

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ С ПОМОЩЬЮ СМЕШАННОЙ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

П.С. Аронов

aronovps@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Представлено решение контактной задачи теории упругости с односторонними связями методом конечных элементов с использованием смешанной постановки — функционала Рейсснера. Решение седловой системы линейных алгебраических уравнений, возникающей при поиске стационарной точки этого функционала, с помощью модифицированного метода симметричной последовательной верхней релаксации сопряжено с рядом особенностей. Основной такой особенностью является необходимость контроля неотрицательности перемещений на поверхности контакта.

Ключевые слова

Контактная задача теории упругости, задачи с односторонними связями, функционал Рейсснера, метод конечных элементов, метод верхней релаксации

Поступила в редакцию 23.05.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Задачи теории упругости — один из основных разделов механики деформируемого твердого тела, имеющий прикладные приложения в научных исследованиях и инженерных расчетах прочности конструкций. При решении краевых задач теории упругости с помощью метода конечных элементов используют, как правило, интегральную, в частности вариационную формулировку. При этом минимизируемый функционал зависит только от одного вектора неизвестной точечной функции (например, перемещения).

Одним из альтернативных вариантов при численном анализе подобных задач теории является применение смешанных вариационных формулировок метода конечных элементов, в которых напряжения и/или деформации входят в разрешающие уравнения, наряду с перемещениями, как равноправные неизвестные.

В работе рассмотрена смешанная формулировка конечно-элементной технологии решения контактной задачи теории упругости с односторонними ограничениями, которая позволяет перейти к решению системы линейных алгебраических уравнений с вектором неизвестных, включающем в себя компоненты напряжений и перемещений. Предложенный в работе алгоритм, основанный на решении системы линейных алгебраических уравнений модифицированным методом симметричной последовательной верхней релаксации использован для решения контактной задачи о нагруженном внешними силами упругом теле, опирающемся на абсолютно жесткое полупространство.

Математическая постановка задачи. Рассмотрим математическую формулировку двумерной задачи теории упругости в прямоугольной области $G \subset \mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad x \in G; \\ \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{S_1} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad x \in S_1, \quad S_1 \subset G; \\ \sigma_{ji}(\mathbf{x})n_j|_{S_2} = g_i(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, \quad x \in S_2 \subset G; \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{x}) + u_{j,i}(\mathbf{x})), \quad i, j = 1, 2, \quad x \in G; \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = E_{ijkl}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{kl}^0(\mathbf{x})), \quad i, j = 1, 2, \quad x \in G, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$, \mathbf{e}_i — единичные орты координатных осей; x_i — координаты вектора $\mathbf{x} \in G$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{kl} — компоненты тензора деформаций; ε_{kl}^0 — компоненты тензора начальных деформаций; u_i — перемещения; $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ — вектор перемещения точки, расположенной на поверхности S_1 ; E_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных; $\rho_i(\mathbf{x})$ — компоненты вектора объемных сил; $g_i(\mathbf{x})$ — компоненты вектора поверхностных сил; n_j — компоненты вектора нормали к соответствующей поверхности S_j .

Введем векторы напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и перемещений \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} &= \{\sigma_1 \sigma_2 \tau_{12}\}^T; \\ \mathbf{u} &= \{u_1 u_2\}^T. \end{aligned} \quad (2)$$

При решении двумерных задач матрица дифференцирования A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

а матрица направляющих косинусов внешней нормали \mathbf{n} к поверхности S выглядит следующим образом:

$$A_S = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{n}, x_1) & 0 \\ 0 & \cos(\mathbf{n}, x_2) \\ \cos(\mathbf{n}, x_2) & \cos(\mathbf{n}, x_1) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Запишем теперь уравнения (1) в матричном виде относительно неизвестных компонентов векторов $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) = 0, \quad x \in G; \\ A \mathbf{u}(\mathbf{x}) - D^{-1} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 0; \\ A_S^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad x \in S_1; \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad x \in S_2, \end{array} \right. \quad (5)$$

где через D^{-1} обозначена матрица податливости (обратная матрице Гука) для изотропного тела.

