

УДК 519.2

URL: <https://ptsj.bmstu.ru/catalog/math/compmath/1122.html>

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТЯХ ТОЧЕК БИФУРКАЦИЙ

М.Х. Хаписов

khapsovmkh@student.bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Рассмотрено применение численных методов моделирования слабых решений стохастических дифференциальных уравнений. Методы первого и второго порядка реализованы и применены к изучению поведения решений уравнения, описывающего реакцию стохастического брюсселятора. Подтверждено условие стабильности решения стохастического уравнения брюсселятора. Проведен анализ решения в докритическом и сверхкритическом случаях. Проанализирован переход от докритического случая к сверхкритическому, были теоретически обоснованы возникающие в процессе этого перехода изменения фазового портрета решения.

Ключевые слова: слабые численные методы, брюсселятор, кинетическая схема, точка бифуркации, фазовый портрет, аттрактор

Введение. При работе с реальными системами исследователи часто сталкиваются с проблемой зашумленности получаемых ими данных. Это связано как с погрешностями измерений, проводимых с использованием реальных измерительных приборов, так и с несистематическими шумами. Например, при работе с электрическими цепями шум может возникать как в виде погрешности измерений амперметра или вольтметра, так и в виде стохастических возмущений системы, вызванных, скажем, высокочастотным излучением от рентгеновского аппарата, работающего в соседнем кабинете. В том случае, когда этот шум сильно влияет на поведение системы, наиболее эффективными оказываются модели, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ). Цель данной работы — реализация методов численного моделирования слабых решений СДУ и их применение к анализу поведения траекторий в окрестностях точек бифуркаций.

Слабые численные методы решения СДУ.

Пусть задано СДУ

$$\begin{cases} d\vec{\xi}_t = \vec{A}(\vec{\xi}_t, t)dt + \Sigma(\vec{\xi}_t, t)d\vec{W}_t; \\ \vec{\xi}(0) = \vec{\xi}_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\vec{\xi}_t$ — n -мерный случайный процесс; $\vec{W}_t$ — m -мерный стандартный винеровский процесс; $\vec{A}$ — вектор-функция; Σ — матричная функция; $\vec{\xi}_0$ — начальное условие, и пусть $\mathcal{C}$ — класс функций $R(\vec{x}, t), f: \mathbb{R}^n \times [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$, для которых существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial R}{\partial t}(\vec{x}, t), \frac{\partial R}{\partial x^i}(\vec{x}, t), \frac{\partial^2 R}{\partial x^l \partial x^i}(\vec{x}, t)$, где $i, l = \overline{1, n}$. Определим следующие операторы над классом $\mathcal{C}$ [1]:

$$\begin{cases} L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \vec{A}(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Sigma^{lj} \Sigma^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^i}; \\ G_0^{(i)} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \Sigma^{(i)}(\vec{x}, t), \end{cases} \quad (2)$$

где L и $G_0^{(i)}$ — операторы, определенные над классом $\mathcal{C}$.

Рассмотрим явный метод Эйлера на равномерной сетке с порядком $\gamma = 1$ — наиболее простой из слабых численных методов решения СДУ. Введем обозначения

$$\begin{cases} \vec{y}_p \equiv \vec{y}_{\tau_p}; \\ \tau_p = p\delta; \\ p = \overline{0, N}; \\ \delta = \frac{T}{N}; \\ \vec{W}_p \equiv \vec{W}_{\tau_p}. \end{cases}$$

где y — численное решение СДУ, представленное в виде матрицы; δ — шаг по времени; p — индекс равномерной сетки; N — число узлов сетки; $T = \delta N$ — время моделирования процесса.

Записав метод Эйлера в данных обозначениях применительно к задаче (1), получим формулу для решения (1) на сетке τ_p :

$$\vec{y}_{p+1} = \vec{y}_p + \vec{A}(\vec{y}_p)\delta + \Sigma(\vec{y}_p)(\vec{W}_{p+1} - \vec{W}_p). \quad (3)$$

Для слабой сходимости схемы (3) с порядком $\gamma = 1$ достаточно заменить приращение винеровского процесса $(\vec{W}_{p+1} - \vec{W}_p)$ на векторную случайную величину $\Delta \hat{W}_p$, каждая компонента которой удовлетворяет условию [2]

$$\left| M \Delta \hat{W}_p^{(j)} \right| + \left| M(\Delta \hat{W}_p^{(j)3}) \right| + \left| M(\Delta \hat{W}_p^{(j)2}) - \delta \right| \leq K \delta^2,$$

где $j = \overline{1, m}$; $K < \infty$ — постоянная.

Для построения метода порядка $\gamma = 2$ запишем разложение Тейлора — Ито в форме Вагнера и Платена. Для простоты будем далее рассматривать случай одномерного винеровского процесса. Стохастические дифференциальные уравнения (1) в этом случае можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} d\bar{\xi}_t = \bar{A}(\bar{\xi}_t, t)dt + \bar{B}(\bar{\xi}_t, t)dW_t; \\ \bar{\xi}(0) = \bar{\xi}_0. \end{cases}$$

где $\bar{\xi}_t$ — n -мерный случайный процесс; $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — вектор-функции; W_t — одномерный стандартный винеровский процесс. Для данной задачи оператор $G_0^{(i)}$ принимает следующий вид:

$$G_0^{(i)} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{B} & \text{при } i = 1; \\ 0 & \text{при } i > 1, \quad i = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

В связи с тем что в дальнейшем нас будет интересовать только первая компонента оператора, примем обозначение $G_0 \equiv G_0^{(1)}$.

