УДК 37.016:51 DOI: 10.18698/2541-8009-2017-8-147

О СВЯЗИ РАДИУСОВ И КРИВИЗН СОПРИКАСАЮЩИХСЯ СФЕР

Э.В. Белкина belkinaeav@student.bmstu.ru
Н.С. Лесных lesnyykhns@student.bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Приведено доказательство формулы, определяющей связь радиусов соприкасающихся сфер, а также обобщение взаимосвязи кривизн соприкасающихся сфер. Доказательство основано на простейших свойствах теории определителей. Для определения связи кривизн соприкасающихся сфер проведена инверсия расположения сфер. Зная известные соотношения для одной сферы, получили вспомогательное соотношение, выражающее сумму квадратов скалярных произведений вектора, проведенного из центра системы в произвольную точку на векторы, проведенные из центра системы в вершины симплекса. Представлено доказательство справедливости обобщения формулы для связи кривизн сфер.

Ключевые слова

Определитель, плоскость, касающиеся окружности, сферы, кривизна, формула Содди, радиус, евклидово пространство

Поступила в редакцию 22.05.2017
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

В прикладных геометрических задачах часто возникают вопросы о существовании связи между радиусами радиусов соприкасающихся сфер с обобщением взаимосвязи их кривизн. Так, например, в случае четырех попарно касающихся окружностей, возможны два случая их взаимного расположения:

– все окружности попарно касаются друг друга внешним образом;

– три окружности касаются друг друга внешним образом, а четвертая, касающаяся их, содержит эти три внутри себя.

Первый случай представлен окружностями *A*, *B*, *C* и *O*, а второй — окружностями *A*, *B*, *C* и *D*) (рис. 1). Оказывается, если k_1, k_2, k_3 и k_4 — соответствующие величины, обратные радиусам этих окружностей, то для первого случая имеет место соотношение [1–3]

$$k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2=\frac{1}{2}(k_1+k_2+k_3+k_4)^2.$$

Во втором случае надо величину, обратную радиусу четвертой окружности, принять со знаком «минус».

Аналогичное соотношение имеет место между радиусами пяти попарно соприкасающихся сфер, только «сумма квадратов величин, обратных радиусам сфер, равна одной трети квадрата суммы их обратных величин для случая попарного внешнего касания» [2]. (Во втором случае — одна сфера охватывает четыре — обратная величина наибольшего радиуса вновь со знаком «минус».)

Российский математик М.Д. Ковалев опубликовал доказательство обобщения формулы на случай n-мерного пространства [4, 5]. Рассмотрим работу о формуле геометрии, известной в литературе под названием «формула Содди».

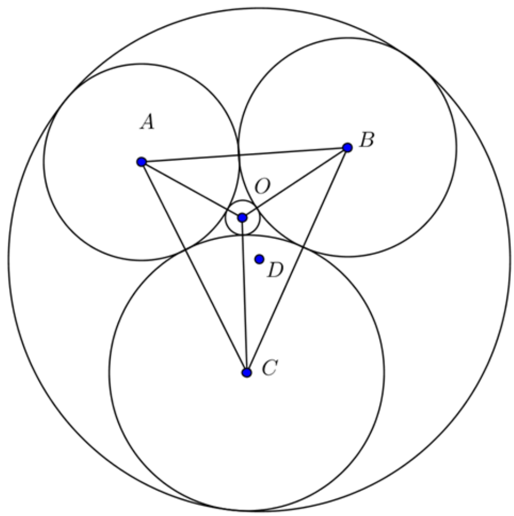

Рис. 1. Расположение и центры соприкасающихся окружностей A, B, C, D, O

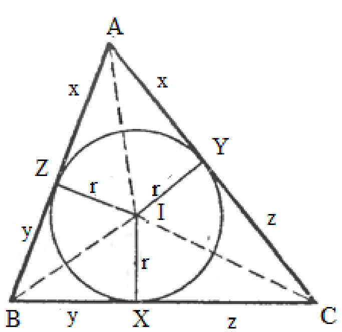

Рис. 2. Вписанная в треугольник ABC окружность

Вписанная и вневписанные в треугольник окружности. На рисунке 2 изображена вписанная окружность, касающаяся сторон BC, CA и AB в точках X, Y, Z. Так как две касательные к окружности, проведенные из внешней точки, равны, то получаем что

$$|BZ| = |BX|, \quad |AY| = |AZ|, \quad |CX| = |CY|.$$

На рисунке 2 длины этих отрезков обозначены буквами x, y, z, так что $y + z = a$; $z + x = b$; $x + y = c$. Здесь a,b и c стороны треугольника ABC.

