

ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА АППРОКСИМАЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ОБЪЕМА ДВИЖЕНИЯ ЛУЧЕЗАПЯСТНОГО СУСТАВА

О.Ю. Щербак

scherbak.olga.j@student.bmstu.ru

SPIN-код: 2956-0295

А.Л. Масленников

amas@bmstu.ru

SPIN-код: 7087-6303

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Объем движения лучезапястного сустава как замкнутый контур можно аппроксимировать полиномиальной функцией с использованием трехуровневого метода. В работе рассмотрено влияние на качество аппроксимации ряда факторов, а именно: ширины и наклона ленточной поверхности (специфичной для трехуровневого метода), использования в аппроксимации опорных точек и определения их оптимального количества. Предлагаемые по результатам исследования значения соответствующих величин позволяют существенно повысить качество аппроксимации объема движения.

Ключевые слова

Биомеханика, аппроксимация, трехуровневый метод, точность аппроксимации, объем движения, лучезапястный сустав

Поступила в редакцию 20.11.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Введение. В медицине одним из способов диагностики состояния лучезапястного сустава является определение объема движения [1–3], который характеризуется максимальным угловым отклонением сустава от некоторого нейтрального положения в процессе движения в плоскостях приведения-отведения и растяжения-сжатия, как проиллюстрировано на рис. 1.

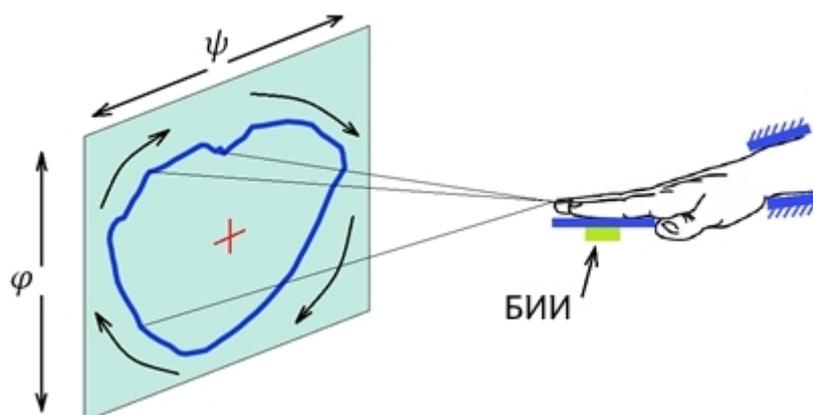


Рис. 1. Схема эксперимента (БИИ — блок инерциальных измерений)

В этой связи интерес представляет аппроксимация замкнутого контура объема движения полиномиальной функцией, что в дальнейшем может быть использовано в качестве базиса для формирования экспертной системы диагностики состояния лучезапястного сустава. В работе [4] для решения этой задачи применен трехуровневый метод, отличительной чертой которого является формирование и использование ленточной поверхности, характеризуемой наклоном c и шириной δ [5–7]. Примерный вид ленточной поверхности с двумя дополнительными контурами (внутренним Γ_{-c} и внешним Γ_{+c}) представлен на рис. 2.

