УДК 531.19 DOI: 10.18698/2541-8009-2017-11-196

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ О ВСТРЕЧЕ СЛУЧАЙНО БЛУЖДАЮЩИХ ЧАСТИЦ

Р.Ю. Крысяев roman-krysyaev@yandex.ru
Д.Л. Рабкин rabkind@rambler.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрены задачи о встрече частиц, случайно блуждающих на конечном (или счетном) и неограниченном множествах, в том числе с применением рядов Фурье для их решения. Выведена вероятность встречи двух частиц при бернуллиевском случайном блуждании. Изучены задачи о сближении двух блуждающих частиц на непрерывном множестве и о встрече частиц при блуждании на дискретном циклическом множестве. Показаны задача о первой встрече и способ сведения ее к задаче о достижении множества. Исследовано предельное поведение вероятности встречи частиц при большом времени блуждания для каждой задачи. Продемонстрировано применение интегралов Лапласа для поиска предельной вероятности встречи двух частиц, блуждающих на неограниченном множестве.

Ключевые слова

Марковские процессы, случайные блуждания, стационарное распределение, декартово произведение, ряды Фурье, метод Лапласа, распределение Бернулли

Поступила в редакцию 03.07.2017

В рамках исследования модели случайного блуждания с дискретным временем как марковского процесса [1] особый интерес представляет задача о встрече частиц. В зависимости от числа блуждающих частиц и типа пространства состояний блуждания могут возникнуть различные виды задачи.

Задача о встрече. *Рассмотрим задачу о встрече двух и более частиц* $\xi^i\,(i=1,2,\ldots,n)$, *блуждающих на конечном множестве* X. Пусть заданы их начальные распределения $\mathbf{p}_0^i\left(x\right)=P\left\{\xi_0^i=x\right\}$ и матрицы переходных вероятностей [2] $\mathbf{Q}^i=\left\{q^i\left(x,y\right)\right\}$, где $q^i\left(x,y\right)=P\left\{\xi_{n+1}^i=y\,|\,\xi_n^i=x\right\}$. Требуется найти вероятность встречи k частиц на n-м шаге.

Ввиду независимости блужданий искомая вероятность имеет вид

$$A_n=P\left\{\xi_n^1=\xi_n^2=\ldots=\xi_n^k\right\}=\sum_{c\in X}P\left\{\xi_n^1=c\right\}P\left\{\xi_n^2=c\right\}\ldots P\left\{\xi_n^k=c\right\}.$$

Принимая во внимание, что $P\left\{\xi_n^i=c\right\}=P_n^i\left(c\right)$, а $P_n^i\left(c\right)=\left(\mathbf{p}_0^i\left(\mathbf{Q}^i\right)^n\right)\left(c\right)$, получим

$$A_n = \sum_{c \in X} \prod_{i=1}^{k} \left[\left(\mathrm{p}_0^i \left(\mathbf{Q}^i \right)^n \right) (c) \right]. \tag{1}$$

Предельный случай приводит к стационарному распределению вероятностей [3]. Матрица такого распределения

$$\mathbf{L}^i = \begin{vmatrix} l_1^i & \cdots & l_N^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_1^i & \cdots & l_N^i \end{vmatrix}, \; l_k^i \geq 0, \; \sum_{k=1}^{N} l_k^i = 1,$$

где $\mathbf{l}^i = \left(l_1^i, ..., l_N^i \right)$ — строка стационарного распределения вероятностей, которую можно найти из условия

$$\mathbf{l}^i = \mathbf{l}^i \mathbf{Q}^i .$$

Таким образом, искомая вероятность

$$A_n = \sum_{c \in X} \prod_{i=1}^{k} \left[\left(\mathbf{p}_0^i \mathbf{L}^i \right) (c) \right] = \sum_{c \in X} \prod_{i=1}^{k} \left[\left(\mathbf{l}^i \right) (c) \right]. \tag{2}$$

В качестве примера рассмотрим случай для двух частиц ξ_1 и ξ_2, блуждающих на множестве $X = \{1, 2, 3\}$, имеющих начальное распределение $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и матрицу переходных вероятностей $\mathbf{Q}$.

