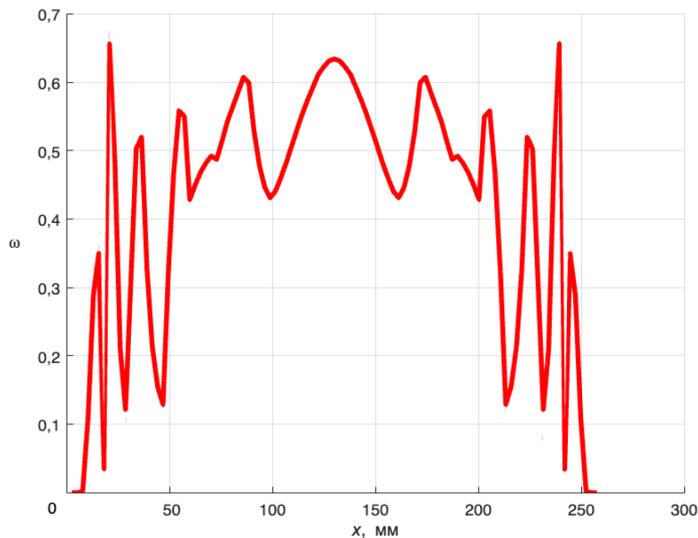


Рис. 9. Распределение поврежденности в слитке

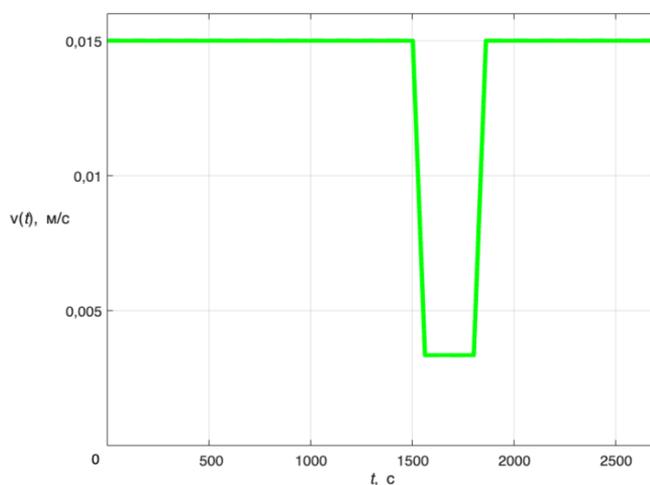


Рис. 10. Скорость разливки в реальной жизни

В настоящее время широко распространена модель охлаждения, в которой коэффициент теплоотдачи изменяется пропорционально изменению скорости разливки, например, как показано в системе

$$k = \begin{cases} k_0 \frac{v}{v_0} & \text{при } v > 0,4 \text{ м/мин;} \\ k_0 \frac{0,4}{v_0} & \text{при } v < 0,4 \text{ м/мин;} \\ 150 & \text{при } k(z) < 150 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К),} \end{cases} \quad (17)$$

где k_0 — коэффициент теплоотдачи при постоянной скорости; v_0 — постоянная скорость вытягивания. Третье условие системы (17) обусловлено тем, что коэффициент теплоотдачи на открытом воздухе примерно равен $150 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

Критическим показателем для слитка является его поврежденность, в таблице покажем максимальное значение этого параметра для сечений, зарождавшихся каждую минуту после начала литья и до момента изменения скорости разливки. Каждому сечению присвоим номер в соответствии с моментом времени, в который оно зародилось (например, для сечения, зародившегося через 5 минут после начала разливки, номер сечения будет 5).

Максимальная поврежденность в соответствующем сечении

Номер сечения	Максимальная поврежденность	Номер сечения	Максимальная поврежденность	Номер сечения	Максимальная поврежденность
1	0,6561	9	0,6561	17	0,8817
2	0,6561	10	0,6561	18	0,8895
3	0,6561	11	0,6618	19	0,8028
4	0,6561	12	0,6953	20	0,7042
5	0,6561	13	0,6925	21	0,8297
6	0,6561	14	0,7015	22	0,9515
7	0,6561	15	0,7252	23	0,8077
8	0,6561	16	0,8130	24	1,0000

Анализируя таблицу, можно сделать вывод, что самыми опасными являются сечения 18, 22, 24. На рис. 11 покажем распределение температуры на поверхности, на рис. 12 — распределение поврежденности по толщине слитка.