Запишем разложение Тейлора — Ито:

$$\begin{cases} \bar{y}_{p+1} = \bar{y}_p + \bar{A}\delta + \bar{B}\Delta W_p + \frac{1}{2}\overline{G_0 B}(\Delta W_p^2 - \delta) + \overline{G_0 A}J_{(10)p} + \overline{LB}J_{(01)p} + \frac{\delta^2}{2}\overline{LA}; \\ J_{(10)p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_s^s dW_\theta ds; \\ J_{(01)p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s ds dW_\theta, \end{cases} \quad (4)$$

где $J_{(10)p}$ и $J_{(01)p}$ — нормально распределенные случайные величины, функции $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\overline{G_0 B}$, $\overline{LB}$, $\overline{G_0 A}$, $\overline{LA}$ вычислены в точке $(\bar{y}_p, \tau_p)$, а случайные величины $\Delta W_p^{(i)}$ удовлетворяют усиленному моментному условию [2]:

$$|M\Delta \hat{W}_p| + |M(\Delta \hat{W}_p^{(i)3})| + |M(\Delta \hat{W}_p^{(i)5})| + |M(\Delta \hat{W}_p^{(i)2}) - \delta| + |M(\Delta \hat{W}_p^{(i)4}) - 3\delta^2| \leq K\delta^3. \quad (5)$$

Отметим, что на роль $\Delta \hat{W}_p^{(i)}$ подходит гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией, равной δ , так как она будет удовлетворять условию (5) [3].

Рассмотрим способ моделирования уравнения (4). Поскольку

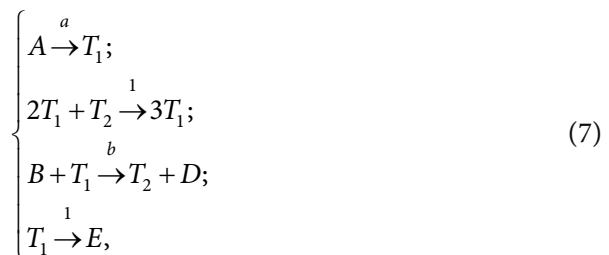
$$J_{(01)p} = \delta \Delta W_p - J_{(10)p},$$

то для численного моделирования по формуле (4) достаточно смоделировать две гауссовские коррелированные случайные величины: ΔW_p и $J_{(01)p}$. Применяя метод аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанный на кратных рядах Фурье по полиномам Лежандра [2], к паре стохастических интегралов $\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} dW_s$, $\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (s - \tau_p) dW_s$, получим

$$\begin{cases} \Delta W_p = \sqrt{\delta} \zeta_p^{(1)}; \\ J_{(01)p} = \frac{\sqrt{\delta^3}}{2} \left(\zeta_p^{(1)} + \frac{\zeta_p^{(2)}}{\sqrt{3}} \right); \\ J_{(10)p} = \frac{\sqrt{\delta^3}}{2} \left(\zeta_p^{(1)} - \frac{\zeta_p^{(2)}}{\sqrt{3}} \right), \end{cases} \quad (6)$$

где компоненты вектора $\vec{\zeta}_p$ — независимые при различных p стандартные гауссовские случайные величины.

Детерминированная модель брюсселятора. Модель брюсселятора представляет собой одну из моделей класса химических реакций, протекающих в колебательном режиме. При определенных условиях системы этого класса могут проявлять как периодическое, так и хаотическое поведение [4]. Модель брюсселятора [5] задается его кинетической схемой:



где $a > 0$, $b > 0$ — интенсивности переходов; A и B — исходные реагенты; T_1 и T_2 — промежуточные продукты реакций; D и E — итоговые продукты реакций [4].

Для схемы (7) можно записать свертку прямых уравнений Колмогорова с помощью производящих функций, получив тем самым детерминированные уравнения для модели брюсселятора [5]:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, v) = u^2 v - (b+1)u + a; \\ \dot{v} = g(u, v) = -u^2 v + bu; \\ u(0) = u_0; \\ v(0) = v_0, \end{cases} \quad (8)$$

где $u(t)$, $v(t)$ — количество реагентов типов T_1 и T_2 соответственно в момент времени t .

Найдем также устойчивую точку уравнения (8) (u^*, v^*) :

$$\begin{cases} \dot{u} \big|_{u=u^*} = u^{*2} v^* - (b+1)u^* + a = 0; \\ \dot{v} \big|_{v=v^*} = -u^{*2} v^* + bu^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^* = a; \\ v^* = \frac{b}{a}. \end{cases}$$

Также отметим, что точка (u^*, v^*) устойчива тогда и только тогда, когда след матрицы Якоби системы (8) отрицателен в этой точке [6]. Выпишем матрицу Якоби системы (8):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uv - (b+1) & u^2 \\ -2uv + b & -u^2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Запишем матрицу Якоби (9) в точке (u^*, v^*) :

$$J^* = J \big|_{(u,v)=(u^*,v^*)} = \begin{pmatrix} 2u^* v^* - (b+1) & u^{*2} \\ -2u^* v^* + b & -u^{*2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы J^* :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{4a^2 - c^2}, \quad (10)$$

где $c = a^2 - b + 1$.