Сложив эти равенства и используя обозначение s для полупериметра, получим

$$2x + 2y + 2z = a + b + c = 2s,$$

поэтому

$$x + y + z = s,$$

то есть справедлива.

Теорема 1. $x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c.$

Треугольник IBC имеет основание a и высоту r, его площадь

$$S_{IBC} = \frac{1}{2} ar.$$

Прибавив к нему аналогичные выражения для S_{ICA} и S_{IAB}, получим

$$\frac{1}{2}(a+b+c)r = sr,$$

следовательно, теорема доказана.

Т е о р е м а 2. $S_{ABC} = sr$.

На рисунке 3 изображен треугольник $I_aI_bI_c$, стороны которого являются биссектрисами внешних углов треугольника *ABC*. Любая точка на биссектрисе угла $B\,I_cI_a$ равноудалена от прямых *AB* и *BC*. Аналогично, любая точка на прямой I_c равноудалена от прямых *BC* и *CA*. Следовательно, точка, I_a в которой эти биссектрисы пересекаются, находится на одинаковом расстоянии равным радиусу *r* вписанной окружности от всех трех сторон. Так как I_a равноудалена от сторон *AB* и *AC*, то она должна принадлежать множеству точек, равноудаленных от этих прямых, то есть должна лежать на прямой *AI*, внутренней биссектрисе угла *A*.

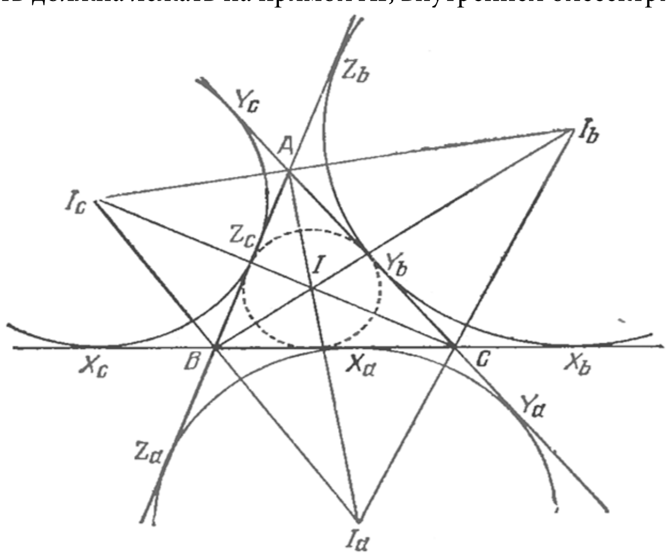

Рис. 3. Расположение касательных *AB, AC* и *BC* к окружности с центром в точке I_a

Т е о р е м а 3. Внешние биссектрисы любых двух углов треугольника конгруэнтны с внутренней биссектрисой третьего угла.

Окружность с центром в точке радиуса, касающаяся всех трех сторон треугольника, является одной из трех вневписанных окружностей. Каждая из вневписанных окружностей касается одной из сторон треугольника внутри, а двух других сторон (продолженных) — извне [3–7]. Обозначив точки касания так, как на рис. 2, отмечаем, что поскольку две касательные из одной точки к окружности имеют одинаковые длины, то

$$|BX_b| = |BZ_b|,$$
$$|BX_b| + |BZ_b| = |BC| + |CX_b| + |Z_bA| + |AB| = |BC| + |CY_b| + |Y_bA| + |AB| = a+b+c = 2s.$$

Следовательно, касательная из точки B (или любой другой вершины) к вневписанной окружности, расположенной за противолежащей стороной, имеет длину s. Действительно,

$$|AY_a| = |AZ_a| = |BZ_b| = |BX_b| = |CX_c| = |CY_c| = s.$$

Кроме того, так как $|CX_b| = |BX_b| - |BC| = s - a$ и т. д., то и

$$|BX_c| = |BZ_c| = |CX_b| = |CY_b| = s - a;$$
$$|AZ_b| = |AY_b| = |BZ_a| = |BX_a| = s - c;$$
$$|CY_a| = |CX_a| = |AY_c| = |AZ_c| = s - b.$$

Теорема Штейнера—Лемуса. Существует ряд геометрических задач, которые заинтересовывают каждого, например три знаменитые задачи об удвоении куба, трисекции угла и квадратуре круга. Попытки решить их привели к развитию новых ветвей математики. Одна из наиболее интересных теорем сформулирована ниже.

Теорема 4. Любой треугольник, у которого равны длины биссектрис двух углов (измеряемые от вершины до противоположной стороны), является равнобедренным.

Работы по теореме Штейнера—Лемуса появлялись в различных журналах в 1842, 1844, 1848 годах, практически ежегодно в период с 1854 по 1864 годы, а также в большом количестве в XX столетии. Одно из простейших доказательств этой теоремы опирается на две леммы.

