

МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СЛОИСТОЙ БАЛКИ ПРИ ИЗГИБЕ

А.Н. Русланцев^{1,2}Ю.Ю. Феста¹

Festa.y.yura@gmail.com

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация²ИМАШ РАН, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Предложена аналитическая модель определения напряженно-деформированного состояния элемента механизации крыла, представляющего собой криволинейный композитный брус. Данная модель учитывает изменение окружного модуля упругости по толщине бруса. Для проверки корректности представленной модели методом конечных элементов выполнено численное моделирование напряженно-деформированного состояния бруса и подтверждена корректность предложенной аналитической модели. Даны рекомендации, направленные на повышение несущей способности конструкции.

Ключевые слова

Композит, углепластик, изгиб криволинейной слоистой балки, напряженно-деформированное состояние

Поступила в редакцию 14.05.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Использование композитов в силовых элементах конструкций позволяет улучшить эксплуатационные характеристики и достичь весового совершенства конструкций летательных аппаратов. Углепластики обладают рядом уникальных физико-механических свойств, однако слабая межслоевая прочность не позволяет использовать их в полной мере.

Расчеты на прочность и долговечность слоистых балок и пластин проводят, как правило, на основании соотношений теории упругости анизотропных тел [1, 2].

При исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) и прочности криволинейных балок используют соотношения, предложенные Лехницким [1, 2]. В частности, аналитические формулы для расчета радиальных и окружных напряжений в криволинейной анизотропной балке, представленные на рис. 1, имеют следующий вид:

$$\sigma_r = -\frac{M}{b^2hg} \left[1 - \frac{1-c^{k+1}}{1-c^{2k}} \left(\frac{r}{b}\right)^{k-1} - \frac{1-c^{k-1}}{1-c^{2k}} c^{k+1} \left(\frac{r}{b}\right)^{k+1} \right];$$

$$\sigma_\theta = -\frac{M}{b^2hg} \left[1 - \frac{1-c^{k+1}}{1-c^{2k}} k \left(\frac{r}{b}\right)^{k-1} + \frac{1-c^{k-1}}{1-c^{2k}} kc^{k+1} \left(\frac{r}{b}\right)^{k+1} \right];$$

$$\tau_{r\theta} = 0,$$

$$\text{где } c = \frac{a}{b}; k = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}}; g = \frac{1-c^2}{2} - \frac{k}{k+1} \frac{(1-c^{k+1})^2}{1-c^{2k}} + \frac{kc^2}{k-1} \frac{(1-c^{k-1})^2}{1-c^{2k}}.$$

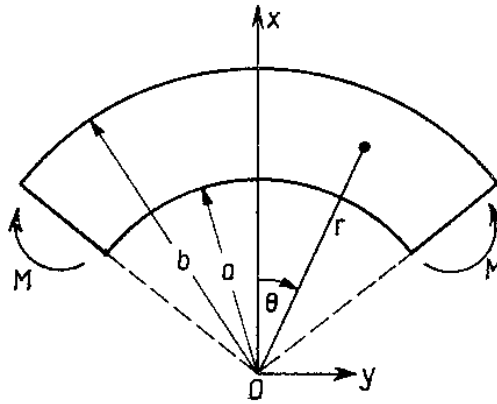


Рис. 1. Схема нагружения:

M — изгибающий момент; r — радиус кривизны

Следует отметить, что соотношения радиальных и тангенциальных напряжений слабо зависят от отношения модулей упругости, характеризуемых параметром k . В таблице 1 приведены результаты расчетов, полученные с помощью соотношений Лехницкого для материалов с различным отношением модулей упругости, значение тангенциального модуля принималось равным $E_\theta = 50$ ГПа.

Таблица 1

Значения радиальных и тангенциальных напряжений по формуле Лехницкого

$k^2 = E_\theta / E_r$	100		10		1,1		0,1		0,01	
r	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ
8,00	0,00	86,51	0,00	81,54	0,00	81,03	0,00	80,98	0,00	80,97
8,20	1,80	62,22	1,75	62,55	1,75	62,58	1,75	62,59	1,75	62,59
8,40	3,00	42,61	2,99	44,82	2,99	45,05	2,99	45,08	2,99	45,08
8,60	3,72	26,14	3,77	28,15	3,77	28,36	3,77	28,38	3,77	28,38
8,80	4,07	11,61	4,14	12,36	4,15	12,44	4,15	12,45	4,15	12,45
9,00	4,08	-1,88	4,15	-2,68	4,16	-2,77	4,16	-2,78	4,16	-2,78
9,20	3,81	-15,07	3,85	-17,10	3,85	-17,32	3,85	-17,34	3,85	-17,34
9,40	3,27	-28,57	3,25	-31,00	3,25	-31,26	3,25	-31,29	3,25	-31,29
9,60	2,45	-42,92	2,40	-44,47	2,39	-44,63	2,39	-44,65	2,39	-44,65
9,80	1,37	-58,61	1,31	-57,60	1,30	-57,49	1,30	-57,47	1,30	-57,47
10,00	0,00	-76,13	0,00	-70,44	0,00	-69,85	0,00	-69,78	0,00	-69,78

Также следует отметить, что величины разрушающих нагрузок практически не зависят от схемы армирования слоев, что подтверждают данные табл. 2.