При $c^2 < 4a^2$ точка (u^*, v^*) устойчива тогда и только тогда, когда действительная часть собственных значений отрицательна, что эквивалентно условию $c > 0$, а точка (u^*, v^*) будет являться устойчивым фокусом. При $c^2 = 4a^2$ получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = -c/2$. В этом случае система снова устойчива

только при условии $c > 0$. Наконец, при условии $c^2 > 4a^2$ имеем $\lambda_{1,2} = -c/2 \pm \sqrt{c^2 - 4a^2}$. В этом случае точка (u^*, v^*) будет устойчивой тогда и только тогда, когда оба собственных значения отрицательны. Нетрудно показать, что и в этом случае это условие эквивалентно условию $c > 0$ [6].

Таким образом, условие $c > 0$, эквивалентное условию

$$b < a^2 + 1, \quad (11)$$

является необходимым и достаточным условием устойчивости точки (u^*, v^*) , а значит, соотношение (11) является условием устойчивости системы (8).

Моделирование стохастического брюсселятора. Рассмотрим теперь стохастическую модель брюсселятора, введенную в работе [7]:

$$\begin{cases} du = (u^2v - (b+1)u + a)dt - \delta(u - u^*)dW_t; \\ dv = (-u^2v + bu)dt + \delta(v - v^*)dW_t; \\ u(0) = u_0; \\ v(0) = v_0, \end{cases} \quad (12)$$

где $\delta > 0$ — детерминированный параметр.

Примем следующее определение *стабильности по вероятности* и *глобальной стабильности по вероятности*, которое потребуется нам в последующем изложении.

Определение 1. Пусть $x(t)$ — решение СДУ для $t > s$ и $x(s) = x_0$. Решение $x^*(t)$ называется *стабильным по вероятности* [8], если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $s \geq 0$ выполняется следующее соотношение:

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} P \left(\sup_{t > s} |x(t) - x^*(t)| > \varepsilon \right) = 0.$$

Определение 2. Пусть $x(t)$ — решение СДУ для $t > s \geq 0$ и $x(s) = x_0$. Решение $x^*(t)$ называется *глобально (асимптотически) стабильным по вероятности* [8], если

$$P \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - x^*(t)| = 0 \right) = 1.$$

В работе [7] исследуется устойчивость системы (12) (в предположении, что $b < a^2 + 1$). В частности, формулируются и доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\delta^2 < a^2 + 1 - b$, то тривиальное решение системы (12), записанной в полярной системе координат, $\rho = 0$ является стабильным по ве-

роятности. Если же $\delta^2 > a^2 + 1 - b$, то тривиальное решение системы (12) $\rho = 0$ является нестабильным по вероятности.

Теорема 2. Тривиальное решение системы (12), записанной в полярной системе координат, $\rho = 0$ обладает глобальной стабильностью по вероятности при условии $\delta^2 < a^2 + 1 - b$.

Таким образом, тривиальное решение $\rho = 0$ системы стабильно при условии $\delta^2 < a^2 + 1 - b$, причем при данном условии оно также оказывается глобально стабильным.

Выполним моделирование процесса (12) при разных параметрах системы, найдя явное слабое решение второго порядка точности. Поскольку в системе в обоих уравнениях фигурирует один и тот же винеровский процесс, уравнения (2) упрощаются для них следующим образом [2]. Пусть дана вектор-функция

$$\vec{R}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} R^1(\vec{x}, t) \\ R^2(\vec{x}, t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда для } \vec{R}(\vec{x}) \text{ справедливо соотношение}$$

$$\overline{LR} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{A} + \frac{1}{2} \left[(B^1)^2 \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^2} + 2B^1 B^2 \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u \partial v} + (B^2)^2 \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial v^2} \right],$$

$$\text{где } \vec{A} = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 v - ((b+1)u + a) \\ -u^2 v + bu \end{pmatrix}; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta(u - u^*) \\ \delta(v - v^*) \end{pmatrix}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} B^1 & 0 \\ B^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{G_0 B} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial B^1}{\partial u} & \frac{\partial B^1}{\partial v} \\ \frac{\partial B^2}{\partial u} & \frac{\partial B^2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^2(u - u^*) \\ \delta^2(v - v^*) \end{pmatrix}; \\ \overline{G_0 A} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A^1}{\partial u} & \frac{\partial A^1}{\partial v} \\ \frac{\partial A^2}{\partial u} & \frac{\partial A^2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1 \frac{\partial A^1}{\partial u} + B^2 \frac{\partial A^2}{\partial v} \\ B^1 \frac{\partial A^1}{\partial u} + B^2 \frac{\partial A^2}{\partial v} \end{pmatrix}; \\ \overline{LB} &= \begin{pmatrix} -\delta A^1 \\ \delta A^2 \end{pmatrix}; \\ \overline{LA} &= \begin{pmatrix} A^1 \frac{\partial A^1}{\partial u} + A^2 \frac{\partial A^1}{\partial v} + \delta^2(u - u^*)^2 v - 2\delta^2(u - u^*)(v - v^*)u \\ A^1 \frac{\partial A^2}{\partial u} + A^2 \frac{\partial A^2}{\partial v} - \delta^2(u - u^*)^2 v + 2\delta^2(u - u^*)(v - v^*)u \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Теперь систему (12) можно аппроксимировать следующей численной схемой:

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \bar{A}\Delta t_k + \bar{B}\Delta W_k + \frac{1}{2}\bar{G}_0\bar{B}(\Delta W_k^2 - \Delta t_k) + \\ + \bar{G}_0\bar{A}J_{(10)k} + \bar{L}\bar{B}J_{(01)k} + \frac{\Delta t_k^2}{2}\bar{L}\bar{A}, k = 0, N-2; \\ \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

где $\bar{x}_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$; $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$; N — количество узлов сетки, а $\Delta W_k, J_{(10)k}, J_{(01)k}$ описываются формулой (6).