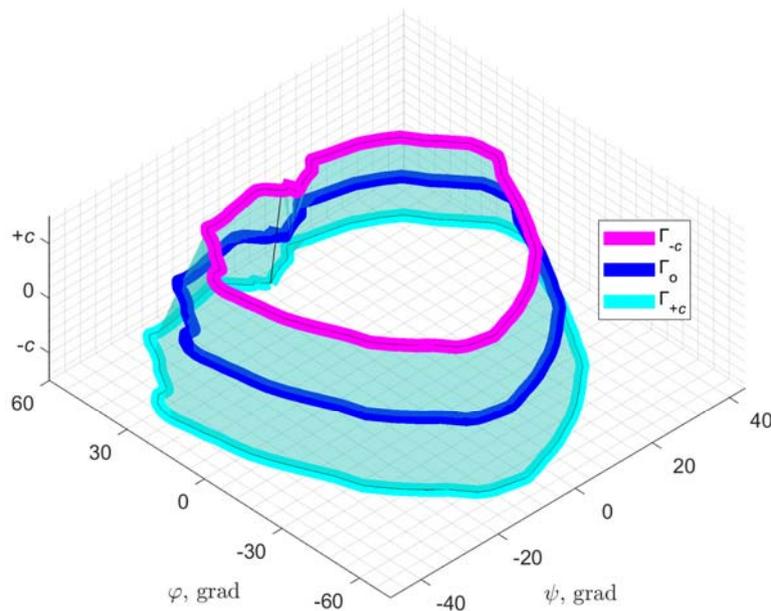


Рис. 2. Ленточная поверхность с двумя дополнительными контурами

Качество аппроксимации можно оценить по двум критериям, по аналогии с определением качества параметрической идентификации [8–10], как это сделано в [11]. Первый критерий ε_1 — отклонение аппроксимированного контура Γ_A от исходного контура Γ_0 , характеризующий попадание в модель и определяемый, например, следующим соотношением:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \{\psi_i, \varphi_i\}_A - \{\psi_i, \varphi_i\}_0 \right|^2},$$

где $\{\psi_i, \varphi_i\}_A$, $\{\psi_i, \varphi_i\}_0$ — координаты i -й точки аппроксимированного и исходного контура соответственно; $\left| \{\psi_i, \varphi_i\}_A - \{\psi_i, \varphi_i\}_0 \right|$ — расстояние между ними.

Второй критерий описывает разброс оценок $\hat{\Theta}$ при различных реализациях случайных процессов (измерительных шумов). Важность этого критерия обусловлена необходимостью определения доверительного интервала, в котором

лежат истинные параметры ϑ_0 , и, как следствие, оценки точности аппроксимации. Критерий разброса оценок $\hat{\vartheta}$ можно сформулировать как норму ковариационной матрицы ошибок оценок $\hat{\vartheta}$ вектора параметров $f(\psi, \varphi, \vartheta)$:

$$\varepsilon_2 = \left\| \text{cov}_k(\hat{\vartheta}^k) \right\| = \|P_{\vartheta}\|.$$

В данной работе исследовано влияние на качество аппроксимации ширины и наклона ленточной поверхности, обоснована необходимость использования опорных точек и определено их оптимальное количество. Аппроксимация исходного контура проведена для всех комбинаций порядков полиномиальной функции $n = \{4, 8, 16\}$ и количества опорных точек $N = \{0, 5, 10\}$. Для оценки влияния рассматриваемых факторов использованы описанные выше критерии ε_1 и ε_2 . Для учета наличия стохастических процессов (измерительных шумов) аппроксимацию проводили K раз для исходного контура с добавлением аддитивного белого шума. По полученной статистической выборке вычисляли среднее значение критерия $\mathbb{E}[\varepsilon_1]$ и значение критерия ε_2 .

Влияние наклона c ленточной поверхности. Величину c , которая характеризует наклон ленточной поверхности, учитывают в определении оценки параметров $\hat{\vartheta}$ следующим образом:

$$\hat{\vartheta} = \arg \min_{\vartheta \in \Theta} \sum (\mathbf{m}^i \vartheta - b_i)^2, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ +c \end{bmatrix}, \quad M_{3L} = \begin{bmatrix} M_{\Gamma_{-c}} \\ M_{\Gamma_0} \\ M_{\Gamma_{+c}} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{m}^i — вектор значений аргументов i -й точки из всех трех контуров (строка матрицы M_{3L}); b_i — элемент вектора \mathbf{b} , формирующего наклон ленточной поверхности.

Для оценки влияния c на качество аппроксимации значения критериев $\mathbb{E}[\varepsilon_1]$ и ε_2 были получены при изменении c в диапазоне $0,01 \dots 0,10$ с шагом $0,01$, при постоянной ширине ленточной поверхности $\delta = 0,05$. Зависимости изменения критериев $\mathbb{E}[\varepsilon_1]$ и ε_2 от c представлены на рис. 3 и 4, где для удобства сравнения результатов по критерию ε_2 его значение нормируется на квадрат количества элементов в векторе $\hat{\vartheta}$.