Смешанная формулировка конечно-элементной технологии. Рассмотрим первую форму функционала Рейсснера [1, 2]:

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \int_V \left[\boldsymbol{\sigma}^T A \mathbf{u} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T D^{-1} \boldsymbol{\sigma} \right] dV - \int_V \mathbf{u}^T \boldsymbol{\rho} dV - \int_{S_1} \mathbf{u}^T \mathbf{g}_S dS - \int_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T A_S^T \boldsymbol{\sigma} dS. \quad (6)$$

Далее построим систему линейных алгебраических уравнений для определения вектора $\{\boldsymbol{\sigma} \ \mathbf{u}\}^T$, используя условие стационарности функционала Π . Для этого вычислим производные по векторам $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{u} с учетом того, что $\mathbf{u} = \mathbf{u}_S$ на границе области S :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \int_G A \mathbf{u} - D^{-1} \boldsymbol{\sigma} dV = 0; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} = \int_G \boldsymbol{\sigma}^T dV - \int_G \boldsymbol{\rho} dV - \int_S \mathbf{g}_S dS = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Затем рассмотрим восьмиузловой конечный элемент. Интерполяционный полином для такого элемента записывают в следующем виде:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2.$$

Функции формы квадратичного четырехугольного элемента, записанные в локальной системе координат выглядят так [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1); \\ N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta); \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1); \\ N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi); \\ N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1); \\ N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta); \\ N_7 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1); \\ N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi). \end{array} \right. \quad (8)$$

Перемещения u_1 и u_2 внутри элемента можно задать зависимостью:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} = [N]^{(e)} \{u\}^{(e)}, \quad (9)$$

где

$$[N]^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & \dots & N_8^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & \dots & 0 & N_8^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

при этом

$$\{u\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_1^{(e1)} \\ u_2^{(e1)} \\ u_1^{(e2)} \\ u_2^{(e2)} \\ \vdots \\ u_1^{(e8)} \\ u_2^{(e8)} \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Соотношения между деформациями и перемещениями в двумерном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \\ \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (12)$$

или с учетом (9)

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\}, \quad (13)$$

где

$$[B] = \frac{1}{2S^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8^{(e)}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x_1} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8^{(e)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_8^{(e)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_8^{(e)}}{\partial x_1} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

В соответствии с общепринятой терминологией введем в рассмотрение следующие матрицы и вектора:

$$[A] = -\sum_{e=1}^{k_{el}} [a_V^{(e)}]^T \left(\int_G [D^{-1(e)}] dV \right) [a_V^{(e)}]; \quad (15)$$

$$[B] = \sum_{e=1}^{k_{el}} [a_V^{(e)}]^T \left(\int_G [A^{(e)}] dV \right) [a_V^{(e)}]; \tag{16}$$

$$[R_1] = \sum_{e=1}^{k_{el}} [a_V^{(e)}]^T \left(\int_G [\rho^{(e)}] dV \right) [a_V^{(e)}]; \tag{17}$$

$$[R_2] = \sum_{e=1}^{k_{el}} [a_S^{(e)}]^T \left(\int_S [g_S^{(e)}] dS \right) [a_S^{(e)}], \tag{18}$$

где $[D^{-1(e)}]$ и $[A^{(e)}]$ — локальные матрицы податливости и градиентов конечного элемента; $[\rho^{(e)}]$ и $[g_S^{(e)}]$ — локальные векторы объемных и поверхностных сил соответственно.

Опишем структуру матриц $[a_V^{(e)}]$ и $[a_S^{(e)}]$. Отметим, что число строк равно локальному числу узлов рассматриваемого конечного элемента, а число столбцов — общему числу узлов конечно-элементной сетки [4].

Заданные на поверхности S_1 перемещения u_S можно учесть при решении системы линейных алгебраических уравнений, следовательно, отсутствует необходимость в формировании матриц, связанных с вычислением слагаемого $\int_{S_2} (u - u_S)^T A_S^T \sigma dS$. Тогда с учетом соотношений (15)–(18) уравнения (7) можно переписать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_1 + R_2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Алгоритм решения. Запишем систему линейных алгебраических уравнений в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Рассмотрим модифицированный метод симметричной последовательной верхней релаксации (SSOR) [5] для системы (20):

$$\left\{ \begin{aligned} & A \frac{\sigma^{k+\frac{1}{2}} - \sigma^k}{\tau} + A \sigma^k + B u^k = 0; \\ & -\alpha C \frac{u^{k+1} - u^k}{2\tau} + B^T \sigma^{k+\frac{1}{2}} = R; \\ & A \frac{\sigma^{k+1} - \sigma^{k+\frac{1}{2}}}{\tau} + A \sigma^{k+\frac{1}{2}} + B u^{k+1} = 0, \end{aligned} \right. \tag{21}$$