Докритический случай. Слабый шум. Результаты моделирования. Будем моделировать решения системы (12) для нескольких конфигураций параметров. Результаты, представленные на рис. 1 и 2, соответствуют конфигурациям параметров, в которых $\delta^2 = 0,04 < a^2 + 1 - b = 0,36$ и $\delta^2 = 0,01 < a^2 + 1 - b = 0,1$ соответственно. Результаты были получены с помощью библиотеки Matplotlib для языка программирования Python.

Относительные среднеквадратичные ошибки аппроксимации второго порядка вычисляют по формуле

$$\begin{cases} \varepsilon_u = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{\hat{u}_k}{u_k} \right)^2; \\ \varepsilon_v = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{\hat{v}_k}{v_k} \right)^2, \end{cases}$$

где $(\hat{u}, \hat{v})$ — численное решение второго порядка стохастического уравнения (12); (u, v) — численное решение детерминированного уравнения (8).

Относительные среднеквадратичные ошибки аппроксимации второго порядка для конфигурации, представленной на рис. 1, составляют:

$$\begin{cases} \varepsilon_u \approx 4,362 \cdot 10^{-5}; \\ \varepsilon_v \approx 3,804 \cdot 10^{-4}. \end{cases} \quad (13)$$

Рассмотрим другую конфигурацию параметров.

Относительные среднеквадратичные ошибки для конфигурации, представленной на рис. 2, составляют

$$\begin{cases} \varepsilon_u \approx 4,401 \cdot 10^{-5}; \\ \varepsilon_v \approx 3,955 \cdot 10^{-5}. \end{cases} \quad (14)$$

Из представленных результатов следует, что аппроксимации первого и второго порядка демонстрируют незначительные различия. При этом значения относительных среднеквадратичных ошибок (13) и (14) остаются низкими, что свидетельствует о высокой точности полученной аппроксимации.

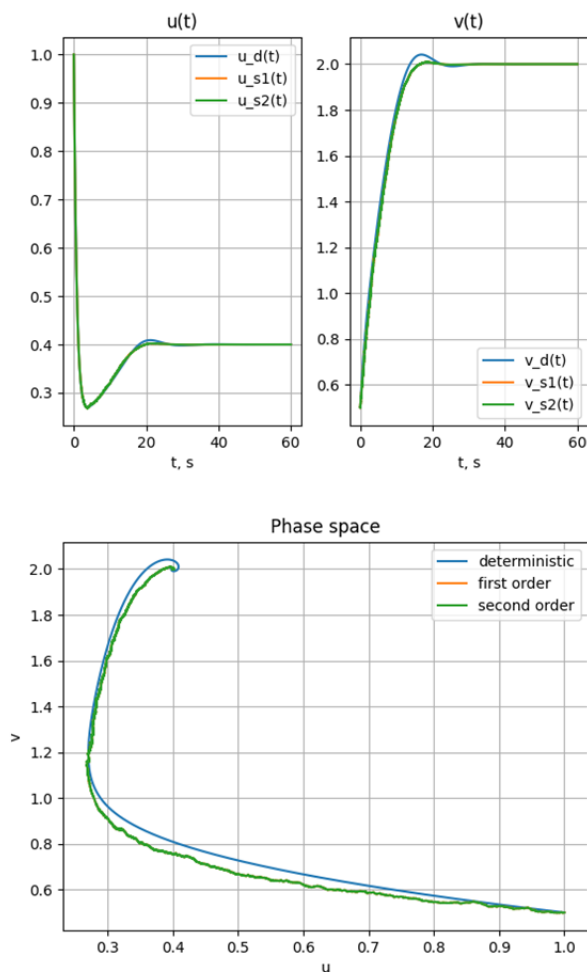


Рис. 1. Детерминированное решение $(u_d(t), v_d(t))$, усредненные по 100 траекториям стохастические решения первого $(u_{s1}(t), v_{s1}(t))$ и второго $(u_{s2}(t), v_{s2}(t))$ порядков и фазовые портреты для параметров $a = 0,4$; $b = 0,8$; $\delta = 0,2$; $u_0 = 1$; $v_0 = 0,5$; $N = 10^5$; $T = 60$