Очевидно, что наилучшим выбором c по критерию ε_2 является наименьшее значение, т. е. $0,01$. Однако при стремлении c к нулю качество аппроксимации по критерию ε_1 ухудшается. Сделать однозначный выбор конкретного значения c не представляется возможным. Тем не менее, исходя из полученных результатов, примем c равным $0,05$ (соответствующие столбцы на линейчатых диаграммах выделены красным), дающим наиболее стабильный качественный результат.

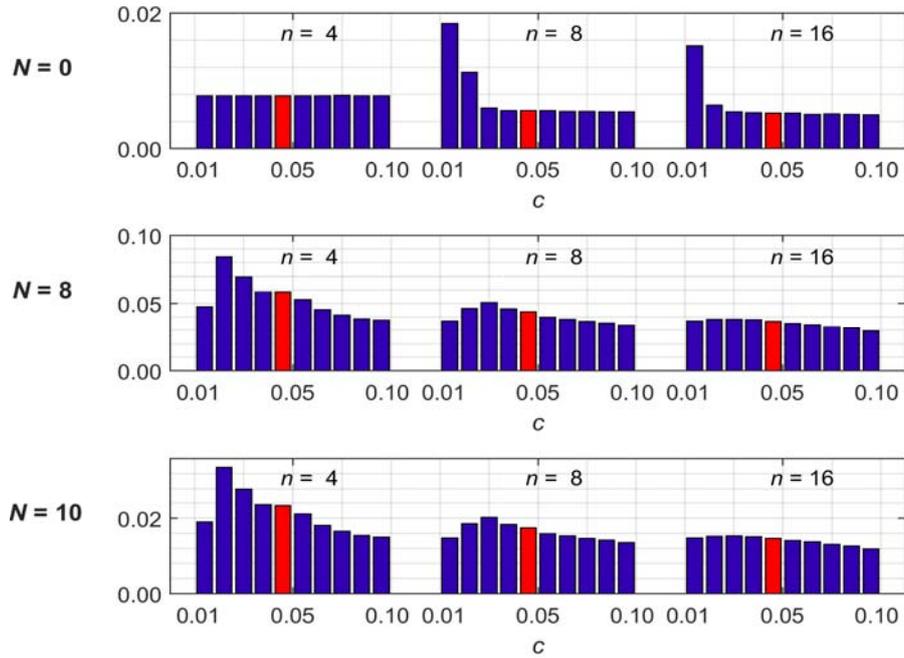


Рис. 3. Зависимость $\mathbb{E}[\varepsilon_1]$ от наклона ленточной поверхности

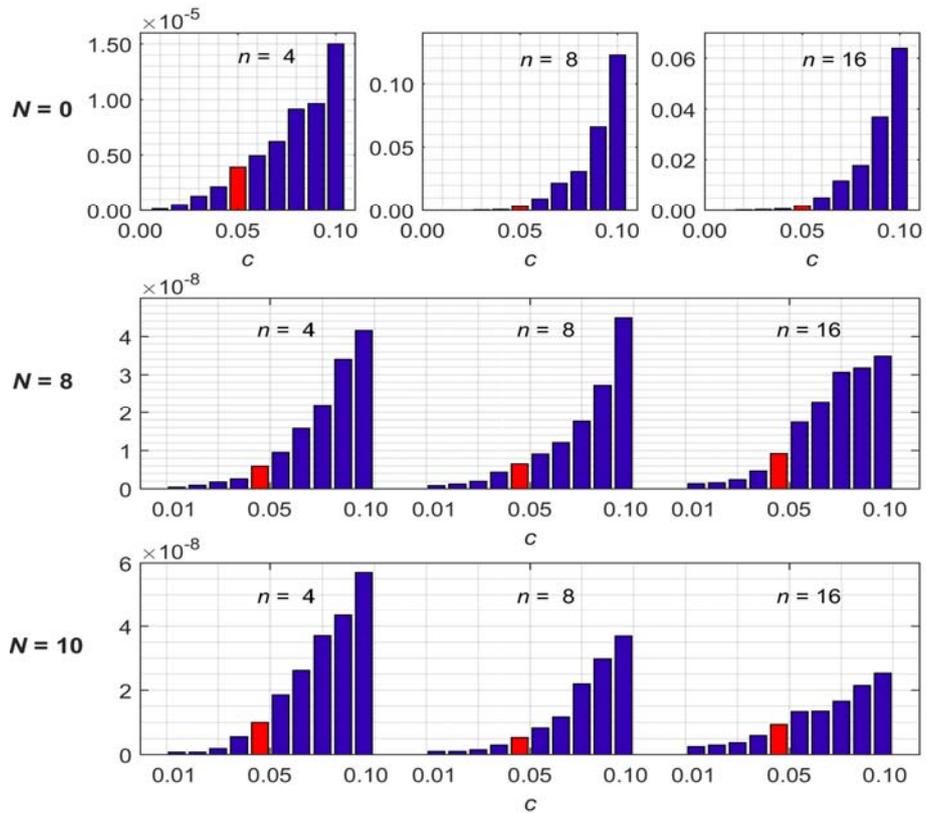


Рис. 4. Зависимость ε_2 от наклона ленточной поверхности

Влияние ширины δ ленточной поверхности. Ширина ленточной поверхности определяет, на сколько внутренний Γ_{-c} и внешний Γ_{+c} контуры удалены от исходного контура Γ_0 . Чем шире ленточная поверхность ($\delta \rightarrow \infty$), тем больше свободы в определении параметров полиномиальной функции при аппроксимации. Чем уже ленточная поверхность ($\delta \rightarrow 0$), тем этой свободы меньше, и, как следствие, максимально возможная ошибка аппроксимации e будет заведомо меньше, однако вычислений потребуется больше.

Для оценки влияния δ на качество аппроксимации проведены те же тесты, что и при исследовании наклона ленточной поверхности, только в данном случае наклон ленточной поверхности фиксировали при $c = 0,05$, а ширину ленточной поверхности изменяли в диапазоне $0,01 \dots 0,10$ с шагом $0,01$. Полученные результаты (зависимость изменения $\mathbb{E}[\varepsilon_1]$ и ε_2 от δ) представлены на рис. 5 и 6.

