

ОЦЕНКА ЖИВУЧЕСТИ ПЛАСТИНЫ С ПОПЕРЕЧНОЙ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

К.И. Брыкин

brykiskirilliys@yandex.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена прямоугольная пластина, подверженная чистому изгибу. В пластине имеется начальная краевая поперечная трещина полуэллиптической формы. Определен коэффициент интенсивности напряжений по фронту трещины с помощью аналитического метода расчета. Проведено сравнение полученных результатов и численных значений, рассчитанных с помощью пакета ANSYS. Проведены расчеты трещины на живучесть (прогнозирование долговечности пластины).

Ключевые слова

Коэффициент интенсивности напряжений, метод конечных элементов, живучесть пластины

Поступила в редакцию 30.05.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Большинство деталей машин работают под действием изменяющихся во времени нагрузок. Причем широкий класс деталей и элементов конструкций можно отнести к пластинам, работающим в условиях циклически изменяющейся изгибающей нагрузки. По мере увеличения количества циклов в таких деталях, происходит зарождение и рост усталостных трещин, которые могут привести к разрушению. Для оценки живучести деталей необходимо разработать метод, позволяющий прогнозировать их долговечность.

Вершина трещины представляет собой самый острый концентратор напряжений и деформаций. С позиции линеаризированной теории упругости трещина моделируется математически тонким разрезом, то есть расстояние между его берегами равно нулю [1, 2]. Конец этого разреза (вершина трещины) есть особая точка, поскольку решение теории упругости для напряжений и деформации в этой точке стремится к бесконечности, поскольку радиус кривизны в конце разреза равен нулю. По любому направлению от вершины трещины напряжения и деформации быстро падают, величина падения обратно пропорциональна квадратному корню из расстояния r от вершины трещины (корневая особенность), то есть

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta);$$

$$\varepsilon_{ij} \sim \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \phi_{ij}(\theta). \quad (1)$$

Коэффициент особенности напряжений K характеризует величину напряжений (и деформаций) в ближайшей окрестности вершины трещины. Формулы (1)

носят название асимптотических, поскольку они выделены из общего решения из-за наличия расстояния r в знаменателе. Когда r уменьшается, то асимптотические напряжения существенно возрастают по сравнению с напряжениями регулярными (то есть не сингулярными, без особенности, вдалеке от вершины трещины). Ясно, что в формулах (1) регулярные составляющие напряжений и деформаций отброшены. Перемещения не имеют особенности у вершины трещины и асимптотические формулы для перемещений выглядят так:

$$u_i = \frac{K}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} F_i(\nu, \theta). \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) дают возможность прямо определять коэффициент интенсивности напряжений по полю напряжений или перемещений.

Определение коэффициентов интенсивности напряжений методом конечных элементов по напряжениям или перемещениям около вершины трещины называют прямыми методами.

Очевидно, что при определении коэффициента интенсивности напряжений (КИН) с помощью метода конечных элементов (МКЭ) результат будет тем точнее, чем лучше будет смоделировано поле напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины. Поскольку обычные конечные элементы строят на основе представления поля перемещений с помощью полинома с целыми степенями, то такое моделирование сильно затрудняется. Это затруднение устраняется введением в сетку специальных элементов, моделирующих сингулярность напряжений.

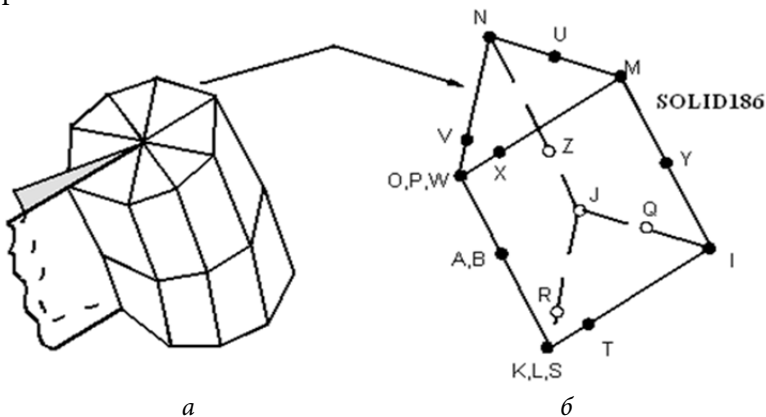


Рис. 1. Геометрическая форма конечного элемента: общий вид трещины (а) и конечный элемент из ANSYS (б)