С учетом формулы (1) вероятность встречи на n-м шаге

$$A_n = \sum_{c=1}^{3} \left[\left(\mathrm{p}_0 \mathbf{Q}^n \right) (c) \right]^2 .$$

В предельном случае выражение (2) преобразуется к виду

$$A_n = \sum_{c=1}^{3} \left[\left(\mathbf{p}_0 \mathbf{L} \right) (c) \right]^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 \; (n \to \infty).$$

Рассмотрим задачу о встрече частиц, блуждающих на неограниченном множестве X, т. е. $X = Z^n$. Здесь нельзя говорить о стационарном распределении в предельных случаях, поэтому представим ξ_k^l, $l = 1, 2$ как сумму сдвигов τ_j^l $(j = 1, 2, ..., k)$, т. е. $\xi_k^l = \tau_1^l + ... + \tau_k^l$, где τ_j^l — независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда распределение случайной точки ξ_n^l определяется соотношением

$$P\left\{ \xi_n^l = x \right\} = P\left\{ \tau_1^l + ... + \tau_n^l = x \right\}.$$

Для дальнейшего рассмотрения задачи удобно использовать ряды Фурье [3, 4].

Ряды Фурье в задаче о встрече. Пусть даны функции $f(t)$, $g(t)$, определенные и интегрируемые на отрезке $t \in [-\pi, \pi]$. Разложим каждую из них в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r e^{irt};$$

$$g(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} b_r e^{irt},$$

где a_r и b_r — коэффициенты рядов Фурье,

$$a_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-irt} dt;$$

$$b_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-irt} dt.$$

Для рассмотрения бесконечной суммы произведений коэффициентов двух рядов Фурье удобно использовать равенство Парсеваля [5]

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r \overline{b}_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g}(t) dt, \tag{3}$$

где $\overline{g}(t)$ — функция, комплексно-сопряженная функции $g(t)$.

Вероятность $P\left\{\xi_n^l = x\right\}$ является коэффициентом ряда Фурье $\sum_{m=-\infty}^{\infty} P\left\{\xi_n^l = m\right\} e^{imt}$, который представляет собой характеристическую функцию $M\left(e^{i\xi_n^l t}\right)$ [6].

С учетом формулы (3) вероятность встречи двух частиц ξ^1 и ξ^2 определяется выражением

$$P(A_n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P\left\{\xi_n^1 = m\right\} P\left\{\xi_n^2 = m\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} P\left\{\xi_n^1 = m\right\} e^{imt} \right) \times$$
$$\times \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} P\left\{\xi_n^2 = m\right\} e^{-imt} \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(M\left(e^{i\xi_n^1 t}\right) \right) \left(M\left(e^{-i\xi_n^2 t}\right) \right) dt.$$

Заметим, что $M\left(e^{i\xi_n^1 t}\right)$ и $M\left(e^{i\xi_n^2 t}\right)$ можно представить в виде

$$M\left(e^{i\xi_n^1 t}\right)=M\left(e^{it\left(\tau_1^1+\ldots+\tau_n^1\right)}\right);$$

$$M\left(e^{i\xi_n^2 t}\right)=M\left(e^{it\left(\tau_1^2+\ldots+\tau_n^2\right)}\right).$$

Ввиду независимости и одинакового распределения случайных величин τ_j^l представим характеристическую функцию $M\left(e^{i\xi_n^l t}\right)$ как произведение функций $M\left(e^{i\tau_j^l t}\right)$, заменив τ_j^l на τ^l:

$$M\left(e^{i\xi_n^1 t}\right)=\prod_{j=1}^{n} M\left(e^{i\tau^1 t}\right)=\left[M\left(e^{i\tau^1 t}\right)\right]^n;$$

$$M\left(e^{i\xi_n^2 t}\right)=\prod_{j=1}^{n} M\left(e^{i\tau^2 t}\right)=\left[M\left(e^{i\tau^2 t}\right)\right]^n.$$

Пусть $f_{\tau^1}(t)=M\left(e^{i\tau^1 t}\right)$, $f_{\tau^2}(t)=M\left(e^{i\tau^2 t}\right)$. Тогда

$$P\left(A_n\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f_{\tau^1}(t)\overline{f}_{\tau^2}(t)\right)^n dt,$$

где $\overline{f}_{\tau^2}=M\left(e^{-i\tau^2 t}\right)$.