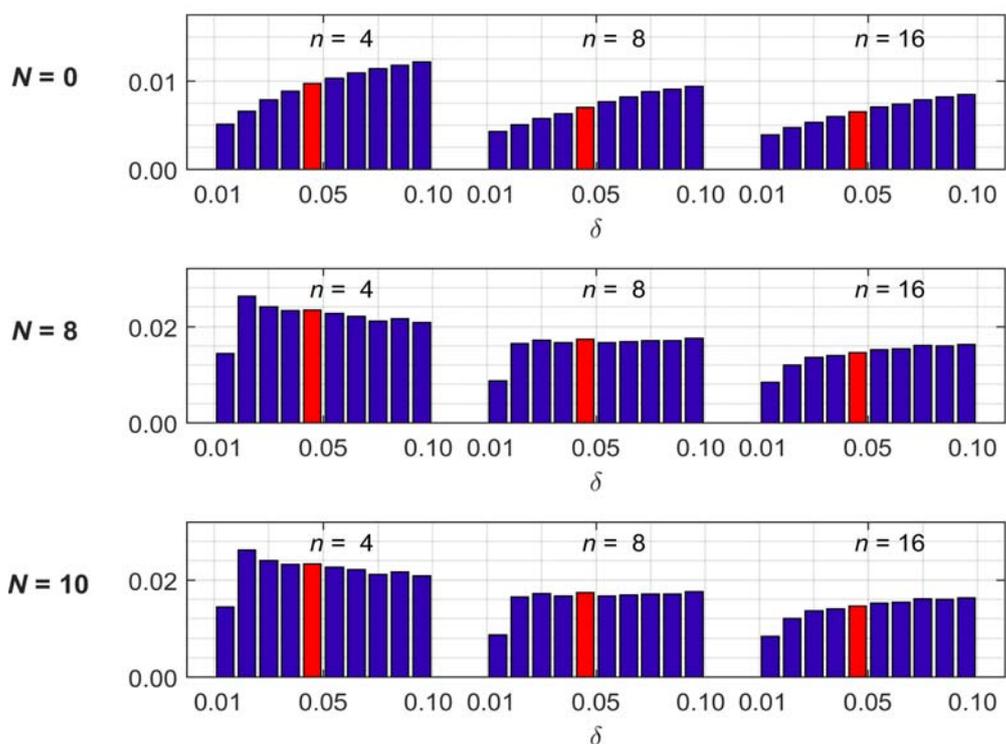


Рис. 5. Зависимость $\mathbb{E}[\varepsilon_1]$ от ширины ленточной поверхности

В общем случае минимальное значение критерия ε_1 соответствует наименьшему значению $\delta = 0,01$, однако при стремлении δ к некоторому минимуму значение критерия ε_2 , напротив, увеличивается, что отчетливо видно на рис. 6 для случая аппроксимации без опорных точек ($N = 0$). При использовании опорных точек значения ε_2 в среднем имеют порядок 10^{-8} среди всех рассматриваемых значений δ без явной тенденции к увеличению или уменьшению. Поскольку данный порядок величины ε_2 свидетельствует о хорошем попадании