Постановка задачи. В данной работе рассматривается прямоугольная пластина из стали 45 длиной 200 мм, шириной $H = 100$ мм и толщиной $\delta = 25$ мм, подверженная чистому изгибу. Изгибающий момент $M = 30$ Н·мм, модуль Юнга $E = 2,1 \times 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; $Y_1 = 30$ мм, $Y_2 = 20$ мм. В пластине имеется начальная краевая поперечная трещина полуэллиптической формы.

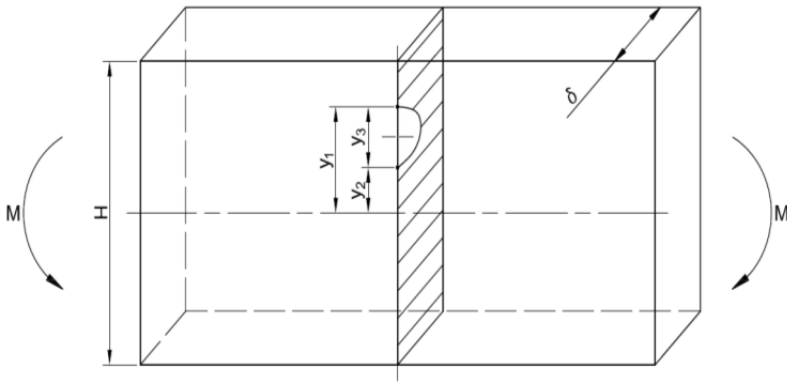


Рис. 2. Геометрические характеристики исследуемой пластины:

M — изгибающий момент; H — ширина; δ — толщина; Y_1, Y_2 — расстояния от осевой линии до вершины; Y_3 — длина трещины

Для оценки живучести пластины разработан метод, позволяющий прогнозировать ее долговечность. Определяется КИН по фронту трещины в пластине с помощью аналитического метода расчета. Найденные результаты сравнивают с численными значениями, полученными с использованием конечно-элементного пакета ANSYS [3]. После проводится расчет трещины на живучесть, заключающийся в прогнозировании долговечности пластины.

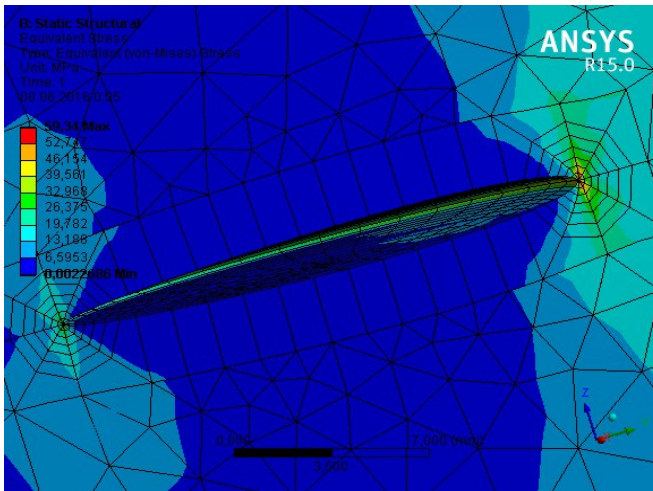


Рис. 3. Эквивалентные напряжения в зоне трещины

Решение задачи нагружения пластины моментами на торцах. Коэффициент интенсивности напряжений вычисляется в конечно элементном комплексе Ansys Workbench. Для создания математической модели пластины с трещиной использовались 10-узловые тетраэдрические конечные элементы Solid 187, а для описания особенности вдоль фронта трещины — специальные сингулярные 15-узловые призматические конечные элементы Solid 186. На рис. 3 представлена конечно-элементная сетка в зоне полуэллиптической продольной краевой

трещины и значения эквивалентных напряжений. На рис. 4 приведены результаты расчета КИН по фронту такой трещины.