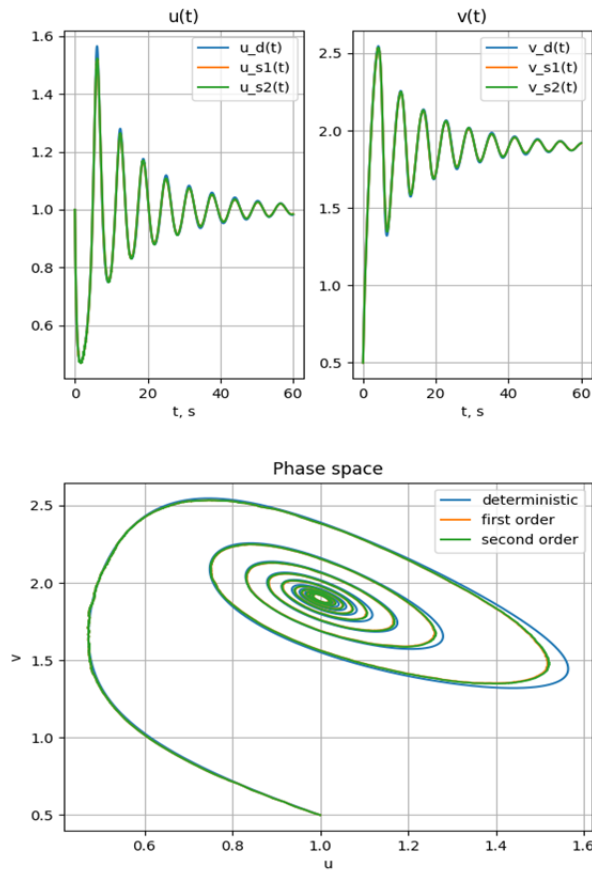


Рис. 2. Детерминированное решение $(u_d(t), v_d(t))$, усредненные по 100 траекториям стохастические решения первого $(u_{s1}(t), v_{s1}(t))$ и второго $(u_{s2}(t), v_{s2}(t))$ порядков и фазовые портреты для параметров $a = 1; b = 1,9; \delta = 0,1; u_0 = 1; v_0 = 0,5; N = 10^5; T = 60$

Докритический случай. Сильный шум. Результаты моделирования. Применительно к конфигурациям, рассмотренным в предыдущем параграфе, попробуем увеличить параметр δ так, чтобы условие $\delta^2 < a^2 + b - 1$ нарушалось. В таком случае условия теорем 1 и 2 оказываются не выполнены и система может потерять стабильность.

В конфигурации, представленной на рис. 3, $\delta^2 = 0,36 \geq a^2 + 1 - b = 0,36$. Видно, что сходимость системы к детерминированному решению ухудшается при увеличении параметра δ . Относительные среднеквадратичные ошибки составляют

$$\begin{cases} \varepsilon_u \approx 4,538 \cdot 10^{-3}; \\ \varepsilon_v \approx 1,459 \cdot 10^{-2}. \end{cases} \quad (15)$$

т. е. в сравнении с (13) ошибки возросли на два порядка при увеличении параметра δ в 3 раза.

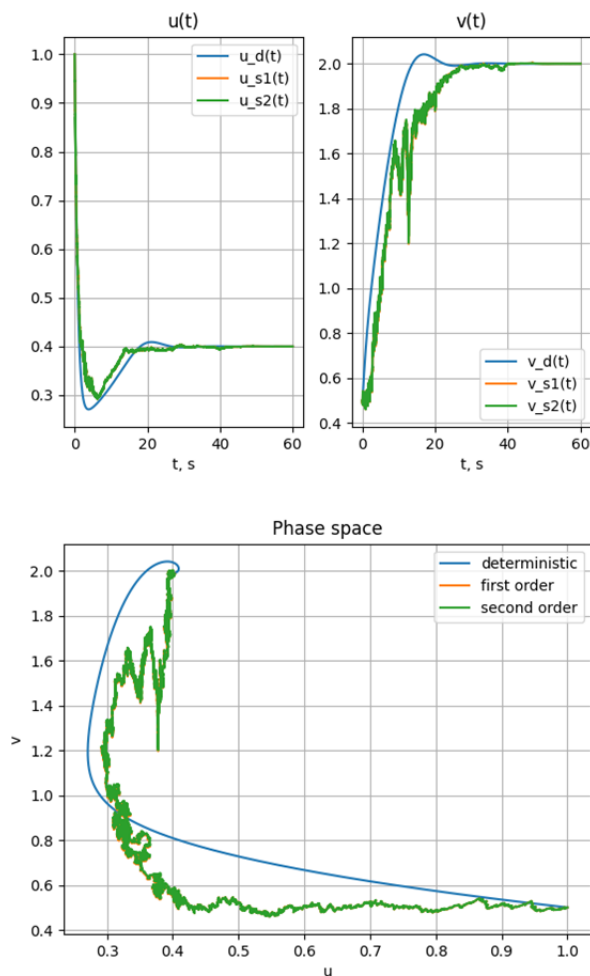


Рис. 3. Детерминированное решение $(u_d(t), v_d(t))$, усредненные по 100 траекториям стохастические решения первого $(u_{s1}(t), v_{s1}(t))$ и второго $(u_{s2}(t), v_{s2}(t))$ порядков и фазовые портреты для параметров $a = 0,4; b = 0,8; \delta = 0,6; u_0 = 1; v_0 = 0,5; N = 10^5; T = 60$

В конфигурации, представленной на рис. 4, $\delta^2 = 0,16 \geq a^2 + 1 - b = 0,1$. Относительные среднеквадратичные ошибки составляют

$$\begin{cases} \varepsilon_u \approx 4,712 \cdot 10^{-3}; \\ \varepsilon_v \approx 3,244 \cdot 10^{-3}. \end{cases} \quad (16)$$

т. е. в сравнении с (14) ошибки возросли на два порядка при увеличении параметра δ в 4 раза.