в параметры, выбор δ по этим показаниям нецелесообразен. В итоге в качестве наилучшего значения δ можно принять значение 0,05 (соответствующие столбцы на линейчатых диаграммах выделены красным).

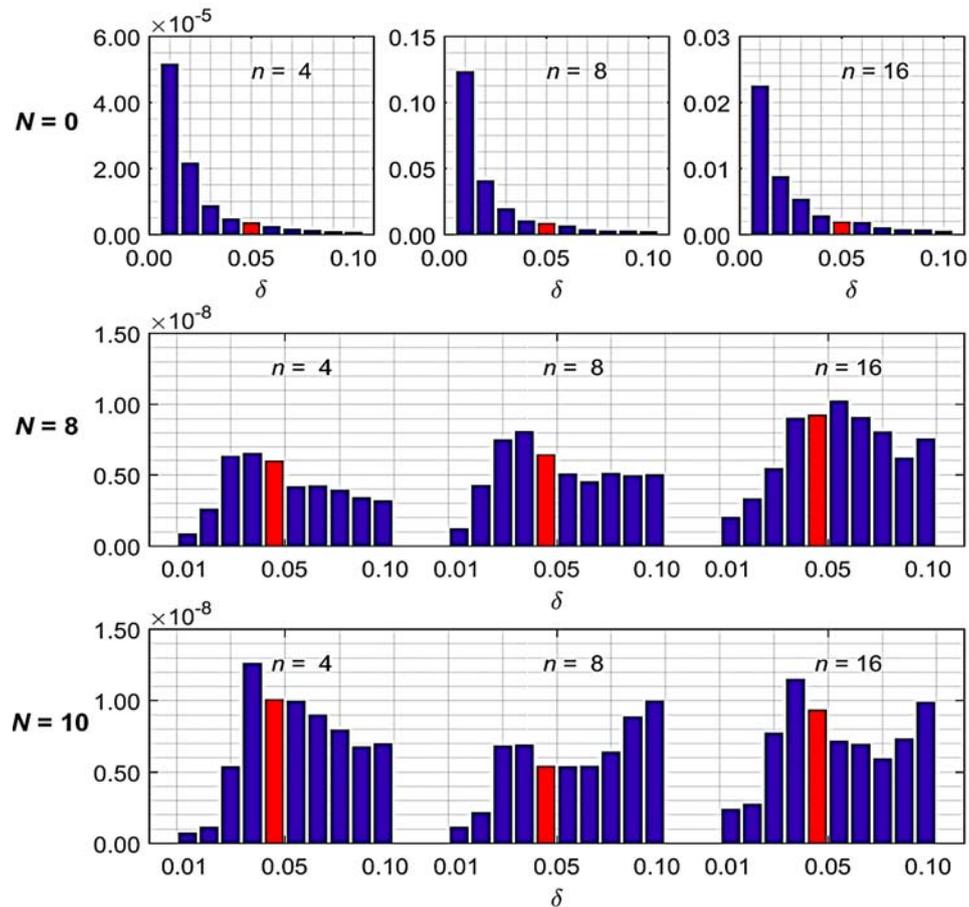


Рис. 6. Зависимость ε_2 от ширины ленточной поверхности

Отметим, что с учетом предварительной нормировки границ контура в диапазоне $[-1; 1]$ по каждому из углов выбранное значение δ согласуется с предложенным в работе [2], где рекомендовано выбирать δ как 2...5 % рассматриваемого диапазона значений.