Для широкого спектра геометрических параметров и материалов можно применять упрощенную формулу:

$$\sigma_{r\max} = \frac{3M}{2hg\sqrt{ab}}.$$

Разрушающие нагрузки при четырехточечном изгибе L-образного образца из композита T700GC/M21 с различными толщинами и схемами укладки слоев

Толщина, мм	Разрушающая нагрузка, Н			
	[0 ₈] _{ns}	[0] ₃ /45/90 ₂ /135/0] _{ns}	[(45/90/135/0) ₂] _{ns}	[45 ₂ /0/135 ₃ /90/45] _{ns}
12,58	10972	10944	11000	10904
8,38	3349	3902	3255	3645
4,19	488	498	456	437

Расчетная схема. Рассмотрим случай деформирования изотропной по толщине криволинейной балки под действием изгибающего момента. Расчетная схема для такого случая представлена на рис. 2. При деформировании, поскольку изделие симметрично, происходит уменьшение угла Θ и увеличение кривизны балки. При этом вводится допущение, что балка не деформируется по толщине, следовательно, для всех слоев приращение радиуса кривизны составит dr .

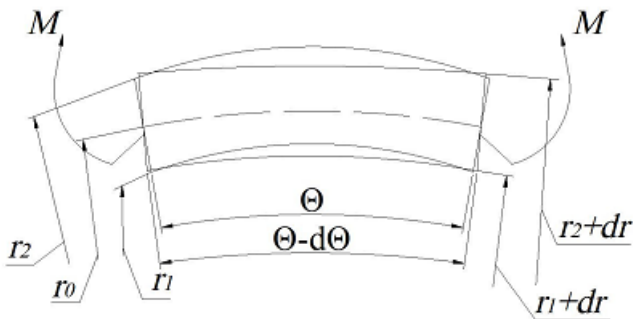


Рис. 2. Расчетная схема деформирования:

M — изгибающий момент; r_0 — нейтральная линия; r_2 — внешний радиус

Положение нейтральной линии r_0 определяется из условия неизменности ее длины:

$$r_0 \Theta = (r_0 + dr_0)(\Theta - d\Theta);$$

$$dr_0 \Theta - r_0 d\Theta - dr_0 d\Theta = 0.$$

Пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка имеем

$$\frac{r_0}{dr_0} = \frac{\Theta}{d\Theta}.$$

Далее определим длину произвольного слоя с координатой $r = r_0 + y$ до деформирования:

$$l_0 = (r_0 + y)\Theta.$$

Затем, после деформирования с учетом принятого допущения

$$l_1 = (r_0 + dr_0 + y)(\Theta - d\Theta).$$

Окружные деформации при этом рассчитаем следующим образом:

$$\varepsilon_c = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{y}{r_0 + y} \frac{d\Theta}{\Theta};$$

$$\varepsilon_c(r) = \frac{r - r_0}{r} \frac{d\Theta}{\Theta} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \frac{d\Theta}{\Theta}.$$

Величину окружных напряжений определим согласно закону Гука:

$$\sigma_c(r) = E\varepsilon_c(r).$$

Поскольку на балку действует только изгибающий момент, то

$$\int_r \sigma_c dr = 0;$$

$$\int_{r_1}^{r_2} E\varepsilon_c dr = E \frac{d\Theta}{\Theta} \int_{r_1}^{r_2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dr = 0.$$

После интегрирования получаем соотношение для нейтральной линии:

$$(r_2 - r_1) - r_0(\ln r_2 - \ln r_1) = 0;$$

$$r_0 = \frac{r_2 - r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Изгибающий момент связан с окружными напряжениями следующим образом:

$$M = \int_r \sigma_c r dr = E \frac{d\Theta}{\Theta} \int_{r_1}^{r_2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) r dr = E \frac{d\Theta}{\Theta} \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - r_0(r_2 - r_1) \right];$$

$$E \frac{d\Theta}{\Theta} = \frac{M}{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - r_0(r_2 - r_1)}.$$

Направление изгибающего момента представлено на рис. 3.