Лемма 1. Если две хорды окружности стягивают различные острые углы с вершинами на этой окружности, то меньшему углу соответствует меньшая хорда.

Доказательство. Две равные хорды стягивают равные углы с вершиной в центре окружности и равные углы (как их половины) с вершинами в соответствующих точках на окружности. Из двух неравных хорд более короткая, находясь дальше от центра, стягивает меньший угол с вершиной в центре и, следовательно, меньший острый угол с вершиной на окружности.

Лемма 2. В треугольнике с двумя различными углами меньший угол обладает большей биссектрисой.

Доказательство. Пусть ABC — треугольник, в котором $B < C$, как на рис. 4; пусть отрезки BM и CM делят пополам углы B и С. Докажем, что $|BM| = |CN|$. Возьмем точку M' на отрезке BM так, чтобы $\widehat{M'CN} = \frac{1}{2}\widehat{B}$. Так как этот угол равен углу $M'BN$, то точки N, B, C, M' лежат на одной окружности. Поскольку

$$\widehat{B} < \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) < \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}),$$

то $\widehat{CBN} < \widehat{M'CB} < 90^\circ$.

Следовательно, $|CN| < |M'B|$ $|BM| > |BM'| > |CN|$.

Доказательство теоремы. Часто теорема может быть выражена в форме противоположной обратной — эквивалентной первоначальной. Например, утверждение, что все люди смертны, можно представить как: «Бессмертные не есть люди». Вместо доказательства теоремы 4, будет достаточно доказать, что если в треугольнике $ABC\, B \neq C$, то $|BM| \neq |CN|$, а это есть прямое следствие леммы 2.

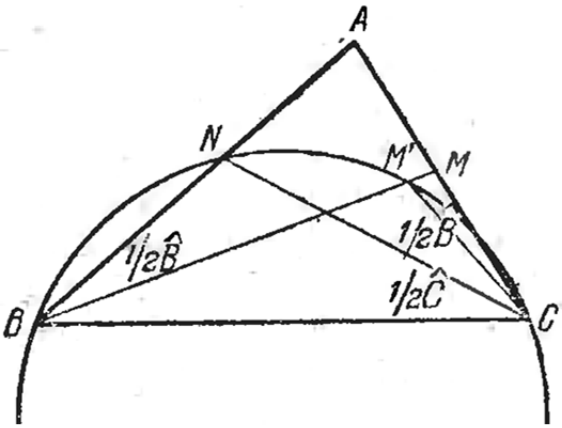

Рис. 4. Хорды *BC, BN, NC,* BM' и CM' треугольника *ABC*

Приведенное выше доказательство этой леммы имеет занятную историю. Сформулировано оно было английскими инженерами Г. Джильбертом и Д. Мак-Доннеллом и опубликовано в American Mathematical Monthly в 1963 году со следующим редакционным комментарием: «Некоторые читатели могут испытать чувство неудовлетворенности потому, что доказательство Джильберта и Мак-Доннелла, подобно большинству других, является косвенным: вместо самой теоремы Штейнера—Лемуса они доказывают теорему, противоположную к обратной. Было предложено несколько якобы прямых доказательств; но каждое из них в действительности является в скрытой форме косвенным. Это несложно понять, если вспомнить, что практически только самые элементарные теоремы доказываются полностью. Все остальные доказываются с помощью других, уже известных теорем, которые выстраиваются в ряд, ведущий к аксиомам. Нельзя, строго говоря, утверждать, что некое доказательство — прямое, если хоть одна из этих вспомогательных теорем имеет косвенное доказательство. Более того, некоторые из самых простых и самых основных теорем имеют косвенные доказательства; следовательно, если бы мы настаивали на абсолютно прямом доказательстве, то существующее великое множество теорем свелось бы к небольшому числу тривиальных» [6].

О связи радиусов соприкасающихся сфер. Будем проводить рассуждения в общем виде, хотя, как это будет видно в дальнейшем, они идентичны для пространства любой размерности и можно было бы ограничиться даже плоским случаем. Сначала напомним некоторые элементарные сведения теории определителей. Известно, что равенство нулю определителя можно записать как

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Этого достаточно, чтобы между его строками имела место линейная зависимость. Если обозначить векторы строки через a^*, то согласно известному свойству определителей будем иметь

$$\left|A\right|^2 = \left|A * A^T\right| = \begin{vmatrix} \vec{a}_1^2 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_1\vec{a}_n \\ \vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_2^2 & \dots & \vec{a}_2\vec{a}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{a}_1\vec{a}_n & \vec{a}_2\vec{a}_n & \dots & \vec{a}_n^2 \end{vmatrix} = \Delta_T. \tag{1}$$

Последний определитель называют определитель Грамма. Равенство его нулю эквивалентно линейной зависимости векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$. Итак, если n векторов принадлежат пространству размерности меньше n, то соответствующий определитель Грамма равен нулю.