Влияние опорных точек. Опорные точки — это точки исходного контура Γ_0 , через которые аппроксимированный контур Γ_A обязательно должен пройти. Выбор опорных точек может быть различным. Чтобы наиболее точно аппроксимировать общий характер исходного контура, опорные точки можно выбрать как лежащие на наиболее прямых его участках. Ранее в работе [1] было показано, что в общем случае точность аппроксимации без использования опорных точек выше, чем в случае использовании опорных точек, что проиллюстрировано на рис. 3 и 5 по значениям критерия $\mathbb{E}[\varepsilon_1]$. Однако использование опорных точек позво-

ляет связать получаемое решение (аппроксимируемый контур Γ_A) с точками исходного контура Γ_0 , и, как следствие, получить функциональное описание (полиномиальной функцией) непосредственно исходного контура. Без использования опорных точек, по сути, получается функциональное описание контура, наилучшим образом (в контексте метода наименьших квадратов) вписанного в пространство между внутренним Γ_{-c} и внешним Γ_{+c} контурами. Рис. 4 и 6 отчетливо иллюстрируют попадание в параметры аппроксимированной функции при использовании опорных точек (значения ε_2 на несколько порядков меньше, чем для случая без использования опорных точек). Таким образом, получаемую оценку $\hat{\vartheta}$ параметров полиномиальной функции $f(\psi, \varphi, \vartheta)$, аппроксимирующей исходный контур Γ_0 , можно принять в качестве истинной.

Оптимальное количество опорных точек. В рассмотренных ранее случаях количество опорных точек было равно 5 и 10, что не позволяет сделать однозначный вывод об их оптимальном (приводящим к наилучшему качеству аппроксимации) количестве. Для его определения была проведена серия из K тестов, в которых c и δ принимали равными 0,05, а количество опорных точек изменяли от 1 до 10. По результатам тестов получены значения $\mathbb{E}[\varepsilon_1]$ и критерия ε_2 , представленные на рис. 7.

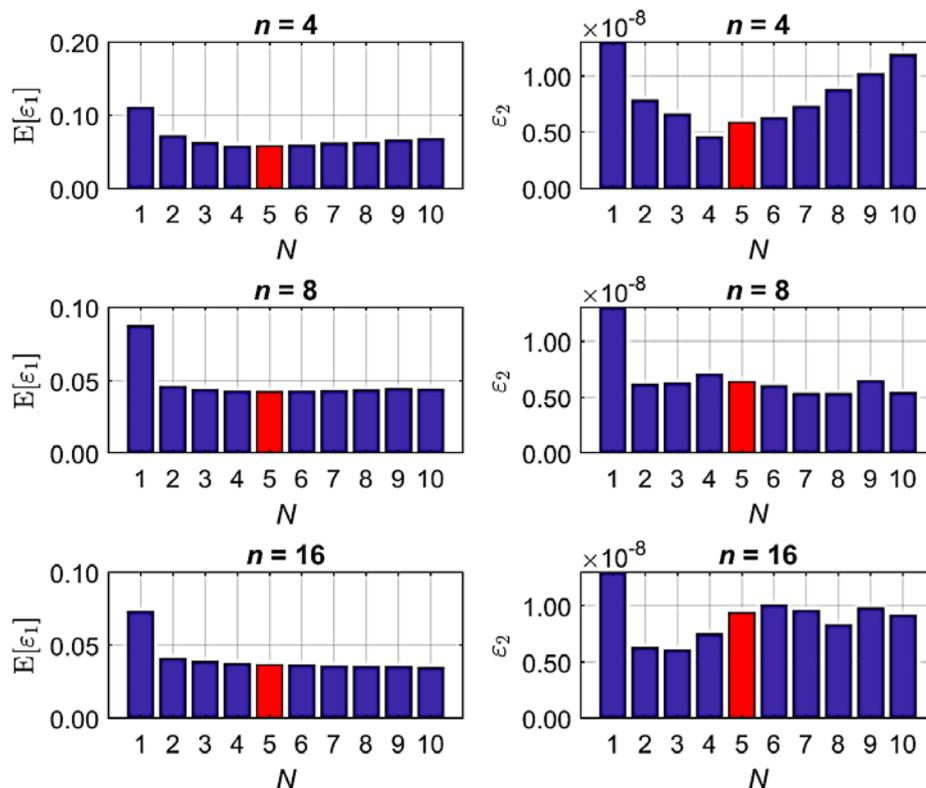


Рис. 7. Зависимость критериев $\mathbb{E}[\varepsilon_1]$ и ε_2 от количества опорных точек

