УДК 536.2.01 URL: https://ptsj.bmstu.ru/catalog/math/compmath/1136.html

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ОДНОМЕРНОЙ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРАДИЕНТНОЙ СРЕДЕ

Г.А. Ершов ershovga@student.bmstu.ru
SPIN-код: 8709-4660

Л.В. Кочикина kochikinalv@student.bmstu.ru
SPIN-код: 7202-2039

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Исследована одномерная квазипериодическая градиентная бинарная среда, «период» которой линейно изменяется (возрастает или убывает) от поверхности вглубь. Выполнено конечноразностное моделирование распространения периодического теплового возмущения вглубь материала для образцов с низкой и высокой степенью градиентности, получены частотные и временные зависимости эффективной глубины проникновения внешнего гармонического воздействия. Результаты могут быть использованы для создания новых, более эффективно распределяющих тепло композиционных материалов, из которых могут быть созданы теплозащитные покрытия, в том числе для применения в микропроцессорах, выполненных по нанометровой технологии.

Ключевые слова: квазикристалл, теплопроводность, градиентность, тепловая защита, конечноразностное моделирование, наноэлектроника

Введение. В настоящее время большой практический интерес вызывают бинарные периодические композиционные материалы — среды с искусственной периодической анизотропией, образованной регулярным чередованием двух слоев с различными физическими свойствами [1–7]. При этом, несмотря на хорошую изученность композитов со строго периодичной сверхструктурой свойства квазипериодических образцов практически не исследованы. Например, в доступной литературе отсутствуют сведения о влиянии степени апериодичности на теплопроводящие свойства почти-периодического материала даже в простейшем одномерном бинарном случае. Поэтому целью настоящей работы является изучение данной проблемы для двухсоставного (бинарного) композиционного материала, обладающего одномерной квазипериодической градиентной сверхструктурой с низкой и с высокой степенью градиентности.

Математическая постановка задачи. В данной работе рассмотрена одномерная двухкомпонентная квазипериодическая градиентная (с увеличени-

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2026 ISSN 2541-8009

ем или уменьшением «толщины» слоя) среда, образованная последовательным чередованием слоев с одинаковой и постоянной плотностью, постоянным коэффициентом теплоемкости c от слоя к слою, но с различными значениями коэффициента теплопроводности k, численное значение которого изменяется от слоя к слою, но постоянно внутри слоя (рис. 1). Все графики построены с помощью средств библиотеки matplotlib языка программирования Python.

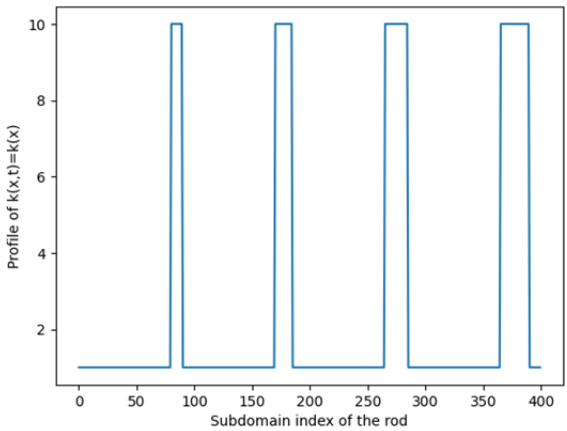


Рис. 1. Профиль коэффициента теплопроводности k в исследуемом материале (по оси абсцисс отложен индекс подобласти одномерного стержня, по оси ординат — коэффициент теплопроводности k)

Таким образом, исследуемая среда может быть описана моделью одномерного стержня со «ступенчатым» коэффициентом теплопроводности k, который характеризуется четырьмя параметрами: значением на «плато» ступеньки $k_{\max}$, значением у «подножия» $k_{\min}$, шириной «плато» $L_{\max}$ и шириной «промежутка» $L_{\min}$.

Математическая постановка сводится к начально-краевой задаче:

$$\begin{cases} c(x,t)\rho(x,t)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right), \ 0 < x < L, \ t > 0; \\ u(0,t) = \dfrac{T_1 - T_2}{2}\cos\omega t + \dfrac{T_1 + T_2}{2}; \\ u(L,t) = u(x,0) = T_1 = \text{const} \end{cases} \quad (1)$$

при профилях теплоемкости $c(x,t) = c = \text{const}$ и массовой плотности $\rho(x,t) = \rho = \text{const}$. Пример рассматриваемого профиля коэффициента теплопроводности $k = k(x,t) = k(x)$ представлен на рис. 1. Значения постоянных

$T_1 = 26,\ \ T_2 = 100$ выражены в относительных единицах (отн. ед.). Функция $u = u(x,t)$ описывает температуру стержня (в отн. ед.) в точке с координатой x в момент времени t. Значения остальных используемых в задаче постоянных и функций также выражены в относительных единицах.