Рассмотрим в (n–1)-мерном пространстве совокупность из n + 1 попарно касающихся друг друга внешним образом сфер. Пусть радиусы сфер равны r_0, r_1, r_n. Обозначим через $\vec{a}_{ij}$ вектор, соединяющий центры сфер с номерами i и j, $\left|\vec{a}_{ij}\right| = r_i + r_j = a_{ij}$. Рассмотрим векторное равенство $\vec{a}_{ij} = \vec{a}_{0j} + \vec{a}_{0i}$. Возведя это равенство в квадрат, выразим скалярное произведение следующим образом:

$$\vec{a}_{0i}\vec{a}_{0j} = (a_{0i}^2 + a_{0j}^2 - a_{ij}^2)/2.$$

Далее поскольку n векторов $\vec{a}_{01}, \vec{a}_{02}, \vec{a}_{0n}$ лежат в одном (n–1)-мерном пространстве, то соответствующий определитель Грамма равен нулю. Таким образом, имеет место равенство:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a_{01}^2 & a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{12}^2 & \dots & a_{01}^2 + a_{0n}^2 - a_{1n}^2 \\ a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{12}^2 & 2a_{02}^2 & \dots & a_{02}^2 + a_{0n}^2 - a_{2n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{01}^2 + a_{0n}^2 - a_{1n}^2 & a_{02}^2 + a_{0n}^2 - a_{2n}^2 & \dots & 2a_{0n}^2 \end{vmatrix}_{(n)} = 0. \tag{2}$$

Здесь каждая строка, по сравнению с определителем Грамма, удвоена. Знак n справа внизу указывает на порядок определителя.

Равенство (2) эквивалентно равенству нулю определителя (n + 2)-го порядка [1, 6]:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{01}^2 & a_{02}^2 & \dots & a_{0n}^2 & 1 \\ a_{01}^2 & 0 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 & 1 \\ a_{02}^2 & a_{12}^2 & 0 & \dots & a_{2n}^2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{0n}^2 & a_{1n}^2 & a_{2n}^2 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{(n+2)} = 0.$$

В самом деле, если в определителе D первую строку вычесть из всех остальных, кроме последней, а затем первый столбец вычесть из всех остальных, кроме последнего, то получим определитель, с точностью до знака совпадающий с определителем Δ. (Последние строку и столбец, в которых после этого преобразования будет одна единица, а остальные нули, исключаем, также исключаем первую строку и первый столбец.)

Теперь, учитывая, что $a_{ij}^2=(r_i+r_j)^2$, проделаем с определителем D последовательно следующие операции:

– разделим соответственно i-ю строку и i-й столбец, кроме последних (начальным строке и столбцу соответствует индекс 0), на r_i^2 и заменим $1/r_i=k_i$;

– вычтем последнюю строку и последний столбец из всех оставшихся. Получим равенство:

$$\begin{vmatrix} -2k_0^2 & 2k_0k_1 & 2k_0k_2 & \dots & 2k_0k_n & k_0^2 \\ 2k_0k_1 & -2k_1^2 & 2k_1k_2 & \dots & 2k_1k_n & k_1^2 \\ 2k_0k_2 & 2k_1k_2 & -2k_2^2 & \dots & 2k_2k_n & k_2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2k_0k_n & 2k_1k_n & 2k_2k_n & \dots & -2k_n^2 & k_n^2 \\ k_0^2 & k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 & 0 \end{vmatrix}_{(n+2)} = 0.$$

Сократим каждую строку и каждый столбец (кроме последних) на соответствующее k_i, затем умножим последние строку и столбец на два, после чего сократим все строки на два. В итоге получим равенство:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & k_0 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & k_1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 & k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & k_n \\ k_0 & k_1 & k_2 & \dots & k_n & 0 \end{vmatrix}_{(n+2)} = 0.$$

Раскроем последний определитель и запишем уравнение:

$$P(k_0^2+k_1^2+\ldots+k_n^2)+2Q(k_0k_1+k_0k_2+\ldots+k_{n-1}k_n)=0.$$

В этом уравнении коэффициент

$$P=-\begin{vmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & -1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & -1 \end{vmatrix}_{(n)}.$$

При всех попарных произведениях будет стоять величина, равная определителю:

$$Q=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & -1 \end{vmatrix}_{(n)}.$$

Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно предположить, что все k_i, кроме двух, равны нулю. Покажем, что $P = -(n-2)Q$. Прибавим к первой строке в P все остальные. Тогда в первой строке все элементы окажутся равными $(n-2)$. Вынося этот множитель за знак определителя, получим требуемое равенство. Поскольку $Q\neq 0$ (вычтем первую строку из всех оставшихся), то

$$(n-2)(k_0^2+k_1^2+\ldots+k_n^2)=2(k_0k_1+k_0k_2+\ldots+k_{n-1}k_n);$$
$$(n-1)(k_0^2+k_1^2+\ldots+k_n^2)=(k_0+k_1+\ldots+k_n)^2.$$

Поскольку для удобства обозначений рассматривали $n+1$ сферу в $(n-1)$-мерном пространстве, то, возвращаясь к $n+2$ сферам в n-мерном пространстве (нумерацию начинаем с 1), приходим к требуемому соотношению $k_i=1/r_i$:

$$n\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\ldots+\frac{1}{r_{n+2}^2}\right)=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_{n+2}}\right)^2.$$

При $n = 2$ используем формулу Содди [1], при $n = 3$ — гипотезу Эрдниева [4, 5], а точнее Токийскую формулу.

О кривизнах соприкасающихся сфер. Пусть четыре окружности радиусов R, $l < i < 4$, лежащие в плоскости, попарно касаются друг друга в различных точках. Возможны два случая, когда выполняются эти условия (см. рис. 1) [1, 2], либо все окружности касаются внешним образом, либо одна из окружностей содержит внутри себя остальные.

Назовем кривизной k_i i-й окружности число $1/R_i$, если эта окружность не содержит внутри себя других, и $-1/R_i$ — в противном случае. Тогда справедлива следующая формула [5, 7]:

$$2\sum_{i=1}^{4} K_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{4} K_i\right)^2.$$

Докажем непосредственное обобщение этой формулы для n + 2 попарно касающихся друг друга в различных точках сфер S_i кривизн K_i в евклидовом пространстве E^n $(n \geq 3)$:

$$n\sum_{i=1}^{n+2} K_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n+2} K_i\right)^2. \quad (3)$$

Проделаем инверсию J с центром в точке касания сфер S_{n+1} и S_{n+2} относительно сферы такого радиуса, чтобы S_{n+1} и S_{n+2} перешли в параллельные плоскости P_1 и P_2, отстоящие друг от друга на расстоянии (рис. 5). При этой инверсии сферы S_i, $1 < i < n$, перейдут в сферы единичного радиуса s_i, попарно касающиеся друг друга и касающиеся плоскостей P_1 и P_2. Ясно, что центры сфер s_i лежат в вершинах правильного (n – 1)-мерного симплекса C в плоскости P_c, расположенной посередине между P_1 и P_2 (на рис. 5 представлен случай n = 3). Если проделать инверсию J еще раз, то плоскости P_1, P_2 и сферы s_i перейдут в исходную совокупность сфер S_i, $1 < i < n + 2$. Таким образом, для доказательства формулы (3) достаточно установить ее справедливость для образов плоскостей P_1, P_2 и сфер s_i при произвольной инверсии.

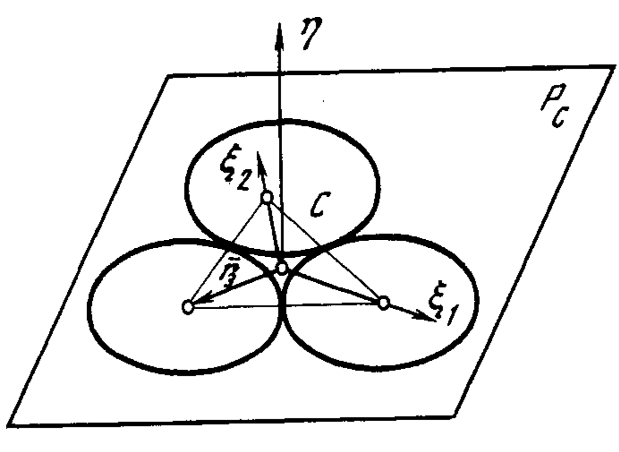

Рис. 5. Расположение центров попарно касающихся друг друга окружностей в плоскости P_c

Вычисления удобно провести в нормированной косоугольной системе координат с началом в центре 0 симплекса C (см. рис. 5), первые n – 1 осей которой направлены из 0 в вершины симплекса, а последняя ось перпендикулярна плоскости P_c. Пусть $\overline{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \eta)$ — радиус-вектор центра инверсии в этой системе, а ρ — радиус сферы, относительно которой производится инверсия. Тогда сфера s_i, $1 < i < n$, перейдет в сферу кривизны

$$K_i = (l_i^2 - 1)/\rho^2,$$

где l_i — расстояние от центра сферы s_i до центра инверсии. Плоскости P_1 и P_2 перейдут в сферы кривизн соответственно

$$K_{n+1} = 2\left(1 - \eta\right)/\rho^2; \; K_{n+1} = 2\left(1 + \eta\right)/\rho^2.$$