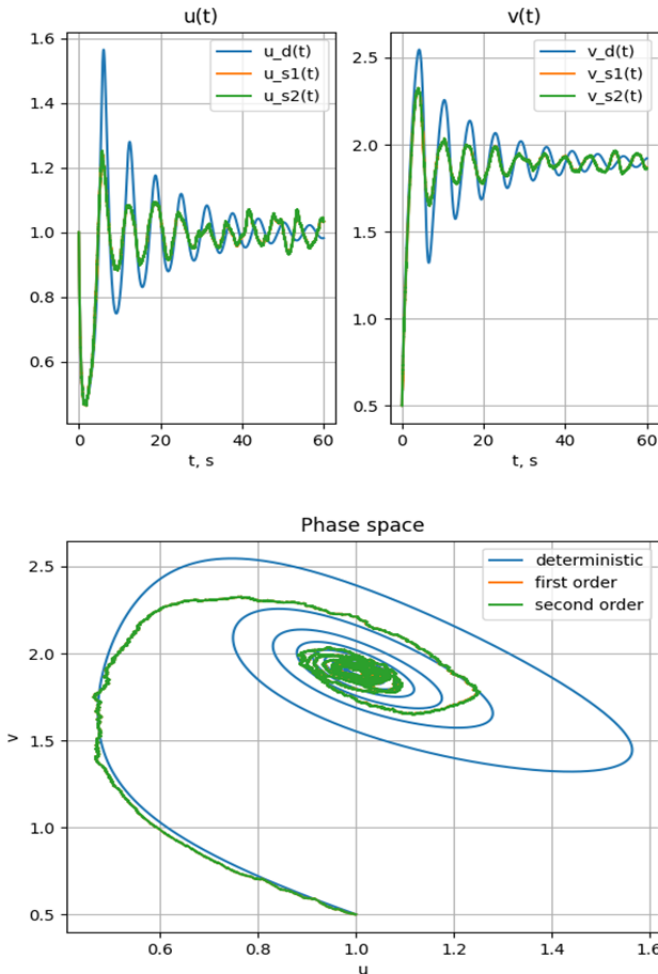


Рис. 4. Детерминированное решение $(u_d(t), v_d(t))$, усредненные по 100 траекториям стохастические решения первого $(u_{s1}(t), v_{s1}(t))$ и второго $(u_{s2}(t), v_{s2}(t))$ порядков и фазовые портреты для параметров $a = 1; b = 1,9; \delta = 0,4; u_0 = 1; v_0 = 0,5; N = 10^5; T = 60$

Полученные результаты демонстрируют нелинейный рост относительных среднеквадратичных ошибок при увеличении параметра δ . При этом численные решения первого и второго порядков все еще остаются практически неотличимыми друг от друга.

Общая динамика процесса и результаты экспериментов. Для более детального рассмотрения динамики процесса при увеличении параметра δ вплоть до критического значения $\delta = \sqrt{a^2 + 1 - b}$ построим трехмерную визуализацию фазовых портретов при разных значениях параметра δ .

На рис. 5 показано, как ведут себя фазовые портреты решения при линейном увеличении параметра δ (усреднение траекторий здесь не осуществлялось). Отчетливо видна разница между стохастическим решением при параметре $\delta = \frac{1}{10}\sqrt{a^2 + 1 - b}$ (нижний фазовый портрет) и стохастическом

решении при параметре $\delta = \sqrt{a^2 + 1 - b}$ (верхний фазовый портрет).

Проиллюстрируем полученные результаты в таблице.

Результаты экспериментов (13)–(16)

a	b	$\sqrt{a^2 + 1 - b}$	δ	ε_u	ε_v
0,4	0,8	0,60	0,2	$4,362 \cdot 10^{-5}$	$3,804 \cdot 10^{-4}$
			0,6	$4,538 \cdot 10^{-3}$	$1,459 \cdot 10^{-2}$
1	1,9	0,32	0,1	$4,401 \cdot 10^{-5}$	$3,955 \cdot 10^{-5}$
			0,4	$4,712 \cdot 10^{-3}$	$3,244 \cdot 10^{-3}$

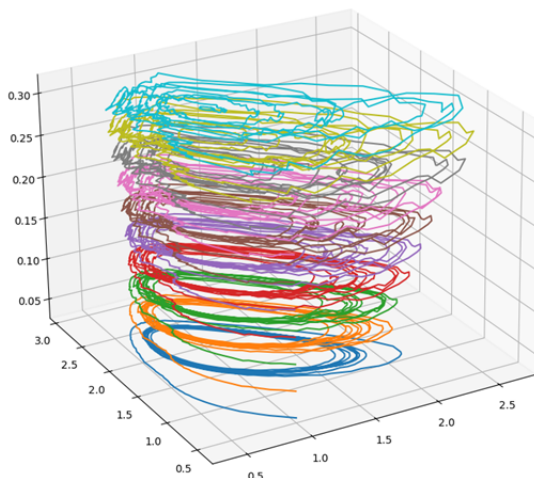


Рис. 5. Трехмерная визуализация фазовых портретов при разных значениях δ с параметрами $a = 1$; $b = 1,9$; $T = 60$; $u_0 = 1$; $v_0 = 0,5$

Из таблицы видно, что увеличение параметра δ ведет к нелинейному и крайне быстрому росту относительных среднеквадратичных ошибок.