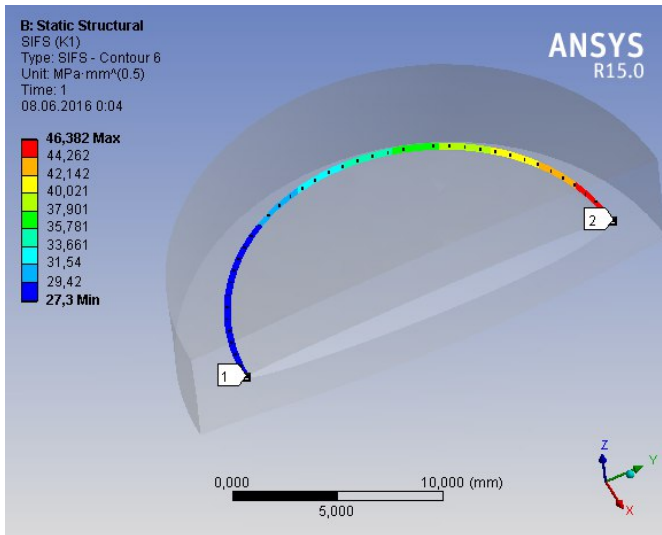


Рис. 4. Распределение КИН по фронту трещины

Значения КИН получены в ANSYS в $\text{МПа} \times \sqrt{\text{мм}}$. При их переводе в общепринятые единицы КИН в наиболее заглубленной точке получается равным $1,072 \text{ МПа} \times \sqrt{\text{м}}$, а в точке выходящей на поверхность $1,467 \text{ МПа} \times \sqrt{\text{м}}$.

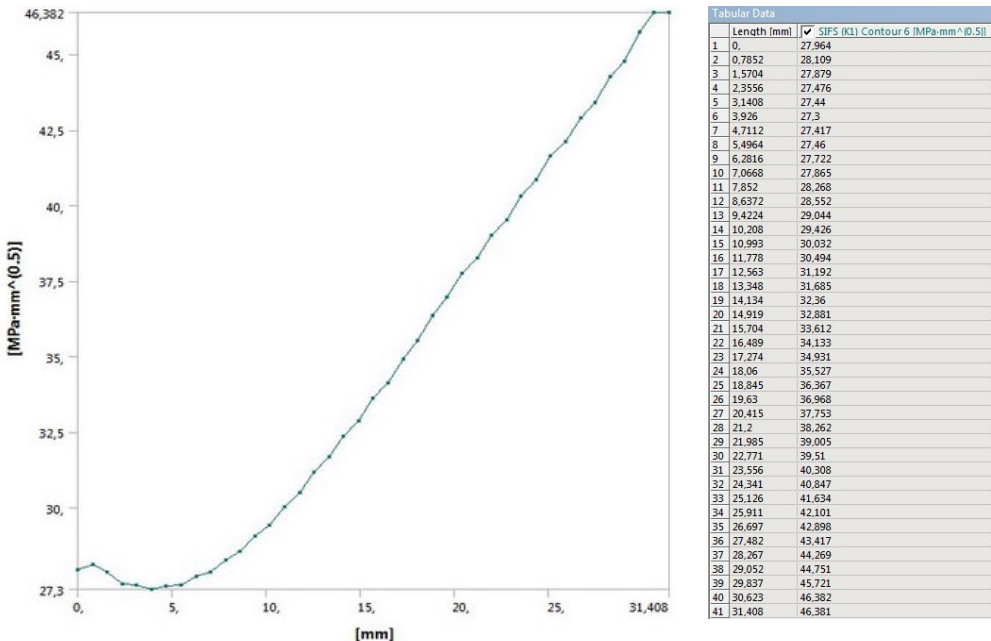


Рис. 5. Диаграмма распределения КИН по фронту трещины (слева) и таблица значений (справа)

Метод сечений для приближенного определения КИН. Рассекаем тело по плоскости трещины так, чтобы сечение проходило через концы трещины. Далее записываем условия равновесия, которые сводятся к равенству силовых факторов, не передающихся через трещину, к силовым факторам, появляющимся вследствие концентрации напряжений по фронту трещины.