Подставим полученные кривизны в правую часть формулы (3) и получим:

$$\left(\sum_{i=1}^{n+2} K_i\right)^2 = \frac{1}{\rho^4}\left(\sum_{i=1}^{n} l_i^2 - n + 4\right)^2.$$

Чтобы вычислить сумму в правой скобке, обозначим $\overline{r}$ радиус-вектор центра сферы и учтем, что $\sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} = \overline{0}$, $\left|\overline{r_i}\right| = r = \sqrt{2(n-1)/n}$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\overline{x} - \overline{r_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} [\overline{x}^2 - 2(\overline{x}, \overline{r_i}) + \overline{r_i}^2] = nx^2 + nr^2 = n[x^2 + 2(n-1)/n];$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n+2} K_i\right)^2 = \frac{1}{\rho^4}[n^2 x^4 + 2n(n+2)x^2 + (n+2)^2].$$

Подсчитаем левую часть формулы (3):

$$n\sum_{i=1}^{n+2} K_i^2 = \frac{n}{\rho^4}\left(\sum_{i=1}^{n} l_i^4 - 2\sum_{i=1}^{n} l_i^2 + n + 8 + 8\eta\right).$$

Преобразуем возникшую сумму четвертых степеней, учитывая свойства векторов $\overline{r_i}$:

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^4 = \sum_{i=1}^{n} (\overline{x} - \overline{r_i})^2 (\overline{x} - \overline{r_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} [x^2 - 2(\overline{x}, \overline{r_i}) + r^2]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [(x^2 + r^2)^2 - 4(x^2 + r^2)(\overline{x}, \overline{r_i}) + 4(\overline{x}, \overline{r_i})^2] = n[x^2 + 2(n-1)/n]^2 + 4\sum_{i=1}^{n} (\overline{x}, \overline{r_i})^2.$$

Таким образом,

$$n\sum_{i=1}^{n+2}K_i^2=\frac{n}{\rho^4}\left\{4n\sum_{i=1}^{n}(\overline{x},\overline{r_i})^2+n^2[x^2+2(n-1)/n]^2-2n^2[x^2+2(n-1)/n]+n^2+8n+8n\eta^2\right\}.$$

Уравнивая полученные выражения левой и правой частей формулы (3) и произведя сокращения, получим равенство

$$\sum_{i=1}^{n}(\overline{x},\overline{r_i})^2=2(x^2-\eta^2)\ . \qquad (4)$$

Данное равенство имеет следующий геометрический смысл: удвоенный квадрат расстояния произвольной точки $y\in E^{n-1}$ от центра 0 правильного (n – 1)-мерного симплекса $C\subset E^{n-1}$ с длиной ребра 2 равен сумме квадратов скалярных произведений вектора $\overline{0y}$ на векторы, проведенные из 0 в вершины симплекса.

Докажем равенство (4), помня, что в выбранной координатной системе скалярное произведение двух различных базисных векторов $(\overline{e_i},\overline{e_j})$, $1\le i,j\le n-1$, равно $-1/(n-1)$, а их скалярные квадраты 1 [8]. Для правой части выражения (4) имеем

$$2(x^2-\eta^2)=2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2-\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n-1}\xi_i\xi_j\right).$$

Вычислим скалярные произведения, входящие в левую часть (4). Пусть $\overline{r_i}=r\overline{e_i}$, $1\le i\le n-1$, $\overline{r_n}=-r\sum_{i=1}^{n-1}\overline{e_i}$, тогда при $1\le i\le n-1$ запишем

$$(\overline{x},\overline{r_i})=r\left(\xi_i-\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n-1}\xi_j\right)=r\left(\frac{n}{n-1}\xi_i-\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j\right);(\overline{x},\overline{r_n})=-\frac{r}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j\ .$$

Вычислим левую часть равенства (4):

$$\sum_{i=1}^{n}(\overline{x},\overline{r_i})^2=r^2\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^2-\frac{2n}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j+\right.$$

$$\left.+\frac{n-1}{(n-1)^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j\right)^2+\frac{1}{(n-1)^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j\right)^2\right]=\frac{2(n-1)}{n}\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^2-\frac{n}{(n-1)^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^2\right)^2\right]=$$

$$=\frac{2n}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^2-\frac{2n}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^2+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n-1}\xi_i\xi_j\right)=2\left(\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^2-\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n-1}\xi_i\xi_j\right).$$

Таким образом, равенство (4), следовательно и формула (3), доказаны.