Рис. 6 демонстрирует заметное расхождение стохастических траекторий от детерминированного решения, несмотря на малую величину параметра δ . Относительные среднеквадратичные ошибки составляют

$$\begin{cases} \varepsilon_u \approx 4,08 \cdot 10^{-4}; \\ \varepsilon_v \approx 2,93 \cdot 10^{-4}. \end{cases} \quad (17)$$

Аналогично увеличим параметр δ .

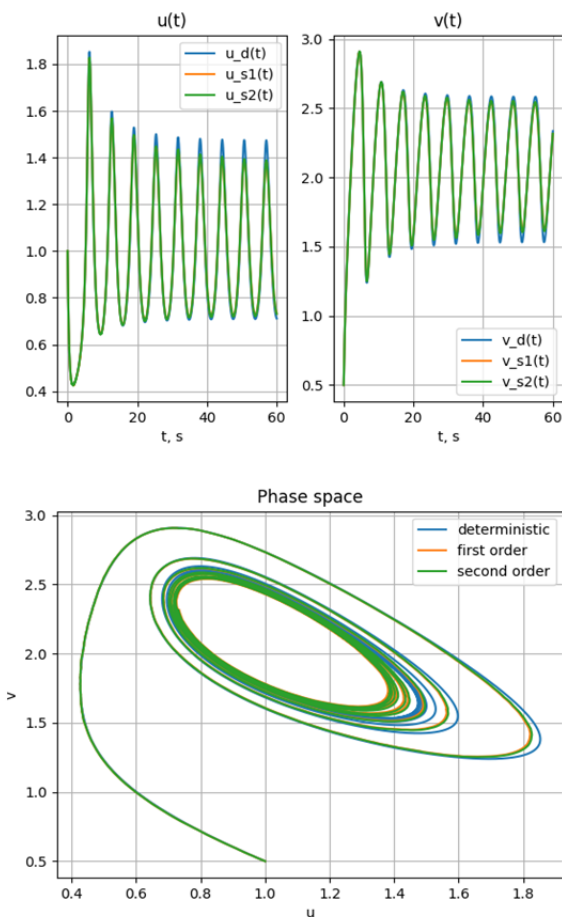


Рис. 6. Детерминированное решение $(u_d(t), v_d(t))$, усредненные по 100 траекториям стохастические решения первого $(u_{s1}(t), v_{s1}(t))$ и второго $(u_{s2}(t), v_{s2}(t))$ порядков и фазовые портреты для параметров $a = 1; b = 2, 1; \delta = 0, 05; u_0 = 1; v_0 = 0, 5; N = 10^5; T = 60$

На рис. 7 отчетливо видно, что увеличение параметра δ ведет к гораздо более значительному расхождению стохастических траекторий, чем можно было видеть на рис. 6. Видно также, что стохастические траектории не стабилизируются и амплитуда колебаний стохастических траекторий изменяется немонотонно с течением времени. Относительные среднеквадратичные ошибки составляют

$$\begin{cases} \varepsilon_u \approx 2,888 \cdot 10^{-2}; \\ \varepsilon_v \approx 1,689 \cdot 10^{-2}, \end{cases}$$

т. е. в сравнении с (17) ошибки возросли на два порядка при увеличении параметра δ в 4 раза.

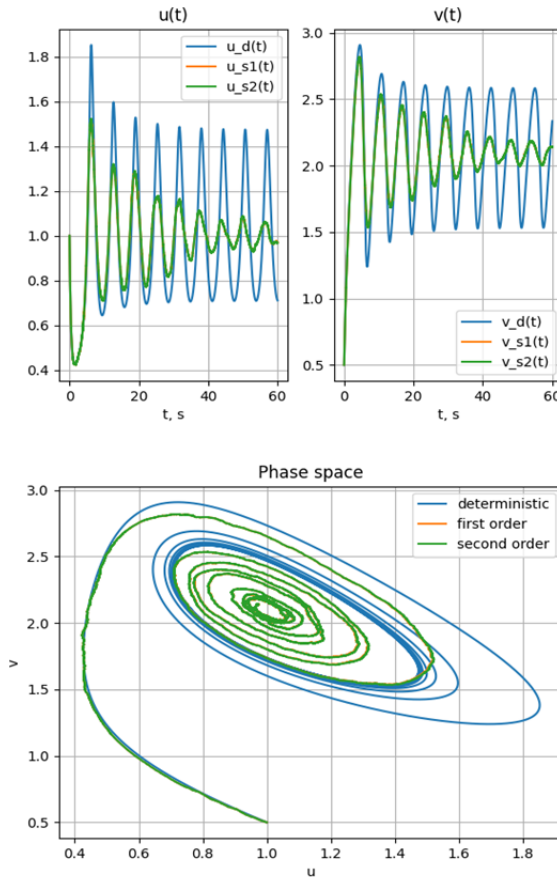


Рис. 7. Детерминированное решение $(u_d(t), v_d(t))$, усредненные по 100 траекториям стохастические решения первого $(u_{s1}(t), v_{s1}(t))$ и второго $(u_{s2}(t), v_{s2}(t))$ порядков и фазовые портреты для параметров $a = 1; b = 2,1; \delta = 0,2; u_0 = 1; v_0 = 0,5; N = 10^5; T = 60$

Анализ полученных результатов. Таким образом, было показано, что СДУ (12) при условии (11) остается глобально стабильным при $\delta < \sqrt{a^2 + 1 - b}$, и полученные экспериментальные данные согласуются с этим выводом. Действительно, при увеличении параметра δ наблюдается увеличение зашумленности стохастического решения и рост относительных среднеквадратичных ошибок между численным решением уравнения (12) и детерминированным решением уравнения (8). При $\delta \geq \sqrt{a^2 + 1 - b}$ стохастическое решение оказывается достаточно шумным по сравнению с детерминированным решением и часто перестает быть информативным. В сверхкритическом случае система не стабилизируется и при увеличении параметра δ стохастические траектории претерпевают значительные расхождения с траекториями детерминированного решения. Поскольку в реальных системах шум принципиально полностью неустраним, детерминированное решение теряет свой физический смысл.