Далее рассмотрим равновесное положение элемента балки относительно вертикальной оси (рис. 4).



Рис. 3. Действие изгибающего момента, при котором возникают напряжения в элементе

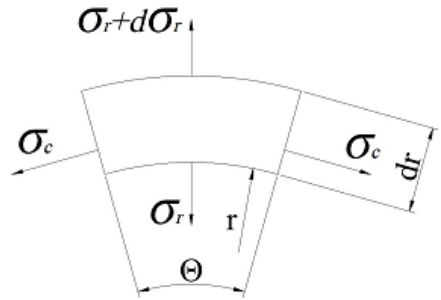


Рис. 4. Балка в состоянии равновесия: r — радиус кривизны; dr — приращение радиуса кривизны

Вертикальная составляющая от окружных напряжений равна $-2\sigma_c dr \sin \frac{\Theta}{2}$.

Вертикальная составляющая от σ_r равна $-2 \int_0^{\frac{\Theta}{2}} \sigma_r \cos \alpha r d\alpha = -2\sigma_r r \sin \frac{\Theta}{2}$, а от

$$\sigma_r + d\sigma_r - 2 \int_0^{\frac{\Theta}{2}} (\sigma_r + d\sigma_r) \cos \alpha (r + dr) d\alpha = 2(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) \sin \frac{\Theta}{2}.$$

Суммируем эти составляющие и получим

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) - r\sigma_r - \sigma_c dr = 0.$$

Упростим выражение и избавимся от бесконечно малых более высокого порядка, после чего получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\sigma_r}{r} + \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_c}{r}.$$

Решим это уравнение и запишем

$$\sigma_r = \frac{A(r)}{r}.$$

Функцию $A(r)$ можно найти, исходя из граничных условий $\sigma_r(r_1) = \sigma_r(r_2) = 0$, поскольку верхняя и нижняя поверхности балки свободны от силовых факторов, получим $A(r) = E \frac{d\Theta}{\Theta} (r - r_0 \ln r - r_1 + r_0 \ln r_1)$. Таким образом, окончательно для окружных и радиальных напряжений имеем следующие зависимости:

$$\sigma_c = \frac{M}{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - \frac{(r_2 - r_1)^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}} \left(1 - \frac{r_2 - r_1}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \right);$$

$$\sigma_r = \frac{M}{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - \frac{(r_2 - r_1)^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}} \frac{(r - r_1)}{r};$$

$$\frac{d\Theta}{\Theta} = \frac{M}{E} \frac{1}{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - \frac{(r_2 - r_1)^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}.$$

Применим этот подход для балки с переменным по толщине модулем. Пусть $E = E(r)$, а распределение окружных деформаций по толщине материала имеет тот же вид, тогда окружные напряжения

$$\sigma_c(r) = E(r)\varepsilon_c(r).$$

Положение нейтральной линии определим как

$$\int_r \sigma_c dr = 0;$$

$$\int_{r_1}^{r_2} E(r)\varepsilon_c dr = \frac{d\Theta}{\Theta} \int_{r_1}^{r_2} E(r) \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) dr = 0;$$

$$r_0 = \frac{\int_{r_1}^{r_2} E(r) dr}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{E(r)}{r} dr}.$$

Изгибающий момент связан с окружными напряжениями следующим образом:

$$M = \int_r \sigma_c r dr = \frac{d\Theta}{\Theta} \int_{r_1}^{r_2} E \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) r dr = \frac{d\Theta}{\Theta} \left(\int_{r_1}^{r_2} E r dr - r_0 \int_{r_1}^{r_2} E dr \right),$$

отсюда

$$\frac{d\Theta}{\Theta} = \frac{M}{\int_{r_1}^{r_2} E r dr - r_0 \int_{r_1}^{r_2} E dr}.$$

Распределение радиальных напряжений находим тем же способом и получаем

$$\sigma_r = \frac{d\Theta}{\Theta} \frac{\int_{r_1}^r E(r)dr - r_0 \int_{r_1}^r \frac{E(r)}{r} dr}{r} .$$

Распределение окружных напряжений, соответственно, имеет вид:

$$\sigma_c = \frac{d\Theta}{\Theta} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) E(r) .$$

На рисунках 5 и 6 показаны распределения окружных и радиальных напряжений, вычисленных аналитическим методом (линия), методом конечных элементов (круглые маркеры) и с помощью формул Лехницкого (квадратные маркеры) для изотропной балки. При этом $r_1 = 8$ мм; $r_2 = 10$ мм; $E = 50$ ГПа; $M = -50$ Нм.