Известно, что если функция $k(x)$ имеет «ступенчатый» вид, как в данном случае, то она не является дифференцируемой в классическом смысле. Существуют различные подходы, позволяющие решать задачу (1), но в данной работе был выбран способ численного решения. На основе задачи (1) была поставлена определенная на равномерных временной и пространственной сетках разностная задача, теоретические основы которой подробно описаны в [8–10] и схема которой является двухслойной и определенной на шеститочечном шаблоне, представленном на рис. 2:

$$\begin{cases} \overline{\omega}_{h\tau} = \left\{ (x_i = ih,\ t_j = j\tau),\ i = 0...N_x - 1,\ \ j = 0...N_t - 1 \right\}; \\ \dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \Lambda(u); \\ u(0,t_j) = \dfrac{T_1 - T_2}{2}\cos\omega t_j + \dfrac{T_1 + T_2}{2};\ u(L,t_j) = u(x_i,0) = T_1 = \text{const}, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\Lambda(u) = \sigma\left(\frac{1}{h}\left(\frac{a_{i+1}^{j+1}\left(u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}\right)}{h} - \frac{a_i^{j+1}\left(u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}\right)}{h}\right)\right) +$$

$$+ (1-\sigma)\left(\frac{1}{h}\left(\frac{a_{i+1}^{j}\left(u_{i+1}^{j} - u_i^{j}\right)}{h} - \frac{a_i^{j}\left(u_i^{j} - u_{i-1}^{j}\right)}{h}\right)\right);$$

при $a_i = a_i^{j+1} = a_i^j = \dfrac{2k_{i-1}k_i}{k_{i-1} + k_i},\ \ \sigma = \dfrac{1}{2},\ L = h(N_x - 1).$

При значении параметра $\sigma = 1/2$ данная схема является устойчивой (в описанной в [8] норме) и сходящейся, симметричной, что дает несколько преимуществ, например, данная схема имеет второй порядок аппроксимации и по h, и по τ.

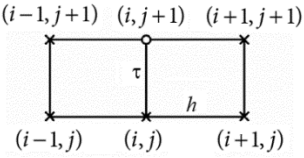


Рис. 2. Шаблон разностной схемы [8] в задаче (2)

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2026 ISSN 2541-8009

Далее была получена система линейных алгебраических уравнений, основная матрица которой имеет трехдиагональный вид. Ввиду сравнительно небольшого количества узлов сетки (число узлов пространственной сетки N_x = 600, а число узлов временной сетки N_t = 15 000) и быстрой работы программы при данном их количестве, а также устойчивости схемы решение x данной системы уравнений $Ax = b$ выражалось как $x = A^{-1}b$. Рассмотрим полученные в ходе моделирования результаты.

Результаты. В работе были исследованы различные варианты градиентности среды. Начнем с низкоградиентного случая, когда период участков с большей теплопроводностью увеличивается незначительно. На рис. 3 показано строение материала с данной структурой.

Тогда картина распространения теплового поля и распределения максимальной температуры внутри материала с течением времени в одномерной двухкомпонентной квазипериодической градиентной среде (решение разностной задачи (2)) с частотой теплового воздействия на левом конце $w = 500$ будет выглядеть как на рис. 4 и 5 соответственно. При движении вглубь материала (слева направо) «период» структуры незначительно возрастает по линейному закону. Параметры численного метода: $N_x = 600$, $N_t = 15\,000$, $h = 0{,}0001$, $\tau = 0{,}000001$.

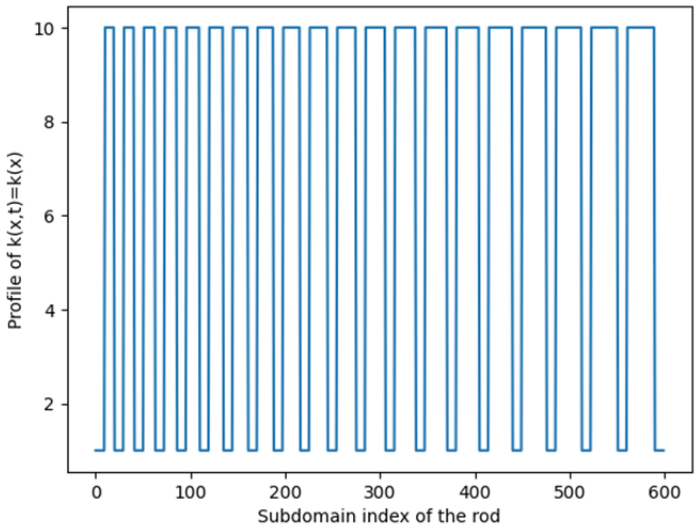


Рис. 3. Профиль теплопроводности в низкоградиентном образце (по оси абсцисс — индекс подобласти одномерного стержня, по оси ординат — коэффициент теплопроводности k)

 © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2026

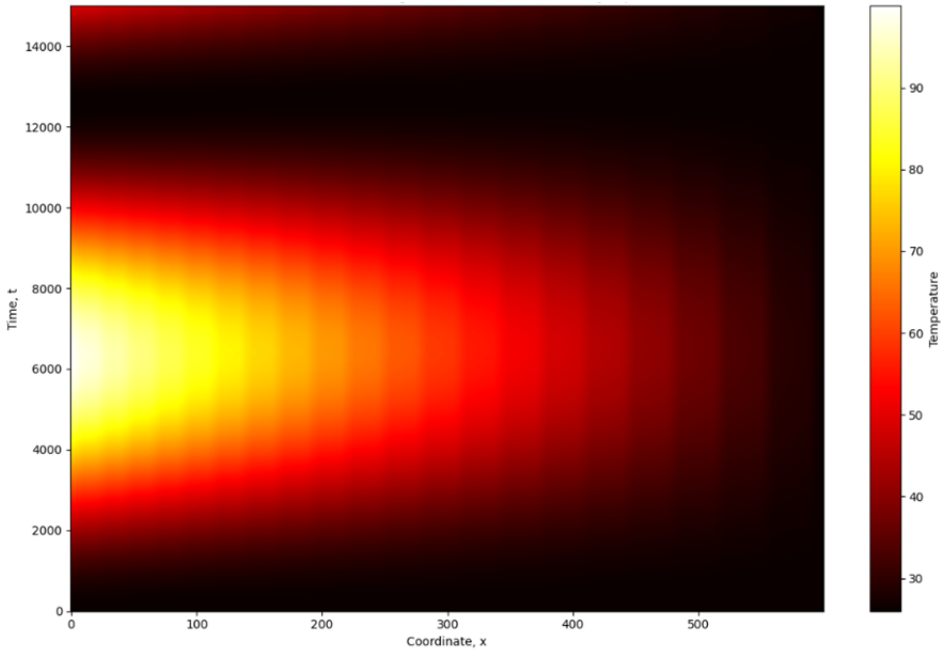


Рис. 4. Распространение теплового поля в низкоградиентном образце (по оси абсцисс — индекс подобласти одномерного стержня, по оси ординат — время, градиент цвета демонстрирует температуру)