где k — номер итерации; α и τ — итерационные параметры. Матрицу C выберем в следующем виде:

$$C = B^T \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} B. \quad (22)$$

Перед первой итерацией необходимо задать начальное значение вектора перемещений $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}_0$, а затем вычислить глобальный вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma}^1$ из первого уравнения (21):

$$A\boldsymbol{\sigma}^1 = -B\mathbf{u}^1.$$

Применение схемы (21) требует на каждой итерации решения трех системы линейных алгебраических уравнений относительно глобальных векторов перемещений $\Delta\mathbf{u}$ и напряжений $\Delta\boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{cases} A\Delta\boldsymbol{\sigma}^{k+\frac{1}{2}} = -\tau(A\boldsymbol{\sigma}^k + B\mathbf{u}^k); \\ C\Delta\mathbf{u}^{k+1} = \frac{2\tau}{\alpha}(B^T\boldsymbol{\sigma}^{k+\frac{1}{2}} - R); \\ A\Delta\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = -\tau(A\boldsymbol{\sigma}^{k+\frac{1}{2}} + B\mathbf{u}^{k+1}), \end{cases} \quad (23)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^{k+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sigma}^k + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{k+\frac{1}{2}}$; $\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}^{k+\frac{1}{2}} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{k+1}$; $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}^{k+1}$.

При решении системы (21) необходимо осуществлять проверку условия неотрицательности перемещения $u_2(\mathbf{x})$, так как учет дополнительных односторонних связей требует выполнения условий, характеризующих особенности контактного взаимодействия тела с ограничивающей поверхностью полупространства. Для этого зададим на поверхности S_k внешнюю относительно области G нормаль \mathbf{n} и касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$. Тогда условия контактного взаимодействия можно записать как кинематическое $u_n \leq \delta_n$ и силовое $\sigma_n \leq 0$, где u_n — перемещение точки контактной поверхности S_k в направлении внешней нормали \mathbf{n} ; δ_n — начальное расстояние (зазор) по нормали \mathbf{n} между точкой контактной поверхности S_k и некоторой сходственной точкой, расположенной на ограничивающей поверхности полупространства (здесь $\delta_n \geq 0$); $\sigma_n = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ — проекция вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ на нормаль \mathbf{n} . Необходимо также отметить, что в точках нарушения контакта $\sigma_n = 0$.

При отсутствии трения касательные напряжения на контактной поверхности S_k равны нулю, то есть $\sigma_\tau = 0$, где $\sigma_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau}$. Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — касательный вектор к контактной поверхности S_k .

Решение контактной задачи теории упругости. В качестве тестовой рассмотрим следующую задачу: двумерная пластина закреплена с помощью шарниров и нагружена так, как показано на рис. 1, и опирается на абсолютно жесткое полупространство.

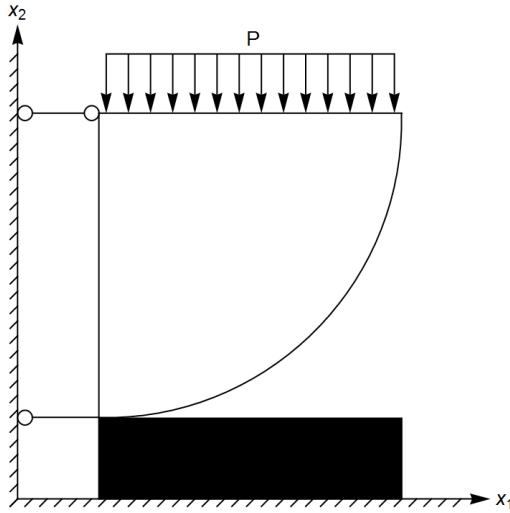


Рис. 1. Расчетная схема решения задачи теории упругости

Пластина выполнена из материала с модулем упругости $E = 210$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$; $P = 10$ МПа.

Для численного решения задачи будем использовать конечно-элементную сетку, изображенную на рис. 2. Она состоит из 432 восьмиугольных элементов, сконцентрированных в зоне контакта.