Рассмотрим поведение искомой вероятности в зависимости от распределения случайной величины τ^l. Пусть закон распределения случайной величины τ^l имеет вид, представленный в табл. 1.

Таблица 1

Закон распределения случайной величины τ^l

τ^l	c_1^l	…	c_r^l	…
$P\left\{\tau^l=c_i^l\right\}$	p_1^l	…	p_r^l	…

Тогда ее характеристическая функция

$$M\left(e^{i\tau^l t}\right)=\sum_{r\in Z} e^{itc_r^l} p_r^l=\sum_{r\in Z}\cos\left(tc_r^l\right)p_r^l+i\sum_{r\in Z}\sin\left(tc_r^l\right)p_r^l.$$

Чтобы избавиться от комплексной части, рассмотрим такое распределение, при котором c_r^l и $-c_r^l$ имеют одинаковую вероятность $p_r^l, r\in Z$, а для случая $c_r^l=0$ p_r^l положим равным нулю. Таким образом,

$$M\left(e^{i\tau^l t}\right)=\sum_{r\in Z}\cos\left(tc_r^l\right)p_r^l .$$

В итоге для двух случайных величин ξ^1 и ξ^2 получим

$$P\left(A_n\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f_{\tau^1}\left(t\right)\right)^n\left(\overline{f}_{\tau^2}\left(t\right)\right)^n dt . \tag{4}$$

Рассмотрим две блуждающие частицы ξ^1 и ξ^2. Пусть сдвиг τ одинаков для обеих частиц и имеет распределение Бернулли [7, 8], указанное в табл. 2.

Таблица 2

Распределение Бернулли

τ	1	−1
$P\{\tau=c_i\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Подынтегральное выражение и интеграл (4) примут вид

$$\left(f\left(t\right)\right)^2=\left(\frac{1}{2}e^{it}+\frac{1}{2}e^{-it}\right)^2=\cos^2 t ;$$

$$P\left(A_n\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(t\right)dt .$$

В предельном случае воспользуемся методом Лапласа [9]. Представим искомый интеграл следующим образом:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(t\right)dt=\int_{-\pi}^{\pi}e^{2n\ln\cos t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}e^{2nv(t)}dt ,$$

где $v\left(t\right)=\ln\cos t$.

Для интеграла вида $F\left(\lambda\right)=\int_a^b f\left(x\right)e^{\lambda S(x)}dx$, где $S\left(x\right)$ — вещественная функция, λ — большой положительный параметр, а $f\left(x\right)$ может принимать комплексные значения, можно применить формулу

$$F\left(\lambda\right)\sim\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''\left(x_0\right)}}f\left(x_0\right)e^{\lambda S(x_0)}\ \left(\lambda\to+\infty\right).$$

В нашем случае $x_0 = 0$ — точка максимума функции $S(x) = 2\ln\cos t$, $f(x) = 1$, $\lambda = n$. Тогда вторая производная $S''(x) = -2\text{tg}^2(x) - 2$, а при $x_0 = 0$ $S''(x_0) = -2$. Тогда

$$P(A_n) \sim \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n^{-\frac{1}{2}} (n \to +\infty).$$

Задача о сближении. При циклическом блуждании его пространство состояний можно представить в виде окружности с точками, в которые может попасть частица. Рассмотрим задачу о встрече двух частиц ξ и η, имеющих непрерывное распределение и совместную плотность распределения $f(x, y)$. Пусть пространство состояний X обоих блужданий представляет собой все множество точек окружности. Требуется найти вероятность встречи частиц на n-м шаге.