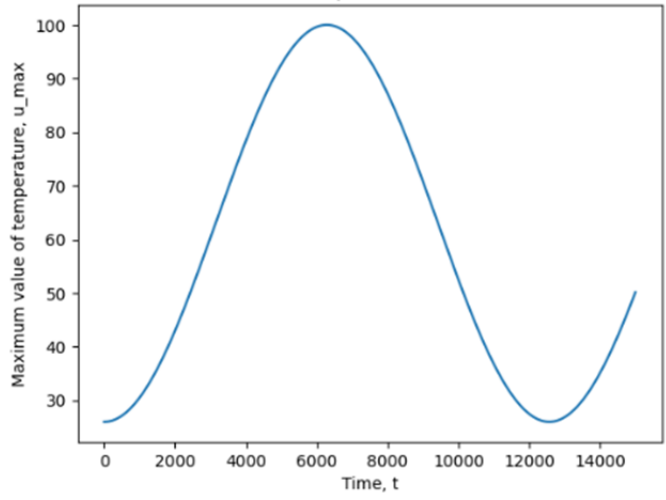


Рис. 5. Максимальная температура в низкоградиентном образце (по оси абсцисс — время, по оси ординат — максимальная температура)

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2026 ISSN 2541-8009

Ниже представлены эффективная глубина проникновения периодического теплового воздействия в материал, определяемая как точка, температура которой равна полусумме максимальной и минимальной температур в зависимости от частоты внешнего воздействия (рис. 6), и временной профиль эффективной глубины проникновения для случая гармонического воздействия на фиксированной частоте (рис. 7).

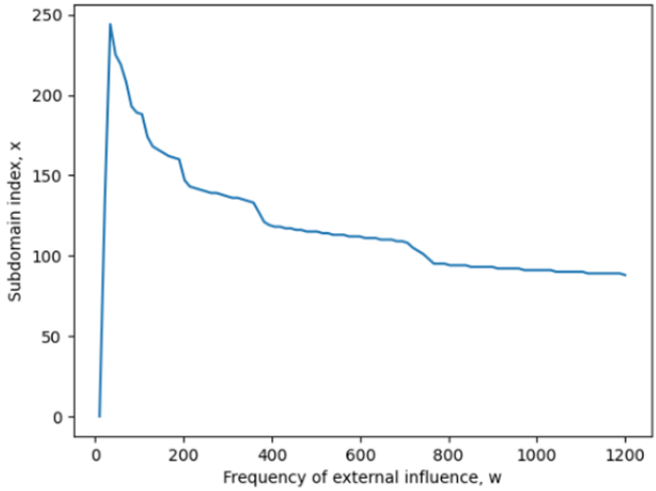


Рис. 6. Эффективная глубина проникновения гармонического теплового возмущения в низкоградиентный образец (по оси абсцисс — частота, по оси ординат — индекс подобласти стержня)

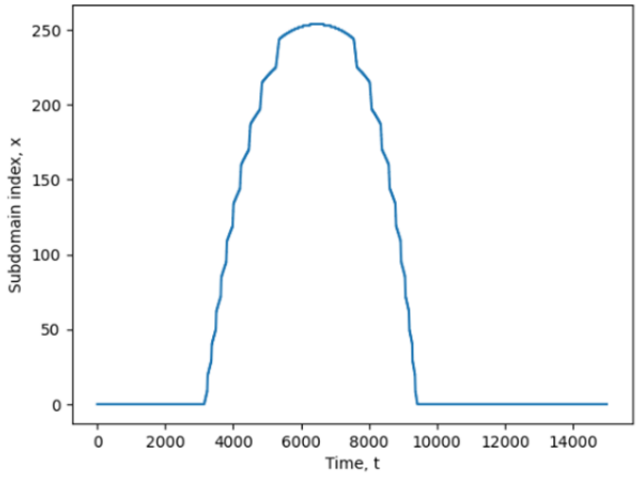


Рис. 7. Эффективная глубина проникновения гармонического теплового воздействия в низкоградиентный образец (расчет проведен для частоты внешнего воздействия $w = 500$; по оси абсцисс — время, по оси ординат — индекс подобласти стержня)

 © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2026

Далее рассмотрим высокоградиентный образец. На рис. 8 представлено строение материала с данной структурой.

Результаты моделирования теплового поля в материале с высокой степенью градиентности (на порядок большей, чем в первом случае) представлены на рис. 9; график максимальной температуры в образце изображен на рис. 10. Расчет проведен при следующих параметрах модели: $N_x = 600$, $N_t = 15\,000$, $h = 0{,}0001$, $\tau = 0{,}000001$.