Изменение K_I по дуге окружности опишем следующей зависимостью:

$$K_I(\phi) = K_I^{(1)} - (K_I^{(1)} - K_I^{(2)}) \frac{1 - \cos \phi}{2}. \tag{3}$$

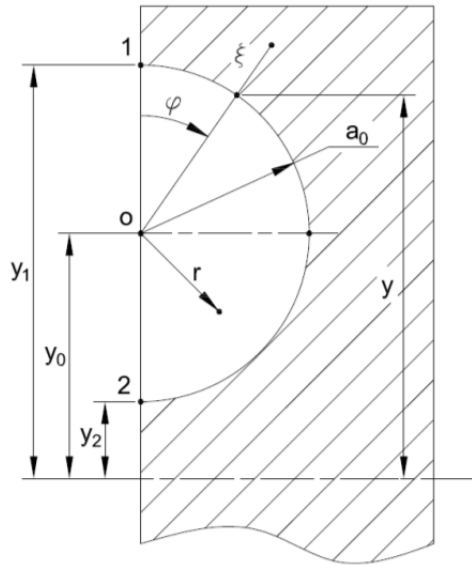
Уравнение равновесия сил выглядит так:

$$\int_0^\pi \left(\int_0^{b(\phi)} \frac{K_I(\phi) d\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} \right) a_0 d\phi = \int_0^\pi \left[\int_0^{a_0} \frac{M}{J_x} (r \cos \phi + y_0) r dr \right] d\phi, \tag{4}$$

где r — радиус произвольной точки, принадлежащей трещине; ξ — расстояние от вершины трещины в данной точке фронта.

Рис. 6. Поперечное сечение пластины с полуэллиптической трещиной:

1, 2 — внешняя и внутренняя вершина трещины соответственно; r — радиус произвольной точки; Y_1, Y_2 — расстояния от осевой линии до вершин трещины; Y_0 — расстояния от осевой линии до середины трещины; a_0 — радиус трещины, ξ — расстояние от середины трещины до заданной точки фронта; ψ — угол от внешней вершины трещины до заданной точке фронта; Y — расстояние от осевой линии трещины до заданной точке фронта



Далее запишем уравнение равновесия для изгибающего момента:

$$\int_0^\pi \left(\int_0^{b(\phi)} \frac{K_I(\phi) d\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} \right) y a_0 d\phi = \int_0^\pi \left[\int_0^{a_0} \frac{M}{J_x} (r \cos \phi + y_0)^2 r dr \right] d\phi. \tag{5}$$

Размер зоны возмущения $b(\phi)$ определяется из условия:

$$\frac{K_I(\phi)}{\sqrt{2\pi b(\phi)}} = \frac{M}{J_x} (a_0 \cos \phi + y_0). \tag{6}$$

В итоге для системы уравнений равновесия (4), (5) с помощью математического пакета Wolfram Mathematica получим значения КИН по фронту трещины. Далее сравним значения КИН полученные двумя методами (рис. 7).

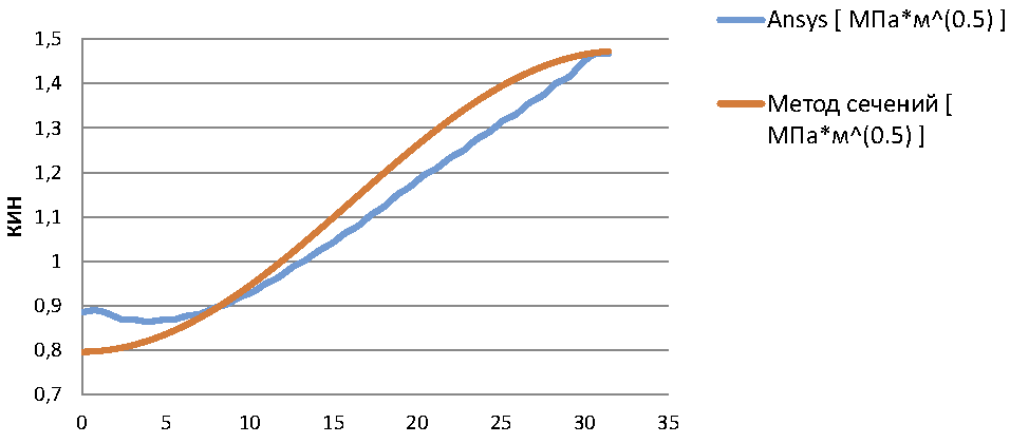


Рис. 7. Распределения КИН по фронту трещины, полученные с помощью Ansys и методом сечений