Искомую величину можно представить как вероятность попадания составной частицы (ξ, η) на подмножество E, имеющее вид $E = \{(x, x), x \in X\}$. Таким образом,

$$P\{\xi_n = \eta_n\} = P\{(\xi_n, \eta_n) \in E\} = \iint_E f(x, y)\,dxdy.$$

На множестве $X * X$, на котором блуждает составная частица, подмножество E будет иметь вид диагонали, следовательно, интеграл по нему будет равен нулю. Здесь и далее знак «$*$» обозначает декартово произведение множеств.

Окончательно имеем

$$P\{\xi = \eta\} = \iint_E f(x, y)\,dxdy = 0.$$

Как видно, задача о встрече при непрерывном распределении не имеет смысла, поэтому рассмотрим задачу о приближении частиц. Пусть $\xi = e^{it}$ — положение блуждающей частицы на окружности при $0 \le t \le 2\pi$, а плотность распределения имеет вид $P(t)$. Характеристическая функция t определяется выражением

$$Me^{itk} = m_k = \int_0^{2\pi} e^{itk} P(t)\,dt,$$

причем $\overline{m}_k = m_{-k} = \int_0^{2\pi} e^{-itk} P(t)\,dt$.

Заметим, что m_k является коэффициентом ряда Фурье

$$P(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} m_k e^{-itk}.$$

В качестве примера рассмотрим две случайно блуждающие частицы $\xi=e^{it}$ и $\eta=e^{is}$, имеющие распределения $P_\xi(t)$ и $P_\eta(s)$. Требуется найти вероятность их сближения на расстояние не больше, чем ε.

Пусть $d(\xi,\eta)$ — расстояние между частицами. Тогда

$$P\left\{d(\xi,\eta)\le\varepsilon\right\}=\iint\limits_{\{t,s\}:d(t,s)<\varepsilon} P_\xi(t)P_\eta(t)\,dtds=\int\limits_{t,s} P_\xi(t)P_\eta(t)\Phi(t,s)\,dtds, \qquad (5)$$

где $\Phi(t,s)$ — функция-индикатор сближения, $\Phi(t,s)=\begin{cases}1, \ d(t,s)\le\varepsilon;\\ 0, \ d(t,s)>\varepsilon,\end{cases}$.

Удобно представить расстояние $d(\xi,\eta)$ в виде разности между углами. В этом случае его можно заменить следующим выражением:

$$d(\xi,\eta)\sim|\tau-\sigma|,$$

где τ и σ — углы сдвига частиц ξ и η.

Запишем их характеристические функции и плотности распределения:

$$Me^{i\tau k}=m_k(\tau)=\int_0^{2\pi} e^{itk}P_\tau(t)\,dt; \qquad (6)$$

$$Me^{i\sigma k}=m_k(\sigma)=\int_0^{2\pi} e^{itk}P_\sigma(t)\,dt; \qquad (7)$$

$$P_\tau(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} m_k(\tau)e^{-itk};$$

$$P_\sigma(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} m_k(\sigma)e^{-itk}.$$

Функцию-индикатор $\Phi(t,s)$ при использовании сдвигов представим в виде функции одной переменной:

$$\Phi(t,s)=\Psi(t-s)=\Psi(x)=\begin{cases}1,|x|\le\varepsilon;\\ 0,|x|>\varepsilon.\end{cases}$$

В итоге имеем

$$P\left\{|\tau-\sigma|\le\varepsilon\right\}=\int\limits_{t,s}P_\tau(t)P_\sigma(s)\Psi(t-s)dtds=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k,r,l}\int\limits_{t,s}m_k(\tau)m_r(\sigma)h_l e^{-itk}e^{-isr}e^{-i(t-s)l}dtds=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k,r,s}m_k(\tau)m_r(\sigma)h_l\int\limits_{t,s}e^{it(-k-l)}e^{is(-r+l)}dtds,$$

где h_l — коэффициенты ряда Фурье функции-индикатора $\Psi(x)$.