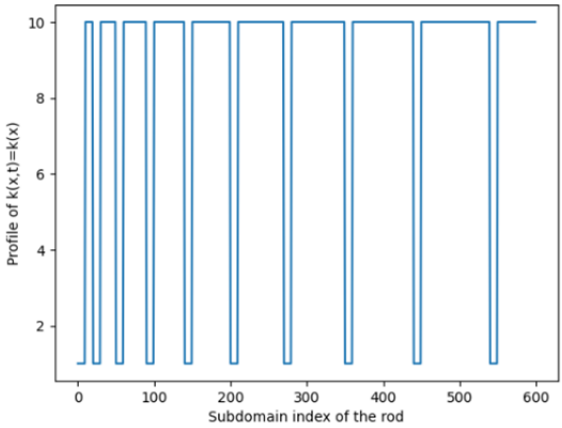


Рис. 8. Профиль теплопроводности в высокоградиентном образце (по оси абсцисс — индекс подобласти одномерного стержня, по оси ординат — коэффициент теплопроводности k)

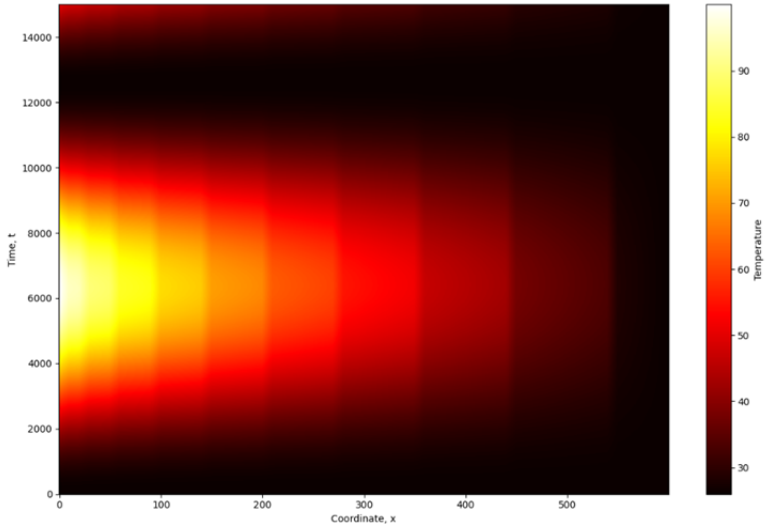


Рис. 9. Распространение теплового поля в высокоградиентном образце (по оси абсцисс — индекс подобласти одномерного стержня, по оси ординат — время, градиент цвета демонстрирует температуру)

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2026 ISSN 2541-8009

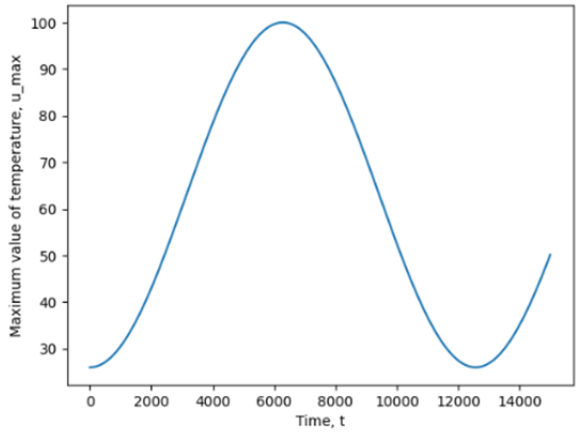


Рис. 10. Максимальная температура в высокоградиентном образце
(по оси абсцисс — время, по оси ординат — максимальная температура)

Частотная зависимость эффективной глубины проникновения теплового воздействия в высокоградиентный образец представлена на рис. 11; временная зависимость — на рис. 12.

Далее рассмотрим низкоградиентный образец, обладающий отрицательной градиентностью, т. е. случай, когда период участков с большей теплопроводностью уменьшается незначительно. На рис. 13 показано строение материала с данной структурой.

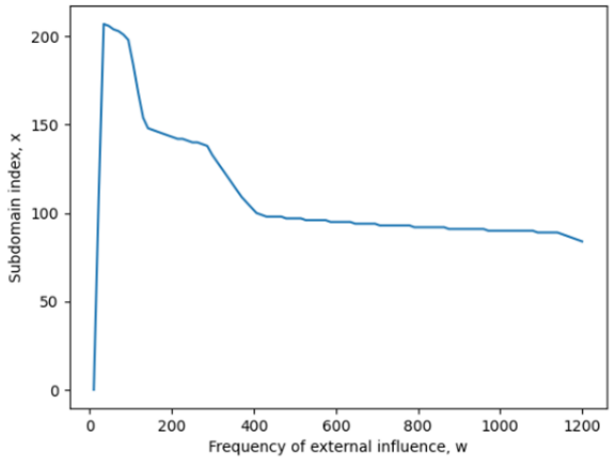


Рис. 11. Эффективная глубина проникновения гармонического
теплового возмущения в высокоградиентный образец
(по оси абсцисс — частота, по оси ординат — индекс подобласти стержня)

 © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2026

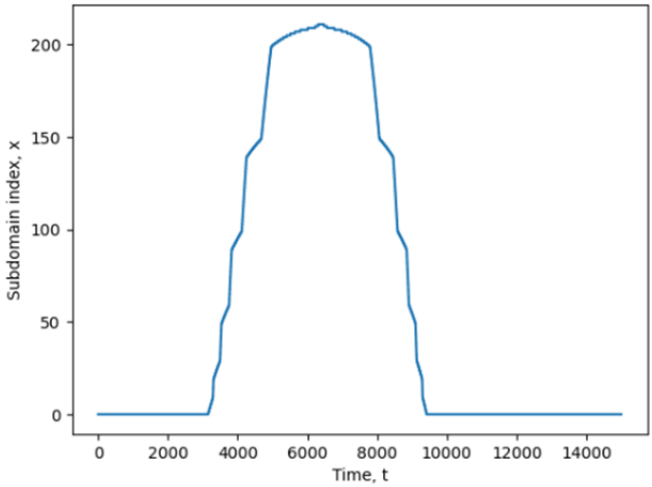


Рис. 12. Эффективная глубина проникновения периодического теплового возмущения на частоте $w = 500$ в высокоградиентный образец (по оси абсцисс — время, по оси ординат — индекс подобласти стержня)