Обсуждение результатов. Полученные соотношения справедливы и в случае, когда одна из сфер, касаясь остальных, содержит их внутри себя (внутреннее касание). Более того, оба случая можно объединить одной формулой. Будем полагать, что $|k_i| = 1/r_i$, причем для двух сфер, касающихся друг друга внешним образом, соответствующие значения k_i и k_j одного знака, а для касающихся внутренним образом — разных знаков. Тогда для всех $n \geq 1$ справедливо равенство:

$$n(k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n+2}^2) = (k_1 + k_2 + \ldots + k_{n+2})^2 . \qquad (5)$$

Равенства (4) и (5) справедливы для случая, когда первые (n + 1) сферы в n-мерном пространстве касаются попарно друг друга и все касаются одной плоскости. Для этого случая следует k_{n+2} взять равным 0. Формально этот случай получается из регулярного при помощи предельного перехода $r_{n+2} \to \infty$. (Непосредственно те преобразования, которые были использованы, здесь не проходят.) Однако можно обойтись без предельного перехода применительно системе точек касания сфер с (n – 1)-мерной плоскостью. В этом случае расстояние между точками касания двух сфер r_i и r_j с плоскостью равно $2\sqrt{r_i r_j}$. Далее составим соответствующий определитель Грамма (для точек касания с плоскостью) и произведем аналогичные преобразования.

Рассмотрим один из частных случаев. Пусть (n + 2) сферы в n-мерном пространстве касаются друг друга внешним образом, причем первые (n + 1) сферы из них касаются одной плоскости. Получаем два соотношения ($k_i = 1/r_i$), первое — в соответствии с замечанием:

$$n(k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n+1}^2) = (k_1 + k_2 + \ldots + k_{n+1})^2 ,$$

$$n(k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n+1}^2 + k_{n+2}^2) = (k_1 + k_2 + \ldots + k_{n+1} + k_{n+2})^2 .$$

Из этих равенств следует, что

$$k_{n+2} = \frac{2}{n-1}(k_1 + k_2 + \ldots + k_{n+1}) .$$

Далее рассмотрим другой частный случай. Пусть (n + 2) сферы в n-мерном пространстве попарно касаются друг друга, причем центры первых (n + 1) сферы лежат в одной плоскости. Тогда имеют место соотношения:

$$(n-1)(k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n+1}^2) = (k_1 + k_2 + \ldots + k_{n+1})^2 ,$$

$$n(k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n+1}^2 + k_{n+2}^2) = (k_1 + k_2 + \ldots + k_{n+1} + k_{n+2})^2 .$$

Из этих соотношений получаем:

$$k_{n+2} = \frac{1}{n-1}(k_1 + k_2 + \ldots + k_{n+1}) .$$

Существование (n + 2) попарно соприкасающихся сфер является характеристическим свойством n-мерного Евклидова пространства. К примеру, в n-мерном пространстве можно расположить n + 3 попарно соприкасающиеся сферы. Тогда, выбрав в качестве (n + 3)-й любую из них, в соответствии с предыдущим замечанием будем иметь:

$$k_{n+3} = \frac{1}{n-1}(k_1 + k_2 + \ldots + k_{n+2}).$$

Поскольку в этом равенстве в качестве (n + 3)-й можно иметь в виду любую сферу, то $k_1 = k_2 = \ldots = k_{n+3} = (k_1 + k_2 + \ldots + k_{n+3}) / (n+1)$, что невозможно при $k_i \neq 0$, то есть n + 3 попарно соприкасающиеся сферы в n-мерном Евклидовом пространстве построить невозможно.

Выводы. Приложения теории матриц к геометрии основаны на том, что его основные определения находятся в тесной связи с простыми геометрическими образами. Так, всякий вектор соответствует ориентированному отрезку. Всякая линия сечения поверхности плоскостью, проходящей через эту прямую, есть линия кривизны, так как нормали вдоль нее лежат в этой плоскости. Второе семейство линий кривизны пересекает эти плоскости под прямым углом. Но ортогональные траектории пучка плоскостей есть окружности с центрами на оси пучка, расположенные в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Так как поверхность составлена из таких окружностей, то это поверхность вращения, ось которой совпадает с осью пучка.