Заметим, что получившийся интеграл равен единице в случае, когда $k=-l$ и $r=l$, и нулю во всех остальных. Таким образом,

$$P\left\{|\tau-\sigma|\le\varepsilon\right\}=\frac{1}{4\pi^2}\sum_l m_{-l}(\tau)m_l(\sigma)h_l=\frac{1}{4\pi^2}\sum_l \bar{m}_l(\tau)m_l(\sigma)h_l\ ,$$

где $\bar{m}_l(\tau)=\int\limits_0^{2\pi}e^{-itl}P_\tau(t)dt$.

Представим τ и σ в виде сумм углов сдвигов, совершенных частицами за один шаг, т. е.

$$\tau_n=\xi_1+\ldots+\xi_n;$$

$$\sigma_n=\eta_1+\ldots+\eta_n.$$

Величины ξ_i и η_i ($i=1,2,\ldots,n$) независимы и имеют распределения $p(x)$ и $q(x)$ соответственно.

Тогда характеристические функции (6) и (7) примут вид

$$m_l(\tau)=\prod_{i=1}^n m_l(\xi_i)=\left[m_l(\xi_1)\right]^n;$$

$$m_l(\sigma)=\prod_{i=1}^n m_l(\eta_i)=\left[m_l(\eta_1)\right]^n,$$

где $m_l(\xi_1)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{itl}p(t)dt$; $m_l(\eta_1)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{itl}q(t)dt$.

Искомая вероятность (5) будет определяться выражением

$$P\left\{|\tau_n-\sigma_n|\le\varepsilon\right\}=\frac{1}{4\pi^2}\sum_l\left(\bar{m}_l(\xi_1)m_l(\eta_1)\right)^n h_l\ .$$

В предельном случае при больших n получаем, что вероятность сближения эквивалентна следующей величине:

$$P\left\{|\tau_n-\sigma_n|\le\varepsilon\right\}\sim h\theta^n,$$

где $\theta=\max\limits_l\left(\bar{m}_l(\xi_1)m_l(\eta_1)\right)$, h — соответствующий θ коэффициент h_l.

Задача о встрече при циклическом блуждании. Рассмотрим случай, когда пространство состояний представлено набором точек, равномерно распределенным на окружности, т. е. $X=\left\{\frac{2\pi}{N}k, k=0,1,...,N-1\right\}$, где N — число точек. Пронумеровав точки, получим новое пространство состояний $Z_N=\{0,1,...,N-1\}$. Пусть ξ и η — случайные величины в пространстве Z_N. Требуется найти вероятность их встречи на n-м шаге.

Искомая величина имеет вид

$$P\{\xi_n=\eta_n\}=\sum_{x\in Z_N}P\{\xi_n=x\}P\{\eta_n=x\}. \tag{8}$$

Представим исходные случайные величины в виде сумм сдвигов σ:

$$\xi_n=\sigma_1^1+...+\sigma_N^1;$$

$$\eta_n=\sigma_1^2+...+\sigma_N^2,$$

где σ_j^i — независимые одинаково распределенные случайные величины при $i=1,2$, $j=1,...,n$.

Пусть $\hat{\xi}_n(x)=Me^{\frac{i2\pi\xi_n x}{N}}=\left(Me^{\frac{i2\pi\sigma_1^1 x}{N}}\right)^n$ и $\hat{\eta}_n(x)=Me^{\frac{i2\pi\eta_n x}{N}}=\left(Me^{\frac{i2\pi\sigma_1^2 x}{N}}\right)^n$ — характеристические функции ξ и η соответственно. Очевидно, что $M\left(e^{\frac{ix\sigma_1^1 2\pi}{N}}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}e^{\frac{2\pi i}{N}\sigma_1^1 k}P\{\xi_n=k\}=f(x)$.