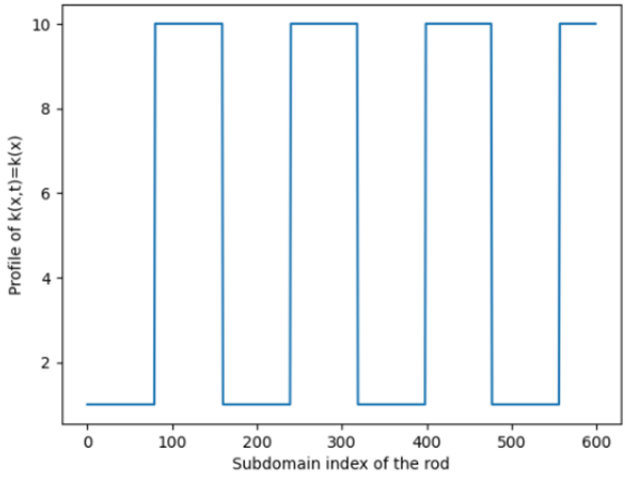


Рис. 13. Профиль коэффициента теплопроводности в низкоградиентном образце с отрицательной градиентностью (по оси абсцисс — индекс подобласти одномерного стержня, по оси ординат — коэффициент теплопроводности k)

На рис. 14 представлена кинетика теплового поля в низкоградиентном образце с отрицательной градиентностью; эффективная глубина проникновения гармонического теплового возмущения изображена на рис. 15. Вглубь материала «период» незначительно уменьшается по линейному закону. Параметры численного метода: $N_x = 600$, $N_t = 15\,000$, $h = 0{,}00001$, $\tau = 0{,}000001$.

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2026 ISSN 2541-8009

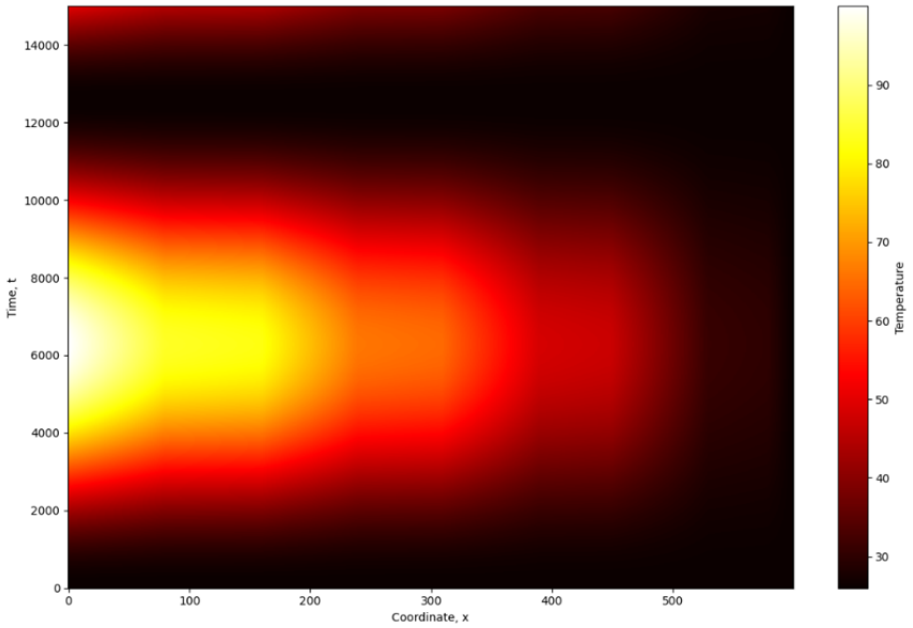


Рис. 14. Распространение теплового поля в низкоградиентном образце с отрицательной градиентностью (по оси абсцисс — индекс подобласти одномерного стержня, по оси ординат — время, градиент цвета демонстрирует температуру)

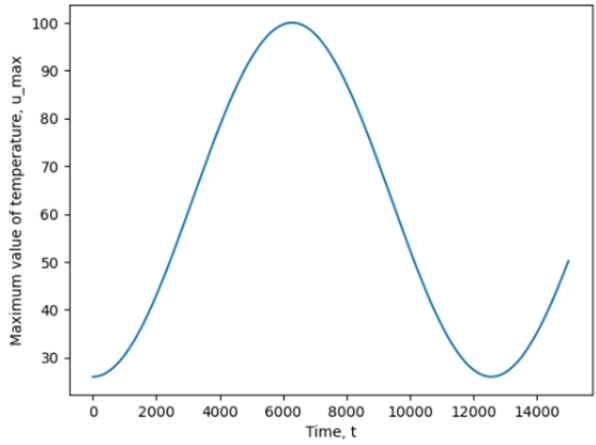


Рис. 15. Максимальная температура в низкоградиентном образце с отрицательной градиентностью (по оси абсцисс — время, по оси ординат — максимальная температура)

На рис. 16 и рис. 17 представлены частотная и временная (при $w = 500$) зависимости эффективной глубины проникновения периодического теплового возмущения при малом уменьшении периода соответственно.