По результатам тестов видно, что использования одной опорной точки недостаточно для получения удовлетворительного качества аппроксимации. Выбор большего количества опорных точек позволяет решить задачу аппроксимации замкнутого контура с достаточным качеством. На текущий момент в качестве оптимального выберем $N = 5$ опорных точек. Отметим, что количество опорных точек может варьироваться в зависимости от формы исходного контура. При отклонении исходного контура от эллиптической формы (например, в случае явных патологий сустава) может понадобиться большее количество опорных точек, что требует дополнительного исследования.

Выводы. В работе рассмотрено влияние наклона c и ширины δ ленточной поверхности, наличия и количества опорных точек на качество аппроксимации полиномиальной функцией объема движения лучезапястного сустава. Выявлено, что наилучшие значения c и δ должны лежать в окрестности точки 0,05, а включение опорных точек в задачу аппроксимации обеспечивает меньший разброс оценок и тем самым позволяет принять полученные оценки в качестве истинных с большей вероятностью. Количество опорных точек предлагается принять равным пяти, однако в целом этот выбор будет зависеть от формы исходного контура, для чего потребуется дополнительное исследование.

Литература

- [1] Shah D.S., Middleton C., Gurdezi S., Horwitz M.D., Kedgley A.E. The effects of wrist motion and hand orientation on muscle forces: A physiologic wrist simulator study. *Journal of Biomechanics*, July 2017, vol. 60, pp. 232–237.
- [2] Gracia-Ibáñez V., Vergara M., Sancho-Bru J.L., Mora M.C., Piqueras C. Functional range of motion of the hand joints in activities of the International Classification of Functioning, Disability and Health. *Journal of Hand Therapy*, July–September 2017, vol. 30, no. 3, pp. 337–347.
- [3] Ryu J., Cooney W.P.III, Askew L.J., An K., Chao E.Y.S. Functional ranges of motion of the wrist joint. *Journal of Hand Surgery*, May 1991, vol. 16, no. 3, pp. 409–419.
- [4] Щербак О.Ю., Масленников А.Л. Аппроксимация полиномиальной функцией объема движения лучезапястного сустава. *Молодежный научно-технический вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2017, вып. 7. URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/859758.html> (дата обращения 23.09.2017).
- [5] Blane M.M., Lei Z., Civi H., Cooper D.B. The 3L Algorithm for Fitting Implicit Polynomial Curves and Surfaces to Data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, March 2000, vol. 22, no. 3, pp. 298–313.
- [6] Helzer A., Barzohar M., Malah D. Robust Fitting of 2D Curves and 3D Surfaces by Implicit Polynomials. *Technical Report. Technion IIT, Department of Electrical Engineering*, 2002, p. 32.
- [7] Helzer A., Barzohar M., Malah D. Stable Fitting of 2D Curves and 3D Surfaces by Implicit Polynomials. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, October 2004, vol. 26, no. 10, pp. 1283–1294.

- [8] Ljung L. *System Identification — Theory for the User*. Prentice-Hall, 1999, 609 p.
- [9] Hjalmarsson H., Mårtensson J., Rojas C.R., Söderström T. On the accuracy in errors-in-variables identification compared to prediction-error identification. *Automatica*, December 2011, vol. 47, no. 12, pp. 2704–2712.
- [10] Mårtensson J., Everitt N., Hjalmarsson H. Covariance analysis in SISO linear systems identification. *Automatica*, March 2017, vol. 77, pp. 82–92.
- [11] Тяпкина П.Д., Масленников А.Л. Сравнение входных сигналов для параметрической идентификации во временной и в частотной областях биомеханических систем. *Молодежный научно-технический вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2017, вып. 7. URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/859770.html> (дата обращения 23.09.2017).