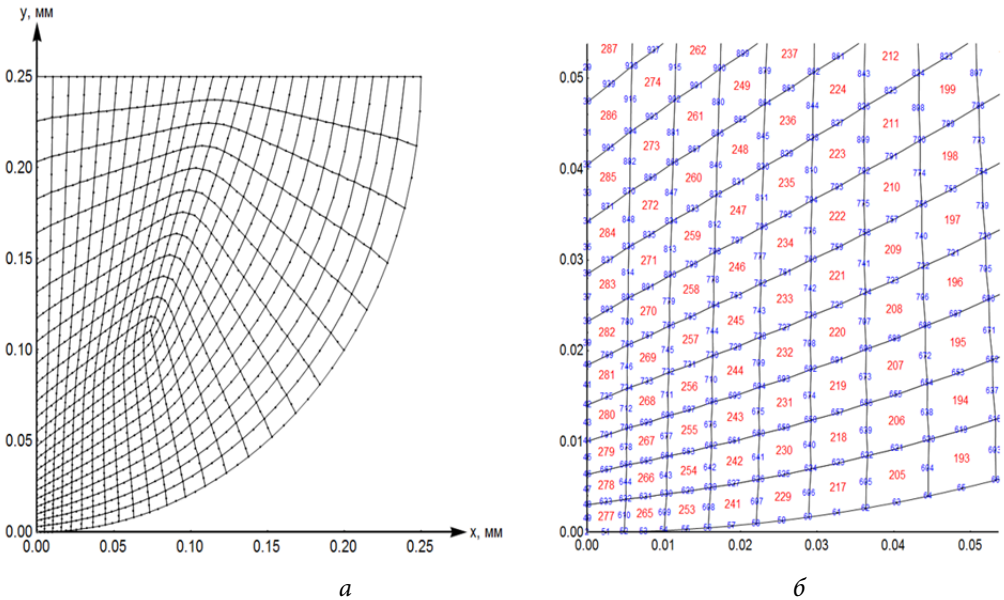


Рис. 2. Конечно-элементная сетка (а) и ее фрагмент в зоне контакта (б)

На рисунке 3 а, б представлены распределения перемещений $u_1(\mathbf{x})$ и $u_2(\mathbf{x})$.