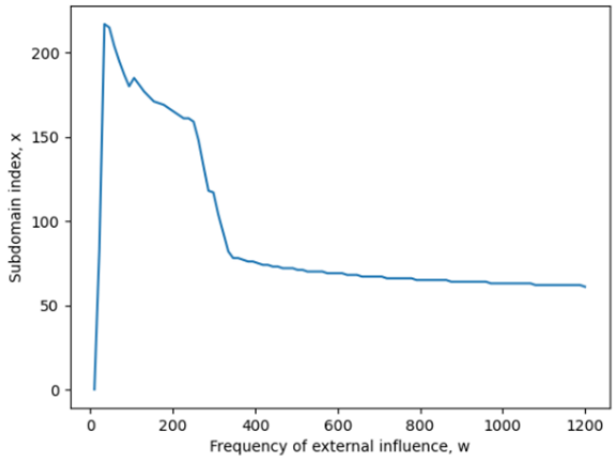


Рис. 16. Частотная зависимость эффективной глубины проникновения гармонического теплового воздействия в низкоградиентном образце с отрицательной градиентностью (по оси абсцисс — частота, по оси ординат — индекс подобласти стержня)

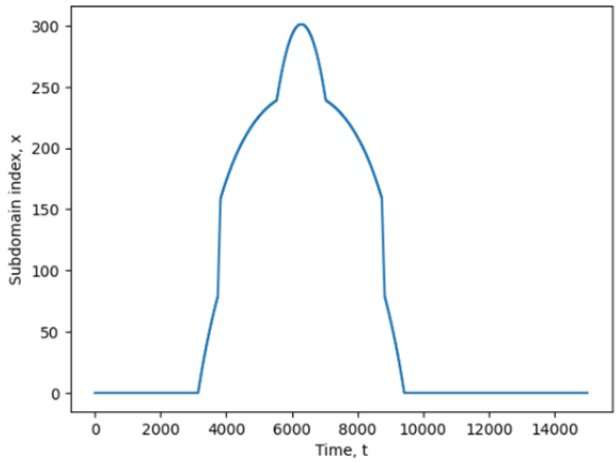


Рис. 17. Эффективная глубина проникновения периодического теплового воздействия ($w = 500$) в низкоградиентный образец с отрицательной градиентностью (по оси абсцисс — время, по оси ординат — индекс подобласти стержня)

Наконец, рассмотрим высокоградиентный материал с отрицательной градиентностью — рис. 18.

Распределение теплового поля в высокоградиентном образце с отрицательной градиентностью графически представлено на рис. 19; эффективная глубина проникновения гармонического теплового возмущения изображена на рис. 20.

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2026 ISSN 2541-8009

Вглубь образца «период» уменьшается на порядок быстрее, чем в низкоградиентном случае. Параметры численного метода: $N_x = 600$, $N_t = 15\,000$, $h = 0{,}00001$, $\tau = 0{,}000001$.

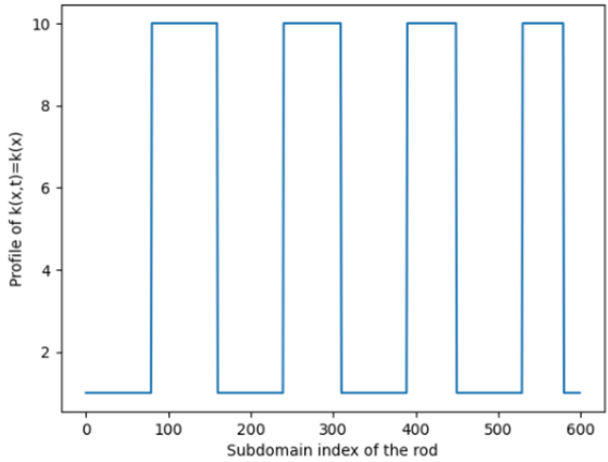


Рис. 18. Профиль коэффициента теплопроводности в высокоградиентном образце с отрицательной градиентностью (по оси абсцисс — индекс подобласти одномерного стержня, по оси ординат — коэффициент теплопроводности *k*)

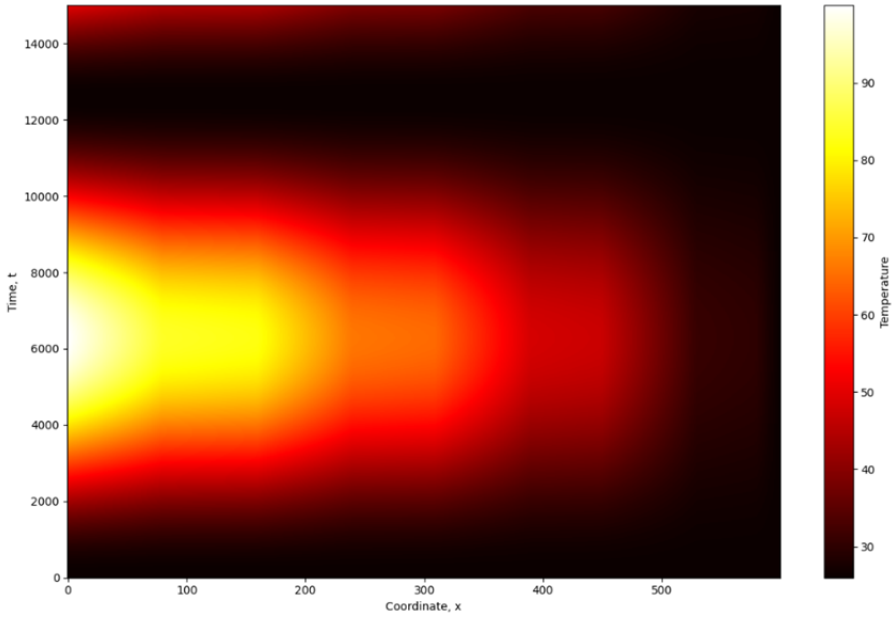


Рис. 19. Кинетика температурного поля в высокоградиентном образце с отрицательной градиентностью (по оси абсцисс — индекс подобласти одномерного стержня, по оси ординат — время, градиент цвета демонстрирует температуру)