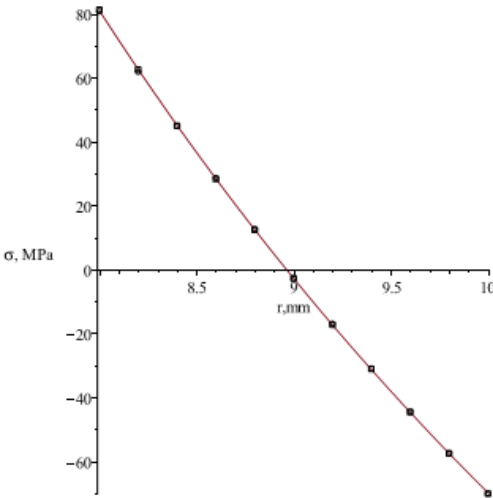


Рис. 5. Распределение окружных напряжений по толщине изотропной балки

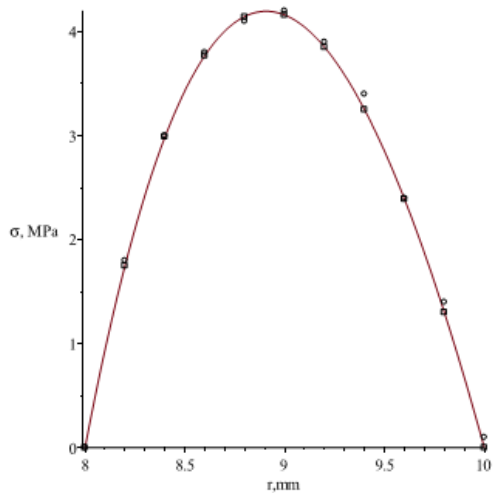


Рис. 6. Кривая радиальных напряжений в зависимости от толщины изотропной балки

На рисунках 7–9 представлены распределения окружных и радиальных напряжений, вычисленных аналитическим методом (линия) и методом конечных элементов (маркеры) для слоистой балки. При этом $r_1 = 8$ мм; $r_2 = 10$ мм; $M = -50$ Нм.

Выводы. Получены соотношения для расчета радиальных и окружных напряжений криволинейной балки, позволяющие учитывать влияние геометрии балки, изгибающего момента и модуля упругости.

С помощью полученных соотношений проведены расчеты напряжений для однородных по толщине и слоистых балок с различной геометрией. Установле-

но, что в общем случае нейтральная линия балки не совпадает с ее геометрической серединой, а максимум радиальных напряжений не располагается на нейтральной линии.

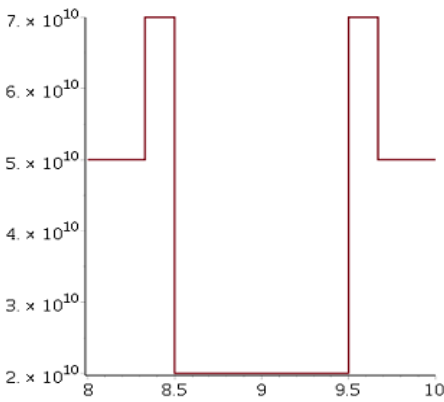


Рис. 7. Распределение окружного модуля упругости по толщине слоистой балки

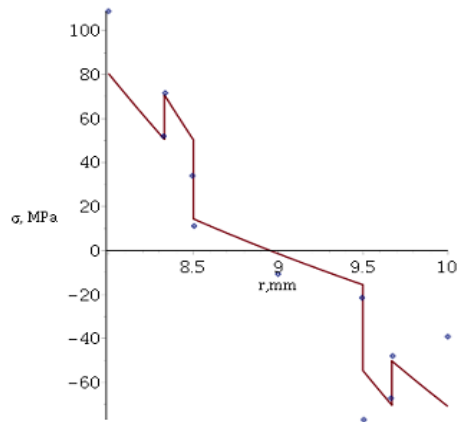


Рис. 8. Распределение окружных напряжений по толщине слоистой балки

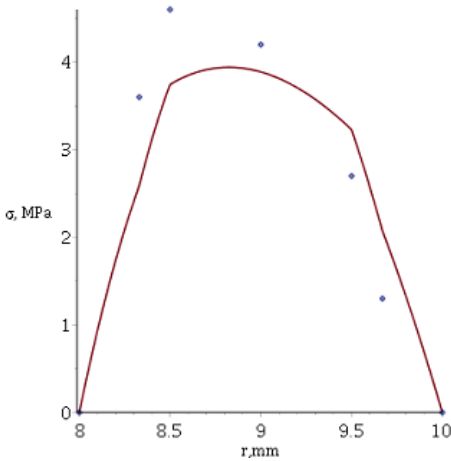


Рис. 9. Кривая радиальных напряжений в зависимости от толщины слоистой балки

Показано, что максимальные радиальные напряжения определяются геометрическими параметрами балки. Для увеличения предельных нагрузок необходимо увеличивать радиус кривизны балки, либо увеличивать прочностные характеристики материала в радиальном направлении.