Тогда искомую вероятность (8) можно представить как

$$P\{\xi_n=\eta_n\}=\sum_{x\in Z_N}P\{\xi_n=x\}P\{\eta_n=x\}=\sum_{x\in Z_N}f^n(x)\bar{f}^n(x)=\sum_{x\in Z_N}|f(x)|^{2n},$$

где $\bar{f}^n(x)=M\left(e^{\frac{-ix\sigma_1^1 2\pi}{N}}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}e^{\frac{-2\pi i}{N}\sigma_1^1 k}P\{\xi_n=k\}$.

Если $n\to\infty$, то полученная сумма эквивалентна величине Ab^{2n}, где A — количество тех x, на которых достигается максимум; $b=\max|f(x)|^2$.

Задача о первой встрече. Рассмотрим задачу о первой встрече двух и более блуждающих частиц. Пусть даны две блуждающие частицы ξ_1 и ξ_2 на множестве $X=\{1,...,N\}$, имеющие начальные точки $\xi_{10}=a$, $\xi_{20}=b$ и матрицы переходных вероятностей $\mathbf{Q}_1=(q_1(x_1,y_1))$ и $\mathbf{Q}_2=(q_2(x_2,y_2))$. Требуется найти вероятность их первой встречи на n-м шаге.

Решение задачи в исходном виде сводится к поиску вероятности

$$P\left\{\xi_{1k} \neq \xi_{2k}, k = 1,...,n-1, \xi_{1n} = \xi_{2n}\right\}. \qquad (9)$$

Для упрощения введем составную частицу $\eta = \left(\xi_1, \xi_2\right)$, блуждающую на множестве $Y = X * X$. Она задается начальным распределением

$$p_0\left(x_1, x_2\right) = p_0\left(Nx_1 + x_2\right) = \begin{cases} 1, \left(x_1, y_2\right) = \left(a, b\right); \\ 0, \left(x_1, y_2\right) \neq \left(a, b\right), \end{cases}$$

и матрицей переходных вероятностей

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 * \mathbf{Q}_2 = \left(q\left(x_1, x_2, y_1, y_2\right) = q_1\left(x_1, y_1\right) q_2\left(x_2, y_2\right)\right).$$

Сведем исходную задачу к ранее рассмотренной задаче о достижении множества [10]. Пусть множество $E = \left\{\left(x, x\right), x \in X\right\}$ — «диагональ» множества Y, соответственно, $E' = X \setminus E$. Представим искомую вероятность (9) в виде

$$p_n = P\left\{\eta_k \in E', k = 1,...,n-1, \eta_n \in E\right\} = \left(\left(Q\chi_{E'}\right)^{n-1} Q\chi_E, \delta_{ab}\right),$$

где $\delta_{ab}\left(x, y\right) = \delta_{ab}\left(Nx + y\right) = \begin{cases} 1, \left(x, y\right) = \left(a, b\right); \\ 0, \left(x, y\right) \neq \left(a, b\right). \end{cases}$

Оценим p_n при $n \to \infty$. Для этого рассмотрим величину $\left\|Q\chi_{E'}\right\|$. Используя ранее полученную величину $\left\|A\right\| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$, получим

$$\left\|Q\chi_{E'}\right\| \leq \sum_{\left(x_1, y_1\right) \neq \left(x_2, y_2\right)} q_1\left(x_1, y_1\right) q_2\left(x_2, y_2\right) = 1 - \sum_{\left(x_1, y_1\right) = \left(x_2, y_2\right)} q_1\left(x_1, y_1\right) q_2\left(x_2, y_2\right) =$$
$$= 1 - \sum_{\left(x, y\right)} q_1\left(x, y\right) q_2\left(x, y\right) = 1 - \left(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2\right).$$

Здесь записано скалярное произведение матриц $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ как сумма произведений матричных элементов. Тогда

$$p_n \leq \left(1 - \left(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2\right)\right)^n.$$

Очевидно, что при $n \to \infty$ вероятность первой встречи частиц на n-м шаге будет стремиться к нулю.