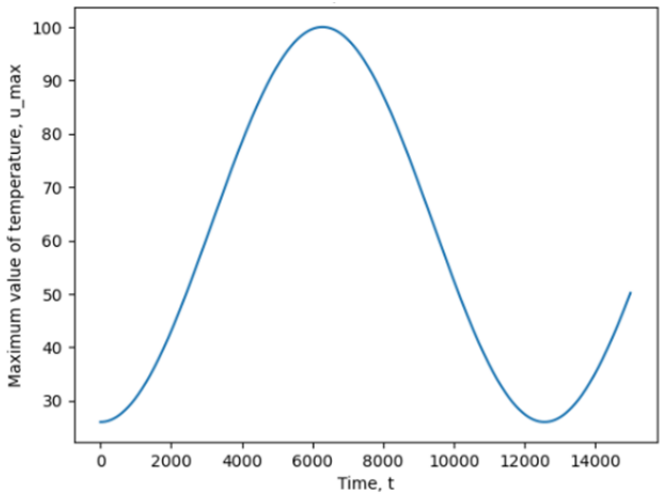


Рис. 20. Максимальная температура в высокоградиентном образце с отрицательной градиентностью (по оси абсцисс — время, по оси ординат — максимальная температура)

На рис. 21 и 22 представлены частотная и временная зависимости эффективной глубины проникновения в высокоградиентный образец с отрицательной градиентностью.

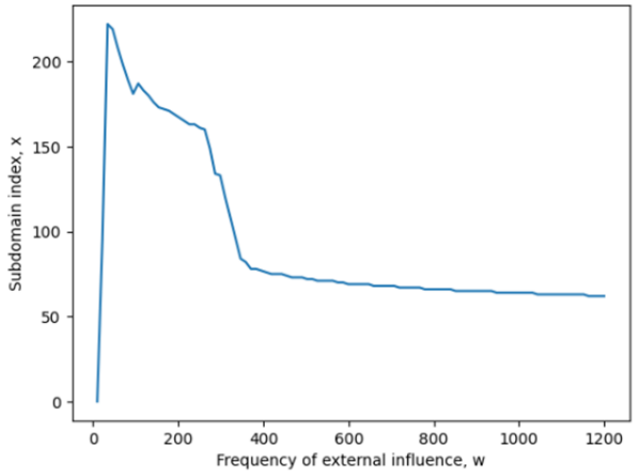


Рис. 21. Эффективная глубина проникновения гармонического теплового возмущения в высокоградиентный образец с отрицательной градиентностью (по оси абсцисс — частота, по оси ординат — индекс подобласти стержня)

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2026 ISSN 2541-8009

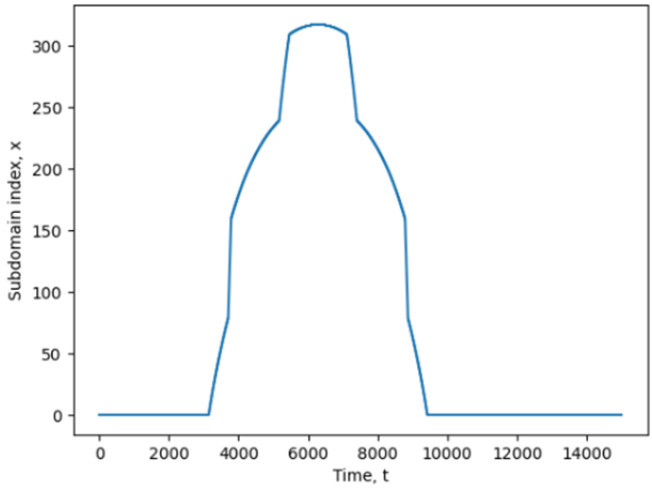


Рис. 22. Эффективная глубина проникновения гармонического теплового возмущения в высокоградиентный образец с отрицательной градиентностью для выбранной частоты внешнего воздействия $w = 500$ (по оси абсцисс — время, по оси ординат — индекс подобласти стержня)

Выводы. Результаты проделанной работы показывают, что градиентность образца не сказывается на максимальном значении температуры, но прямо влияет на эффективную глубину проникновения теплового возмущения. Особенный интерес вызывает изменение формы частотной зависимости эффективной глубины проникновения теплового воздействия. Так, для образцов с отрицательной градиентностью кривая приобретает характерный «резонансный» вид (график сужается и формируется резкий пик), что представляет интерес для управления тепловыми потоками, особенно в микропроцессорах, выполненных по нанометровой технологии. В этом случае введение в подложку сегнетоэлектрических слоев, исполненных по градиентной планарной технологии, позволит создать обратную связь по тепловой петле, обеспечив принципиально новые возможности для построения интегральной схемы.