Поверочный расчет, выполненный методом конечных элементов для однородной по толщине балки, показал достаточное, а для слоистой балки удовлетворительное согласие с расчетом, выполненным по предложенным соотношениям.

Литература

- [1] Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропных тел*. Москва, Наука, 1977. 416 с.
- [2] Лехницкий С.Г. *Анизотропные пластинки*. Москва–Ленинград, ОГИЗ Гостехиздат, 1947. 355 с.
- [3] Charrier J.S., Laurin F., Carrere N., Mahdi S. Determination of the out-of-plane tensile strength using four-point bending tests on laminated L-angle specimens with different stacking sequences and total thicknesses. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2016, vol. 81, pp. 243–253.

- [4] Cui W., Liu T., Len J., Ruo R. Interlaminar tensile strength (ILTS) measurement of woven glass/polyester laminates using four-point curved beam specimen. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1996, vol. 27, no. 11, pp. 1097–1105.
- [5] Olsson R. A survey of test methods for multiaxial and out-of plane strength of composite laminates. *Composites Science and Technology*, 2011, vol. 71, no. 6, pp. 773–783.

Русланцев Андрей Николаевич — ассистент, аспирант кафедры «Ракетно-космические композитные конструкции», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация; младший научный сотрудник, Институт машиноведения имени А.А. Благонравова РАН, Москва, Российская Федерация.

Феста Юрий Юрьевич — студент кафедры «Ракетно-космические композитные конструкции», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научные руководители — А.М. Думанский, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Ракетно-космические композитные конструкции», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация; М.А. Алимов, старший научный сотрудник, Институт машиноведения имени А.А. Благонравова РАН, Москва, Российская Федерация.

MODEL OF STRAIN-STRESS STATE OF CURVILINEAR LAMINATED BEAM UNDER BENDING

A.N. Ruslantsev^{1,2}

Yu.Yu. Festa¹

Festa-y-yura@gmail.com

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

²Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (IMASH RAN), Moscow, Russian Federation

Abstract

The study proposes an analytical model for determining the strain-stress state of the wing mechanization element, which is a curvilinear composite beam. The model takes into account the variation of the circumferential modulus of elasticity along the thickness of the beam. To verify the correctness of the presented model by the finite element method, we performed numerical simulation of the strain-stress state of the bar and confirmed the correctness of the proposed analytical model. Finally we give recommendations for increasing the bearing capacity of the structure.

Keywords

Composite, carbon fiber, curvilinear laminated beam bending, strain-stress state

© Bauman Moscow State Technical University, 2017

References

- [1] Lekhnitskiy S.G. Teoriya uprugosti anizotropnykh tel [Elasticity theory of anisotropic bodies]. Moscow, Nauka publ., 1977. 416 p.
- [2] Lekhnitskiy S.G. Anizotropnye plastinki [Anisotropic wafers]. Moscow–Leningrad, OGIZ Gostekhizdat publ., 1947. 355 p.
- [3] Charrier J.S., Laurin F., Carrere N., Mahdi S. Determination of the out-of-plane tensile strength using four-point bending tests on laminated L-angle specimens with different stacking sequences and total thicknesses. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2016, vol. 81, pp. 243–253.
- [4] Cui W., Liu T., Len J., Ruo R. Interlaminar tensile strength (ILTS) measurement of woven glass/polyester laminates using four-point curved beam specimen. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1996, vol. 27, no. 11, pp. 1097–1105.
- [5] Olsson R. A survey of test methods for multiaxial and out-of plane strength of composite laminates. *Composites Science and Technology*, 2011, vol. 71, no. 6, pp. 773–783.

Ruslantsev A.N. — assistant, post-graduate student, Department of Rocket and Space Composite Structures, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation; Junior Research Scientist, Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (IMASH RAN), Moscow, Russian Federation.

Festa Yu.Yu. — student, Department of Rocket and Space Composite Structures, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisors — A.M. Dumanskiy, Dr. (Phys.-Math.), Professor, Department of Rocket and Space Composite Structures, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation; M.A. Alimov, Senior Research Scientist, Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (IMASH RAN), Moscow, Russian Federation.