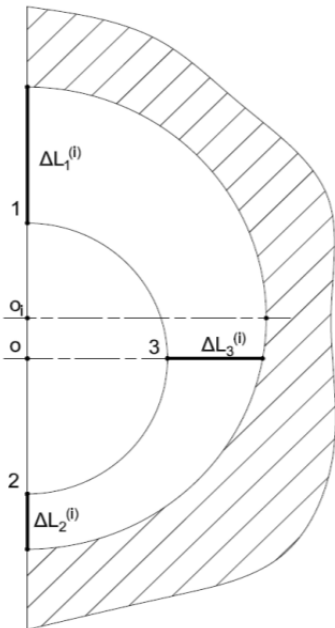


Рис. 8. Перемещение трех узлов полуэллиптической трещины при ее росте

Расчет трещины на живучесть. Большинство деталей машин работают под действием циклических нагрузок. По мере увеличения количества циклов в таких деталях происходит зарождение и рост усталостных трещин, которые могут привести к разрушению детали [4–6]. Основной проблемой расчета трещины на живучесть является определение количества циклов до разрушения. В работе используется принцип автоточности, согласно которому принимается, что форма трещины в процессе ее роста остается полуэллиптической, а изменяются только размеры полуосей. Разрушение пластины произойдет тогда, когда значение максимального КИН в точке, лежащей на малой или большой полуоси, достигнет критического значения. Кроме того, разрушение пластины может произойти, если глубина трещины станет равной толщине пластины или трещина выйдет на верхнюю поверхность пластины. Анализ живучести пластины возможен посредством анализа роста трещины в этой точке от начального до критического значения. Оценка живучести пластины с поперечной полуэллиптической трещиной осуществлялась с использованием уравнения Пэриса:

$$\frac{dL}{dN} = C(\Delta K_I)^m = CK_{I_{\max}}^m, \tag{7}$$

где ΔK_I — размах КИН за цикл; L — характерный размер трещины; N — долговечность; C и m — эмпирические коэффициенты;

$$\Delta L_j^{(i)} = CK_{I_{\max}j}^{(i)m} \Delta N, \tag{8}$$

здесь i — номер итерации; j — номер узла трещины.

Далее определяют перемещения трех узлов полуэллиптической трещины при ее росте. После каждой итерации вычисляется максимальный КИН по фронту трещины, используя конечно-элементный пакет Ansys, и проверяется выполнение критерия Ирвина:

$$K_{I_{\max}} \leq K_{Ic}, \tag{9}$$

где K_{Ic} — вязкость разрушения (трещиностойкость), $K_{Ic} = 40 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$; m , C — эмпирические коэффициенты, $m = 3,5$; $C = 10^6 \frac{\text{мм}}{\text{м}} (\text{МПа}\sqrt{\text{м}})^{-m}$.

Итак, проведен численный анализ шагов циклов нагружения ΔN и установлено, что допустимый шаг нагружения $\Delta N = 100$. При этом долговечность пластины с трещиной $N = 1000$ циклов (рис. 9).