При рассмотрении более общего случая задачи о первой встрече k частиц, где $k > 2$, применяются аналогичные рассуждения.

Пусть дано k блуждающих частиц $\xi_i, i = 1, 2, ..., k,$ на множестве $X = \left\{1, ..., N\right\}$, имеющих начальные точки $\xi_{i0} = a_i$ и матрицы переходных вероятностей $\mathbf{Q}_i = \left(q_i\left(x_i, y_i\right)\right)$. Требуется найти вероятность их первой встречи на n-м шаге.

Решение сводится к поиску следующей вероятности:

$$P\left\{\xi_{1j} \neq \xi_{2j} \neq \ldots \xi_{kj}, j = 1, \ldots, n-1, \xi_{1n} = \xi_{2n} = \ldots = \xi_{kn}\right\}. \quad (10)$$

Вводя составную частицу $\eta = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\right)$, блуждающую на множестве $Y = X * X * \ldots * X$, сведем задачу к задаче о достижении множества.

Начальное распределение частицы η имеет вид

$$p_0\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) = p_0\left(Nx_1 + Nx_2 + \ldots + Nx_{k-1} + x_k\right) = \\ = \begin{cases} 1, \left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) = \left(a_1, a_2, \ldots, a_k\right); \\ 0, \left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) \neq \left(a_1, a_2, \ldots, a_k\right). \end{cases}$$

Назовем множество $E = \left\{\left(x, x, \ldots, x\right), x \in X\right\}$ — «диагональю» множества Y, соответственно, $E' = X \setminus E$. Запишем искомую вероятность (10) как

$$p_n = P\left\{\eta_j \in E', j = 1, \ldots, n-1, \eta_n \in E\right\} = \left(\left(Q\chi_{E'}\right)^{n-1} Q\chi_E, \delta\right),$$

где $\delta\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) = \delta\left(Nx_1 + Nx_2 + \ldots Nx_k\right) = \begin{cases} 1, \left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) = \left(a_1, a_2, \ldots, a_k\right); \\ 0, \left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) \neq \left(a_1, a_2, \ldots, a_k\right). \end{cases}$

Оценим величину p_n при $n \to \infty$. Аналогично случаю с двумя частицами рассмотрим величину $\left\|Q\chi_{E'}\right\|$ и получим

$$\left\|Q\chi_{E'}\right\| \leq \sum_{\left(x_1, y_1\right) \neq \left(x_2, y_2\right) \neq \ldots \neq \left(x_k, y_k\right)} q_1\left(x_1, y_1\right) \ldots q_k\left(x_k, y_k\right) = \\ = 1 - \sum_{\left(x_1, y_1\right) = \left(x_2, y_2\right) = \ldots = \left(x_k, y_k\right)} q_1\left(x_1, y_1\right) \ldots q_k\left(x_k, y_k\right) = \\ = 1 - \sum_{\left(x, y\right)} q_1\left(x_1, y_1\right) \ldots q_k\left(x_k, y_k\right) = 1 - \left(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_k\right).$$

Окончательно имеем

$$p_n \leq \left(1 - \left(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_k\right)\right)^n.$$

Очевидно, что при $n \to \infty$ вероятность первой встречи частиц на n-м шаге будет стремиться к нулю.

Выводы. При исследовании получены выражения для определения вероятности встречи двух и более блуждающих частиц.

Даны ее асимптотические оценки при большом времени блуждания.

Подготовлен материал для исследования следа случайного блуждания на некотором множестве и задачи о многократной встрече частиц.

Литература

[1] Розанов Ю.А. *Случайные процессы (краткий курс)*. Москва, Наука, 1971, 286 с.

[2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва, Наука, 1972, 496 с.

[3] Зорич В.А. *Математический анализ*. Ч. II. Москва, МЦНМО, 2002, 794 с.