Из результатов моделирования видно, что в докритических случаях траектории системы (12) сходятся к стабильной точке (u^*, v^*) , т. е. аттрактор этой системы представляет собой точку равновесия. В сверхкритическом случае мы наблюдаем обратный эффект: траектории решения не сходятся к точке (u^*, v^*) , но описывают устойчивую циклическую кривую вокруг этой точки, т. е. аттрактор этой системы представляет собой устойчивый предельный цикл. Связано это с возникающей в системе бифуркацией Андронова — Хопфа [9] при нарушении условия (11). Условие $b = a^2 + 1$ как раз и гарантирует, что действительная часть собственных значений (10) модели (8) будет равна нулю, и при увеличении параметра b и переходе через критическое значение $b = a^2 + 1$ возникает данная бифуркация [10].

Выводы. Таким образом, в ходе данной работы были реализованы методы стохастического моделирования для расчета траекторий нелинейных динамических систем на примере модели брюсселятора. Был проведен анализ полученных траекторий вблизи точки бифуркации $\delta = \sqrt{a^2 + 1 - b}$, полученные экспериментальные данные подтверждают теоретический вывод о глобальной стабильности системы при $\delta < \sqrt{a^2 + 1 - b}$. При этом рост параметра δ приводит к быстрому нелинейному росту относительных среднеквадратичных ошибок. Также был проведен общий анализ траекторий в докритическом и сверхкритическом случаях: в докритических случаях траектории системы сходятся к точке равновесия, а в сверхкритическом описывают устойчивую циклическую кривую вокруг точки равновесия в связи с возникающей в системе бифуркацией Андронова — Хопфа.

Литература

- [1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. *Теория случайных процессов*. Москва, Физматлит, 2003, 400 с.
- [2] Кузнецов Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*. Москва, Физматлит, 2010, 256 с.
- [3] Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. *Случайные процессы. Сер. Математика в техническом университете. Вып. XVIII*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999, 448 с.
- [4] Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г. *Курс химической кинетики*. Москва, Высш. шк., 1974, 400 с.
- [5] Калинин А.В. *Схемы взаимодействий: детерминированные и стохастические модели*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009, 44 с.
- [6] MIT OpenCourseWare. Chapter 26. Linear Systems with Constant Coefficients. Massachusetts Institute of Technology. URL: https://ocw.mit.edu/courses/18-03-differential-equations-spring-2010/3de8a404f12686e16bfc12076e9b406_MIT18_03S10_chapter_26.pdf (accessed 09.11.2025).
- [7] Li Q., Zhang J. Stochastic bifurcation analysis in Brusselator system with white noise. *Advances in Continuous and Discrete Models*, 2019, vol. 2019, art. no. 385. <https://doi.org/10.1186/s13662-019-2287-x>
- [8] Khasminskii R. *Stochastic Stability of Differential Equations*. Berlin, Springer-Verlag, 2011, 342 p.
- [9] Kuznetsov Y.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York, Springer-Verlag, 1998, 635 p.
- [10] Башкирцева И.А. *Нелинейные стохастические системы в зонах порядка и хаоса: математическое моделирование, анализ и управление*. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 2005, 300 с.

Поступила в редакцию 06.02.2026

Хаписов Малик Хаписович — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Облакова Татьяна Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Хаписов М.Х. Численное моделирование слабых решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений в окрестностях точек бифуркаций. *Политехнический молодежный журнал*, 2026, № 4 (105). URL: <https://ptsj.bmstu.ru/catalog/math/compmath/1122.html>

SIMULATION OF STOCHASTIC PROCESS TRAJECTORIES IN THE NEIGHBORHOODS OF BIFURCATION POINTS

M.Kh. Khapisov

khapisovmkh@student.bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

The study examines the application of numerical methods for simulating weak solutions of stochastic differential equations. First- and second-order methods were implemented and applied to investigate the behavior of solutions to the equation describing the response of a stochastic Brusselator. The stability condition for the solution of the stochastic Brusselator equation was verified. An analysis of the solution was carried out for both the subcritical and supercritical regimes. The transition from the subcritical to the supercritical case was examined, and the changes in the phase portrait of the solution arising during this transition were theoretically justified.

Keywords: weak numerical methods, Brusselator, kinetic scheme, bifurcation point, phase portrait, attractor

Received 06.02.2026

Khapisov M.Kh. — Student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Oblakova T.V. Ph. D. (Phys. and Math.), Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:

Khapisov M.Kh. Numerical simulation of weak solutions of nonlinear stochastic differential equations in neighborhoods of bifurcation points. *Politekhnikheskiy molodezhnyy zhurnal*, 2026, no. 4 (105). (In Russ.). URL: <https://ptsj.bmstu.ru/catalog/math/compmath/1122.html>