Литература

[1] Barvestani J. Topological interface state-based photonic crystal sensor with porous cap layer for high-performance biosensing. *Scientific Reports*, 2025, vol. 15, art. no. 43675. https://doi.org/10.1038/s41598-025-27526-4

[2] Lu Y., Peng S., Luo D. et al. Low-concentration mechanical biosensor based on a photonic crystal nanowire array. *Nature Communications*, 2011, vol. 2, art. no. 578. https://doi.org/10.1038/ncomms1587

 © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2026

[3] Niu Q., Yan B., Shen L. et al. Realization of a Dirac-vortex topological photonic crystal fiber. *Nature Communications*, 2025, vol. 16, art. no. 11051. https://doi.org/10.1038/s41467-025-65222-z

[4] Huang T.-C., Zhou X., Ren C., Zhan P., Ma Y.-Q. Self-Assembled Binary Photonic Crystals under the Active Confinement and Their Light Trapping. *Langmuir*, 2020, vol. 36, no. 15, pp. 4224–4230. https://doi.org/10.1021/acs.langmuir.9b03945

[5] Halder A., Anower M.S. Design and numerical analysis of a modified core hexa–deca photonic crystal fiber for highly negative dispersion and birefringence control in optical communication bands. *Scientific Reports*, 2024, vol. 14, art. no. 29075. https://doi.org/10.1038/s41598-024-80539-3

[6] Kakimi R., Fujita M., Nagai M. et al. Capture of a terahertz wave in a photonic-crystal slab. *Nature Photonics*, 2014, vol. 8, pp. 657–663. https://doi.org/10.1038/nphoton.2014.150

[7] Maher M.A., Aly A.H., Esmail M.S. et al. Maximizing temperature sensitivity in a one-dimensional photonic crystal thermal sensor. *Scientific Reports*, 2025, vol. 15, art. no. 4105. https://doi.org/10.1038/s41598-024-82889-4

[8] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. Москва, Изд-во МГУ, 1999, 798 с.

[9] Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем*. Москва, Наука, 1971, 552 с.

[10] Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва, Наука, 1989, 616 с.

Поступила в редакцию 15.03.2026

Ершов Глеб Андреевич — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Кочикина Лада Вячеславовна — студентка кафедры «Вычислительная математика и математическая физика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — В.В. Филатов, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Ершов Г.А., Кочикина Л.В. Моделирование распространения температурного поля в одномерной квазипериодической градиентной среде. *Политехнический молодежный журнал*, 2026, № 5 (106). URL: https://ptsj.bmstu.ru/catalog/math/compmath/1136.html

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2026 ISSN 2541-8009

MODELING THE PROPAGATION OF A TEMPERATURE FIELD IN A ONE-DIMENSIONAL QUASI-PERIODIC GRADIENT MATERIAL

G.A. Ershov ershovga@student.bmstu.ru
SPIN-code: 8709-4660

L.V. Kochikina kochikinalv@student.bmstu.ru
SPIN-code: 7202-2039

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

In this paper was studied a one-dimensional quasi-periodic gradient binary material with a period that varies linearly (increases or decreases) from the surface to the depth. Finite-difference modeling of the propagation of a periodic thermal perturbation into the material was performed for samples with low and high gradients, and the frequency and time dependences of the effective penetration depth of the external harmonic forcing were obtained. The results can be used to create new, more efficient heat-distributing composite materials for thermal barrier coatings, including for use in microprocessors manufactured using nanometer technology.

Keywords: quasicrystal, thermal conduction, gradient, thermal protection, finite-difference modeling, nanoelectronics

References

[1] Barvestani J. Topological interface state-based photonic crystal sensor with porous cap layer for high-performance biosensing. *Scientific Reports*, 2025, vol. 15, art. no. 43675. https://doi.org/10.1038/s41598-025-27526-4

[2] Lu Y., Peng S., Luo D. et al. Low-concentration mechanical biosensor based on a photonic crystal nanowire array. *Nature Communications*, 2011, vol. 2, art. no. 578. https://doi.org/10.1038/ncomms1587

[3] Niu Q., Yan B., Shen L. et al. Realization of a Dirac-vortex topological photonic crystal fiber. *Nature Communications*, 2025, vol. 16, art. no. 11051. https://doi.org/10.1038/s41467-025-65222-z

[4] Huang T.-C., Zhou X., Ren C., Zhan P., Ma Y.-Q. Self-Assembled Binary Photonic Crystals under the Active Confinement and Their Light Trapping. *Langmuir*, 2020, vol. 36, no. 15, pp. 4224–4230. https://doi.org/10.1021/acs.langmuir.9b03945

[5] Halder A., Anower M.S. Design and numerical analysis of a modified core hexa–deca photonic crystal fiber for highly negative dispersion and birefringence control in optical communication bands. *Scientific Reports*, 2024, vol. 14, art. no. 29075. https://doi.org/10.1038/s41598-024-80539-3

[6] Kakimi R., Fujita M., Nagai M. et al. Capture of a terahertz wave in a photonic-crystal slab. *Nature Photonics*, 2014, vol. 8, pp. 657–663. https://doi.org/10.1038/nphoton.2014.150

 © BMSTU, 2026

[7] Maher M.A., Aly A.H., Esmail M.S. et al. Maximizing temperature sensitivity in a one-dimensional photonic crystal thermal sensor. *Scientific Reports*, 2025, vol. 15, art. no. 4105. https://doi.org/10.1038/s41598-024-82889-4

[8] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, MGU Publ., 1999, 798 p. (In Russ.).

[9] Samarskiy A.A. *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 552 p. (In Russ.).

[10] Samarskiy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 616 p. (In Russ.).

Received 15.03.2026

Ershov G.A. — Student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Kochikina L.V. — Student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Filatov V.V., Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:
Ershov G.A., Kochikina L.V. Modeling the propagation of a temperature field in a one-dimensional quasi-periodic gradient material. *Politekhnicheskiy molodezhnyy zhurnal*, 2026, no. 5 (106). (In Russ.). URL: https://ptsj.bmstu.ru/catalog/math/compmath/1136.html

© BMSTU, 2026 ISSN 2541-8009