[4] Исмагилов Р.С. Произведения Рисса, случайное блуждание и спектр. *Функц. анализ и его прил.*, 2002, т. 36, № 1, с. 16–29.

[5] Власова Е.В. *Ряды*. Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006, 616 с.

[6] Ито К. *Вероятностные процессы*. Вып. I. Пер. с японского. Москва, Издательство иностранной литературы, 1960, 135 с.

[7] Spitzer F. Principles of random walk. New York, Springer-Verlag, 1964, 600 p.

[8] Круглов В.М. Об одном тождестве для распределения суммы независимых случайных величин. *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, т. 58, № 2, с. 396–397.

[9] Федорюк М.В. *Асимптотика: интегралы и ряды*. Москва, Наука, 1987, 544 с.

[10] Крысяев Р.Ю. Случайные блуждания: задача о достижении множества. *Политехнический молодежный журнал*, 2017, № 4. URL: http://ptsj.ru/catalog/math/compmath/74.html.

Крысяев Роман Юрьевич — студент кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Рабкин Дмитрий Леонидович — студент кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Р.С. Исмагилов, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

INVESTIGATING PROBLEMS OF ENCOUNTERS BETWEEN PARTICLES PERFORMING A RANDOM WALK

R.Yu. Krysyaev roman-krysyaev@yandex.ru
D.L. Rabkin rabkind@rambler.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article deals with problems of encounters between particles performing a random walk over a finite (or a countable) set and an infinite set, including those that employ Fourier series to obtain a solution. We derive the probability of an encounter between two particles for a Bernoulli random walk. We investigated the problems of two particles approaching each other while performing a random walk over a continuous set, and of particles encountering each other during a random walk over a discrete cyclically ordered set. We present the problem of the first encounter and a method of reducing it to the problem of attaining a set. We study the limit behaviour of the particle encounter probability for high random walking time in each problem. We show how to apply Laplace integrals to seeking the limit probability for the encounter of two particles performing a random walk over an infinite set.

Keywords

Markov processes, random walks, stationary distribution, Cartesian product, Fourier series, Laplace's method, Bernoulli distribution

References

[1] Rozanov Yu.A. Sluchaynye protsessy (kratkiy kurs) [Stochastic processes (short course)]. Moscow, Nauka publ., 1971, 286 p.

[2] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza [Elements of function theory and functional analysis]. Moscow, Nauka publ., 1972, 496 p.

[3] Zorich V.A. Matematicheskiy analiz. Ch. II [Mathematical analysis. P. II]. Moscow, MTsNMO publ., 2002, 794 p.

[4] Ismagilov R.S. Riesz products, random walks, and the spectrum. *Funktsionalny analiz i ego prilojeniya*, 2002, vol. 36, no. 1, pp. 16–29. (Eng. version: *Functional Analysis and Its Applications*, 2002, vol. 36, no. 1, pp. 13–24).

[5] Vlasova E.V. Ryady [The series]. Moscow, Bauman Press, 2006, 616 p.

[6] Ito K. Veroyatnostnye protsessy. Vyp. I [Probabilistic processes. Iss. I]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoy literatury publ., 1960, 135 p.

[7] Spitzer F. Principles of random walk. New York, Springer-Verlag, 1964, 600 p.

[8] Kruglov V.M. On one identity for distribution of sums of independent random variables. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya*, 2013, vol. 58, no. 2, pp. 396–397. (Eng. version: *Theory of Probability and its Applications*, 2014, vol. 58, no. 2, pp. 329–331).

[9] Fedoryuk M.V. Asimptotika: Integraly i ryady [Asymptotics: integrals and series]. Moscow, Nauka publ., 1987, 544 p.

[10] Krysyaev R.Yu. Random walks: the problem of attaining a set. *Politekhnicheskiy molodezhnyy zhurnal*, 2017, no. 4. Available at: http://ptsj.ru/catalog/math/compmath/74.html.

Krysyaev R.Yu. — student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University , Moscow, Russian Federation.

Rabkin D.L. — student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — R.S. Ismagilov, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.