Щербак Ольга Юрьевна — студентка кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Масленников Андрей Леонидович — аспирант кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Задорожная Наталья Михайловна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**QUALITY OF THE WRIST RANGE OF MOTION CURVE
APPROXIMATION BY THE POLYNOMIAL FUNCTION**

O.Yu. Shcherbak

scherbak.olga.j@student.bmstu.ru

SPIN-код: 2956-0295

A.L. Maslennikov

amas@bmstu.ru

SPIN-код: 7087-6303

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

Wrist joint range of motion as an implicit curve could be approximated by the polynomial function using 3L algorithm. In this paper we discuss how different factors, such as inclination and width of the ribbon surface (distinguishing feature of the 3L algorithm) and addition of positional control points, affect the quality of such approximation. We also address the question of optimal amount of those points. Results shown that that the right choice of those factors increases the quality of the approximation.

Keywords

Biomechanics, approximation, 3L algorithm, approximation quality, approximation accuracy, wrist joint, range of motion

© Bauman Moscow State Technical University, 2017

References

- [1] Shah D.S., Middleton C., Gurdezi S., Horwitz M.D., Kedgley A.E. The effects of wrist motion and hand orientation on muscle forces: A physiologic wrist simulator study. *Journal of Biomechanics*. July 2017, vol. 60, pp. 232–237.
- [2] Gracia-Ibáñez V., Vergara M., Sancho-Bru J.L., Mora M.C., Piqueras C. Functional range of motion of the hand joints in activities of the International Classification of Functioning, Disability and Health. *Journal of Hand Therapy*. July–September 2017, vol. 30, no. 3, pp. 337–347.
- [3] Ryu J., Cooney W.P.III, Askew L.J., An K., Chao E.Y.S. Functional ranges of motion of the wrist joint. *The Journal of Hand Surgery*. May 1991, vol. 16, no. 3, pp. 409–419.
- [4] Shcherbak O.Yu., Maslennikov A.L. Approksimatsiya polinomial'noy funktsiyey ob'yema dvizheniya luchezyapastnogo sustava [Wrist range of motion curve approximation by the polynomial function]. *Molodezhnyiy nauchno-tehnicheskiy vestnik. MGTU im. N.E. Baumana. Elektron. zhurn.* [Youth herald of the Bauman Moscow State Technical University], 2017, vol. 7. Available at: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/859758.html> (in Russ.).
- [5] Blane M.M., Lei Z., Civi H., Cooper D.B. The 3L Algorithm for fitting implicit polynomial curves and surfaces to data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. March 2000, vol. 22, no. 3, pp. 298–313.
- [6] Helzer A., Barzohar M., Malah D. Robust fitting of 2D Curves and 3D surfaces by implicit polynomials. *Technical Report. Technion IIT, Department of Electrical Engineering*, 2002, p. 32.
- [7] Helzer A., Barzohar M., Malah D. Stable fitting of 2D curves and 3D surfaces by implicit polynomials. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. October 2004, vol. 26, no. 10, pp. 1283–1294.
- [8] Ljung L. System Identification. Theory for the user. Prentice-Hall, 1999. 609 p.

- [9] Hjalmarsson H., Mårtensson J., Rojas C.R., Söderström T. On the accuracy in errors-in-variables identification compared to prediction-error identification. *Automatica*. December 2011, vol. 47, no. 12, pp. 2704–2712.
- [10] Mårtensson J., Everitt N., Hjalmarsson H. Covariance analysis in SISO linear systems identification. *Automatica*. March 2017, vol. 77, pp. 82–92.
- [11] Тяпкина P.D., Маслеников A.L. Сравнение входных сигналов для параметрической идентификации во временной и в частотной областях биомеханических систем [Comparison of input signals for parametric identification of biomechanical systems in time and frequency domain]. *Molodezhnyy nauchno-tehnicheskiy vestnik. MGTU im. N.E. Baumana. Elektron. zhurn* [Youth herald of the Bauman Moscow State Technical University], 2017, vol. 7. Available at: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/859770.html> (in Russ.).

Scherbak O.Yu. — student, Department of Automated Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Maslennikov A.L. — post-graduate student, Department of Automated Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Zadorozhnaya N.M., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Automated Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.