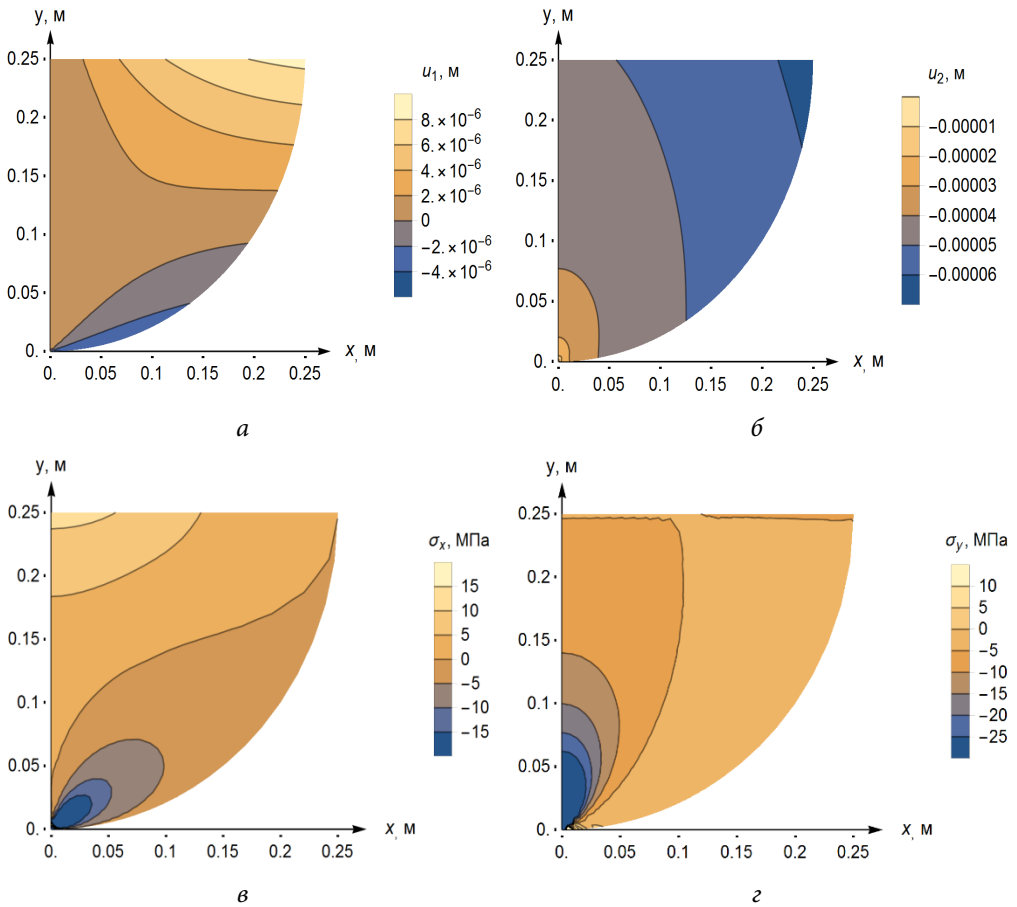


Рис. 3. Распределения перемещений $u_1(\mathbf{x})$ — а, $u_2(\mathbf{x})$ — б и напряжений $\sigma_1(\mathbf{x})$ — в, $\sigma_2(\mathbf{x})$ — г

Распределения перемещений и напряжений имеют неоднородный характер. Наибольшие по модулю значения напряжений $\sigma_1(\mathbf{x})$ и $\sigma_2(\mathbf{x})$ (рис. 3 в, г) сконцентрированы в зоне контакта пластины и полупространства.

В статье представлено решение контактной задачи теории упругости с использованием смешанной постановки задачи — функционала Рейсснера. Рассмотренная задача с односторонними ограничениями имеет ряд особенностей, в том числе необходимость контроля перемещений во время решения системы линейных алгебраических уравнений. Разработан алгоритм решения данной системы с помощью модифицированного метода симметричной последовательной верхней релаксации. Выполнено численное моделирование двумерной контактной задачи теории упругости с односторонними ограничениями с использованием полученного алгоритма.

Литература

- [1] Розин Л.А. *Вариационные постановки задач для упругих систем*. Ленинград, Изд-во Ленинградского университета, 1978, 224 с.
- [2] Розин Л.А. *Метод конечных элементов в применении к упругим системам*. Москва, Стройиздат, 1977, 129 с.
- [3] Зенкевич О., Морган К. *Конечные элементы и аппроксимация*. Москва, Мир, 1986, 318 с.
- [4] Галанин М.П., Савенков Е.Б. *Методы численного анализа математических моделей*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 591 с.
- [5] Быченков Ю.В., Чижонков Е.В. *Итерационные методы решения седловых задач*. Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010, 349 с.

Аронов Павел Сергеевич — студент кафедры «Прикладная математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — И.В. Станкевич, д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

COMPUTATIONAL SOLUTION OF THE ELASTICITY THEORY CONTACT PROBLEM WITH THE UNILATERAL CONSTRAINTS BY MEANS OF THE FINITE ELEMENTS METHOD MIXED NETWORK

P.S. Aronov

aronovps@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

This work introduces the solution of the elasticity theory contact problem with the unilateral constraints by means of the finite elements method with the use of hybrid formulation — the Reissner's functional. The solution of the saddle system of linear equations arising from the search of this functional stationary point through the use of symmetrical sequential overrelaxation modified method is connected to a set of features, the main feature being the need for monitoring the non-negativeness of displacements on the contact surface.

Keywords

Elasticity theory contact problem, problem with the unilateral constraints, Reissner's functional, finite elements method, overrelaxation method

© Bauman Moscow State Technical University, 2017

References

- [1] Rozin L.A. Variatsionnye postanovki zadach dlya uprugikh system [Variational formulation of elastic system problems]. Leningrad, Leningrad University publ., 1978, 224 p.
- [2] Rozin L.A. Metod konechnykh elementov v primenении k uprugim sistemam [Finite elements methods as applied to the elastic systems]. Moscow, Stroyizdat publ., 1977, 129 p.
- [3] Zienkiewicz O.C., Morgan K. Finite elements and approximation. Wiley, 1983, 328 p. (Russ. ed.: Konechnye elementy i approksimatsiya. Moscow, Mir publ., 1986, 318 p.).
- [4] Galanin M.P., Savenkov E.B. Metody chislenogo analiza matematicheskikh modeley [Numerical analysis methods of mathematical models]. Moscow, Bauman Press, 2010, 591 p.
- [5] Bychenkov Yu.V., Chizhonkov E.V. Iteratsionnye metody resheniya sedlovykh zadach [Iteration methods for saddle problems solving]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy publ., 2010, 349 p.

Aronov P.S. — student, Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Stankevich I.V., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.