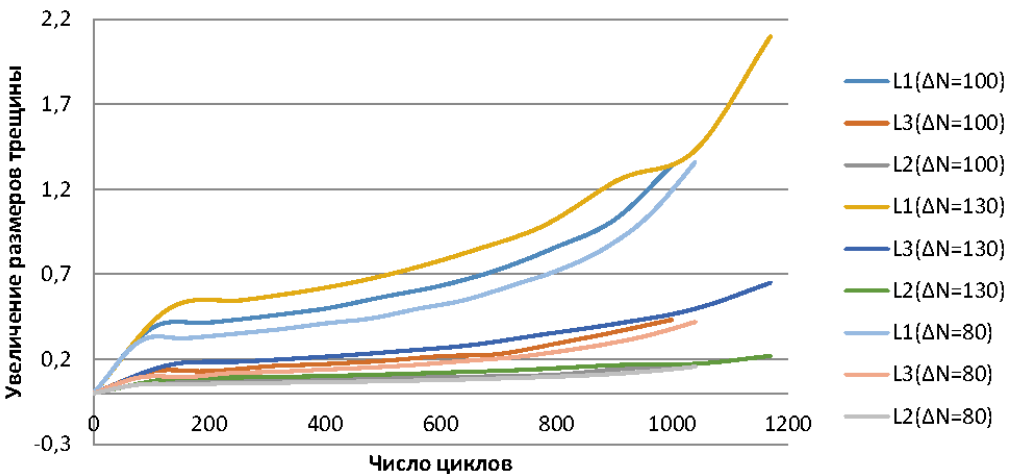


Рис. 9. Зависимость увеличения размеров трещины от числа циклов нагружения

Выводы. Для оценки живучести пластины разработан метод, позволяющий прогнозировать ее долговечность. В ходе численного анализа шагов циклов нагружения установлено, что допустимый шаг нагружения $\Delta N = 100$. При этом долговечность пластины с трещиной $N = 1000$ циклов.

Литература

- [1] Броек Д. *Основы механики разрушения*. Москва, Высшая школа, 1980. 368 с.
- [2] Гусев А.С. *Сопrotивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках*. Москва, Машиностроение, 1989. 244 с.
- [3] Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. Москва, Мир, 1975. 542 с.
- [4] Паргон В.З., Морозов Е.М. *Механика упруго-пластического разрушения*. Москва, Наука, 1985. 504 с.
- [5] Феодосьев В.И. *Сопrotивление материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 599 с.
- [6] Черепанов Г.П. *Механика хрупкого разрушения*. Москва, Наука, 1974. 640 с.
- [7] Панасюк В.В., ред. *Механика разрушения и прочность материалов. Т. 3. Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения*. Киев, Наукова думка, 1988. 436 с.

Брыкин Кирилл Игоревич — магистрант кафедры «Основы конструирования машин», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Л.А. Андриенко, д-р техн. наук, профессор кафедры «Основы конструирования машин», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

ESTIMATING DURABILITY OF A PLATE WITH A TRANSVERSE SEMI-ELLIPTICAL CRACK SUBJECTED TO PURE BENDING

K.I. Brykin

brykiskirilliys@yandex.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The study deals with a rectangular plate subjected to pure bending. The plate features an initial edge crack of a semi-elliptical shape. Using an analytical computational method we determined the stress intensity factor along the crack front in the plate. We compared the results obtained to the numerical results computed in the ANSYS software package. We performed fracture persistence calculations (predicting the durability of the plate).

Keywords

Stress intensity factor, finite element method, fracture persistence

© Bauman Moscow State Technical University, 2017

References

- [1] Broek D. Elementary engineering fracture mechanics. Martinus Hijhoff Publishers, 1974. 380 p. (Russ. ed: Osnovy mekhaniki razrusheniya. Moscow, Vysshaya shkola publ., 1980. 368 p.)
- [2] Gusev A.S. Soprotivlenie ustalosti i zhivuchest' konstruksiy pri sluchaynykh nagruzkakh [Fatigue resistance and design survivability under random loads]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1989. 244 p.
- [3] Zienkiewicz O.C. The finite element method in engineering science. London, 1971. 521 p. (Russ. ed.: Metod konechnykh elementov v tekhnike. Moscow, Mir publ., 1975. 542 p.)
- [4] Parton V.Z., Morozov E.M. Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniya [Elastic-plastic fracture mechanics]. Moscow, Nauka publ., 1985. 504 p.
- [5] Feodos'yev V.I. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. Moscow, Bauman Press, 2004. 599 p.
- [6] Cherepanov G.P. Mekhanika khrupkogo razrusheniya [Brittle fracture mechanics]. Moscow, Nauka publ., 1974. 640 p.
- [7] Panasyuk V.V., ed. Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov. T. 3. Kharakteristiki kratkovremennoy treshchinostoykosti materialov i metody ikh opredeleniya [Fracture mechanics and strength of materials. Vol. 3. Short-time crack resistance characteristics of materials and their determination methods]. Kiev, Naukova dumka publ., 1988. 436 p.

Brykin K.I. — graduate student, Department of Machine Construction Principles, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — L.A. Andrienko, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Machine Construction Principles, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.