Сложение векторов сводится к построению ориентированных ломаных и их замыкающих. Свойства поверхности сфер и ее частей необходимо разделять на две группы. Совокупность этих свойств, сохраняющихся при изгибании поверхности сфер, образует ее внутреннюю геометрию, а все остальные свойства, которые существенно зависят от формы, принимаемой поверхностью во внешнем пространстве, будут внешними. Примером внешнего свойства линии, расположенной на поверхности, может служить ее нормальная кривизна. Например, нормальные кривизны меридианов, не равны нулю, так как меридианы — цепные линии. Однако эти линии переходят на геликоид в его прямолинейные образующие. Таким образом, нормальная кривизна рассматриваемых линий после изгибания становится равной нулю, то есть не сохраняется и, значит, принадлежит к числу внешних свойств. Для определения окружности полностью необходимо знать не только ее радиус (или кривизну), но и положение ее центра.

Литература

[1] Коксетер С.М. *Введение в геометрию*. Москва, Наука, 1966, с. 29–31.

[2] Белозеров С.Е. *Пять знаменитых задач древности*. Ростов-на-Дону, Изд-во Ростовского университета, 1975. 320 с.

[3] Волошинов Н.В. *Математика и искусство*. Москва, Просвещение, 1992. 32 с.

[4] Кокстер С.М. *Введение в геометрию*. Москва, Наука, 1969. 31 с.

[5] Ковалев М.Д. О кривизнах соприкасающихся сфер. *Труды МИАН СССР*, 1991, т. 195, с. 90–92.
[6] Щукина Г.И. Проблема познавательного интереса в педагогике: познавательный интерес как средство обучения. *Хрестоматия по педагогике*. Москва, Просвещение, 1976, с. 353–357.
[7] Эрдниев П.М. *Укрупнение дидактических единиц как технология обучения. Ч. 2*. Москва, Просвещение, 1992. 255 с.
[8] Сидняев Н.И., Феоктистов В.В. *Линейные и евклидовы пространства*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 71 с.

Белкина Элеонора Вадимовна — студентка кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Лесных Наталия Сергеевна — студентка кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Н.И. Сидняев, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

ON THE RELATION BETWEEN RADII AND CURVATURES OF MUTUALLY TANGENT SPHERES

E.V. Belkina belkinaeav@student.bmstu.ru
N.S. Lesnykh lesnyykhns@student.bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

We supply a proof for the formula linking the radii of mutually tangent spheres and derive a generalized relation between the curvatures of the tangent spheres. We base our proof on the simplest properties of the determinant theory. In order to derive the connection between the curvatures of the tangent spheres, we invert the location of the spheres. By means of substituting known expressions for a single sphere, we obtain a subsidiary expression for the sum of squared dot products of a vector pointing from the centre of the system to an arbitrary point and vectors pointing from the centre of the system to the simplex vertices. We supply a proof that confirms the validity of generalising the formula to link the curvatures of spheres.

Keywords

Determinant, plane, mutually tangent circles, spheres, curvature, Soddy's formula, radius, Euclidean space

© Bauman Moscow State Technical University, 2017

References

[1] Kokseter S.M. Vvedenie v geometriyu [Introduction to geometry]. Moscow, Nauka publ., 1966, pp. 29–31.

[2] Belozerov S.E. Pyat' znamenitykh zadach drevnosti [Five famous problems of ancientry]. Rostov-na-Donu, Izdatelstvo Rostovskogo universiteta publ., 1975. 320 p.

[3] Voloshinov N.V. Matematika i iskusstvo [Mathematics and art]. Moscow, Prosveshchenie publ., 1992. 32 p.

[4] Coxeter H.S.M. Introduction to geometry. New York, Wiley, 1961. (Russ ed.: Vvedenie v geometriyu. Moscow, Nauka publ., 1966. P. 31)

[5] Kovalev M.D. On the curvatures of tangent spheres. *Trudy MIAN SSSR*, 1991, vol. 195, pp. 90–92. (Eng. version: *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1992, vol. 196, pp. 99–102.)

[6] Shchukina G.I. Problema poznavatel'nogo interesa v pedagogike: poznavatel'nyy interes kak sredstvo obucheniya. Khrestomatiya po pedagogike [Cognition interest problem in pedagogics: cognition interest as a teaching medium. In: Pedagogics chrestomathy]. Moscow, Prosveshchenie publ., 1976, pp. 353–357.

[7] Erdniev P.M. Ukrupnenie didakticheskikh edinits kak tekhnologiya obucheniya. Ch. 2 [Teaching units enlargement as a training technology. P. 2]. Moscow, Prosveshchenie publ., 1992. 255 p.

[8] Sidnyaev N.I., Feoktistov V.V. Lineynye i evklidovy prostranstva [Linear and Euclidean spaces]. Moscow, Bauman Press, 2008. 71 p.

Belkina E.V. — student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Lesnykh N.S. — student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — N.I. Sidnyaev, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.