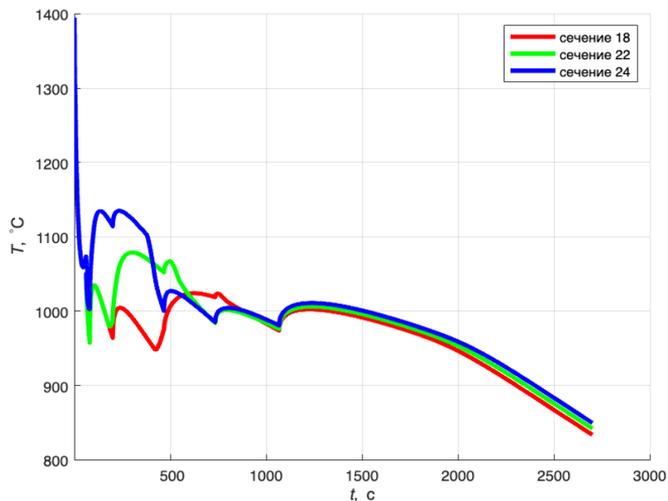


Рис. 11. Распределение температуры на поверхности слитка

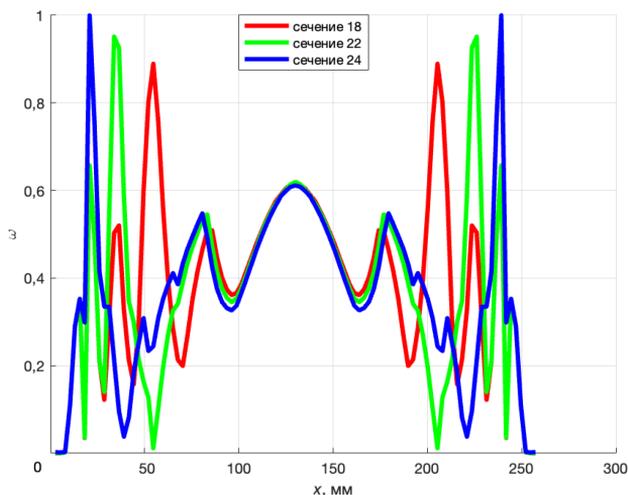


Рис. 12. Распределение поврежденности по толщине слитка

Заключение. Отметим, что численный анализ температурного поля и накопления повреждений в процессе непрерывной разливки стали позволил глубже понять механизмы тепловых и механических воздействий на формирующийся слиток. Исследование показало, что температура и напряженно-деформированное состояние существенно изменяются на раз-

ных стадиях процесса, особенно при выходе из кристаллизатора. Для исследуемого режима охлаждения параметр поврежденности достиг единицы под поверхностью слитка, что свидетельствует о наличии дефекта в литой структуре в этой области.

Подчеркнем, что все уравнения в рамках исследования решались неявным методом. Это позволило значительно сократить время расчета, обеспечивая при этом устойчивость численного алгоритма. Полученные данные подтверждают важность оптимизации параметров охлаждения для минимизации повреждений и повышения качества продукции. Разработанные численные модели могут быть полезны для дальнейшего совершенствования технологий непрерывной разливки и повышения эффективности металлургических процессов.

Литература

- [1] Самойлович Ю.А. и др. *Тепловые процессы при непрерывном литье стали*. Москва, Металлургия, 1982, т. 18, 152 с.
- [2] Борисов В.Т. *Теория двухфазной зоны металлического слитка*. Москва, Металлургия, 1987, 222 с.
- [3] Емельянов В.А. *Тепловая работа машин непрерывного литья заготовок*. Москва, Металлургия, 1988, 143 с.
- [4] Беляев Н.М., Рядно А.А. *Методы теории теплопроводности*. В 2 ч. Ч. 2. Москва, Высшая школа, 1982, 304 с.
- [5] Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. *Разностные методы решения задач теплопроводности*. Томск, ТПУ, 2007, 172 с.
- [6] Breslavsky D., Tatarinova O. Creep and irradiation effects in reactor vessel internals. *IUTAM symposium creep in structures*. Cham, Springer Nature Switzerland, 2023, с. 83–104.
- [7] Owen D.R.J. *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Pineridge Press Limited, 1980, 594 p.
- [8] Зарубин С.В. Критерий высокотемпературного хрупкого разрушения и оптимизация геометрической оси МНЛЗ. *Конструирование, расчет и исследование МНЛЗ криволинейного типа: сб. науч. тр.* Свердловск, НИИтяжмаш, 1989, с. 86–98.
- [9] Данилов В.Л., Зарубин С.В. Численное моделирование движения фронта разрушения в затвердевающем теле. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 1994, № 1, с. 80–85.
- [10] Abali B.E. Phase-field damage modeling in generalized mechanics by using a mixed finite element method (FEM). *IUTAM Symposium Creep in Structures*, Cham, Springer Nature Switzerland, 2023, pp. 1–18.

- [11] Сапунов В.Т. *Прогнозирование ползучести и длительной прочности жаропрочных сталей и сплавов ЯЭУ*. Москва, НИЯУ МИФИ, 2015, 136 с.
- [12] Бровман М.Я. Экспериментальное исследование ползучести при высоких температурах. *Проблемы прочности*, 1979, № 8, с. 77–79.

Поступила в редакцию 18.05.2025

Высоцкий Савва Андреевич — студент кафедры «Теория механизмов и машин», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Высоцкий С.А. Численный анализ термонапряженного состояния затвердевающего непрерывного слитка. *Политехнический молодежный журнал*, 2025, № 06 (101). URL: <https://ptsj.bmstu.ru/catalog/mech/mdsb/1079.html>

NUMERICAL ANALYSIS OF THE THERMALLY STRESSED STATE OF A CONTINUOUSLY SOLIDIFYING INGOT

S.A. Vysotskii

vysotskysa@yandex.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

The article presents a numerical analysis of the temperature and thermally stressed state of the ingot during continuous casting. In this paper have been built the numerical solution of the transient heat conduction equation using the finite difference method, enabling a detailed analysis of temperature field distribution in continuously cast ingots. These calculations formed the basis for modeling the thermally stressed state of the material, taking into account the interrelation of thermal, elastic, and creep deformations. Special attention is given to assessing damage accumulation during the cooling process. Damage diagrams were constructed and analyzed, illustrating the impact of cooling regimes on the development of internal defects. The obtained results contribute to optimizing technological parameters for ingot cooling during continuous casting, improving the operational properties of continuously cast billets, and preventing the formation of critical defects.

Keywords: continuous casting, transient heat conduction, cooling regimes, thermally stressed state, thermal deformations, elastic deformations, creep deformations, material damage

Received 18.05.2025

Vysotskii S.A. — Student, Department of Theory of Mechanisms and Machines, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:

Vysotskii S.A. Numerical analysis of the thermally stressed state of a continuously solidifying ingot. *Politekhnikheskiy molodezhnyy zhurnal*, 2025, no. 06 (101). URL: <https://ptsj.bmstu.ru/catalog/mech/mdsb/1079.html>