

**ИЗГИБНАЯ ЖЕСТКОСТЬ ГИБКИХ КОЛЕС ВОЛНОВЫХ ПЕРЕДАЧ****Н.В. Сумнительный**

nik4ok@gmail.com

SPIN-код: 6951-1100

**Р.С. Рязанов**

yanemal@rambler.ru

SPIN-код: 6221-5970

**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация****Аннотация**

Сформулирована актуальная задача уменьшения габаритов приводов машин при увеличении переносимых нагрузок, которая может быть решена путем использования новых типов передач. Наиболее перспективными из них являются волновые зубчатые передачи. При расчете упругодеформированного гибкого колеса необходимо учитывать приведенный момент инерции, геометрическую форму гибкого колеса и ужесточающее влияние отдельных его участков относительно приведенного момента инерции. Представлено экспериментальное исследование изгибной жесткости гибких колес, проведен сравнительный анализ существующих зависимостей. Даны рекомендации учета влияния геометрических параметров на изгибную жесткость гибкого колеса волновой зубчатой передачи.

**Ключевые слова**

Волновая зубчатая передача, изгибная жесткость, пространственный изгиб, плоский изгиб, момент инерции, зубчатый венец

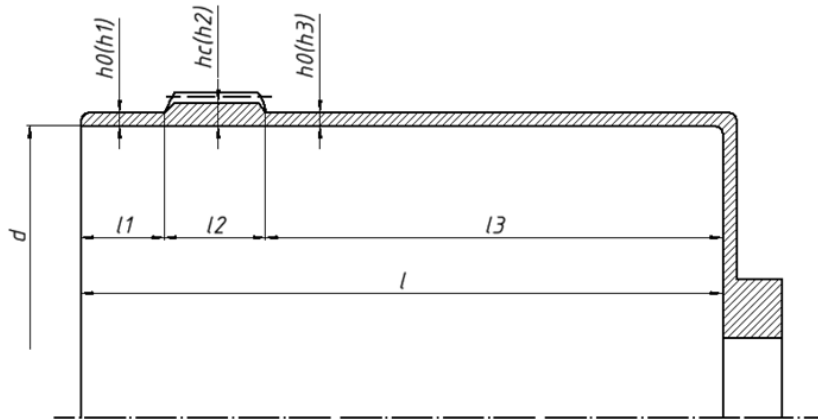
Поступила в редакцию 28.11.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Точность расчетов при решении большого числа задач, связанных с анализом напряженно-деформированного состояния и определения перемещений гибкого колеса волновой зубчатой передачи (ВЗП) под нагрузкой, в значительной степени зависит от точности оценки жесткости гибкого элемента передачи. Определению жесткости гибкого колеса посвящены многочисленные экспериментальные исследования [1–3], в ходе которых получены коэффициенты, учитывающие влияние толщины ножки зуба, расположения зубчатого венца, величины радиального зазора, формы зуба на толщину гладкого кольца, имеющего жесткость, эквивалентную жесткости зубчатого колеса при пространственном и плоском изгибе. Зубчатое колесо моделировали с помощью зубчатых реек [2], или оно имело зубчатый венец, нарезанный по всей длине, образующей кольца [1, 3]. Аналитическое решение задачи определения жесткости гибкого колеса цилиндрического стакана приведено в [4], где гибкое колесо рассматривается как тонкая цилиндрическая оболочка, связанная с одной стороны с пластиной, с другой — кольцевым стержнем, моделирующим зубчатый венец.

Наиболее часто на практике применяют именно гибкие колеса, выполненные в виде цилиндрического стакана [5] (с диафрагмой или без нее) или в виде кольца. Соотношения между геометрическими параметрами — толщиной обо-

лочки под зубчатым венцом  $h_c$ , толщиной гладких участков оболочки  $h_0$  и длиной различных участков гибкого колеса  $l_i$  (рис. 1) обусловлены функциональным назначением передачи и технологическими возможностями производства.



**Рис. 1.** Геометрические параметры гибкого колеса ВЗП:

$d$  — диаметр делительной окружности;  $l_1, l_2, l_3$  — длины различных участков гибкого колеса;  
 $l$  — длина гибкого колеса;  $h_0$  — толщины гладких участков;  
 $h_c$  — толщина оболочки под зубчатым венцом

Для того чтобы проанализировать влияние геометрических параметров на жесткость гибкого колеса проведен ряд экспериментов. Было исследовано 18 гибких колес 9 типоразмеров со следующими варьируемыми параметрами:

- 1) модуль зацепления  $m = 0,3 \dots 1$  мм;
- 2) число зубьев  $z = 100 \dots 360$ ;
- 3) отношение  $\frac{h_c}{h_0} = 1; 1,17; 1,3; 1,5; 1,71; 1,78$ ;
- 4)  $\frac{h_c}{m} = 1; 1,17; 1,35; 1,5; 5$ ;
- 5)  $\frac{l_2}{l} = 0,1; 0,25; 0,32$ ;
- 6)  $\frac{l_1}{l_2} = 0,25; 0,3; 0,43; 0,7$ ;
- 7) для колец отношение  $\frac{l}{d} = 0,4 \dots 0,45$ ; для цилиндрических стаканов —  $\frac{l}{d} = 0,85 \dots 1,4$ ;
- 8) диаметр делительной окружности  $d = mz$ .

Коэффициент смещения стандартного исходного контура при нарезании зубчатых венцов  $x = 0 \dots 3$ , точность изготовления — не ниже степени точности 8X, согласно ГОСТ 9178–59.

На экспериментальном стенде (рис. 2) нагружающее устройство имитирует плоский изгиб колец, пространственный изгиб цилиндрической оболочки. Измерялись прогибы в плоскости, проходящей через середину зубчатого венца, индикатором с ценой деления 0,001 мм. Неплоскостность регулируемых опор и нагружающего устройства контролировалась часовым индикатором ИЧ-10 и не превысила 0,01 мм.

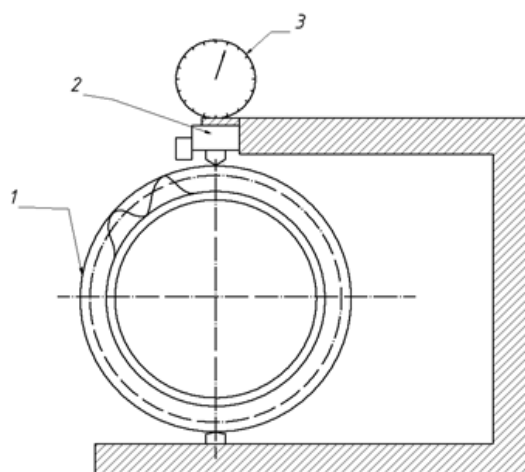


Рис. 2. Экспериментальный стенд нагружающего устройства:

1 — гибкое колесо; 2 — нагружающее устройство; 3 — стрелочный индикатор

Величина радиальных перемещений  $\delta$  зубчатого венца связана с жесткостью колеса  $EI$  известным соотношением [6]:

$$EI = \frac{0,1488Pr^3}{\delta},$$

где  $P$  — радиальная сила, приложенная в плоскости измерения радиальных перемещений  $\delta$ ;  $r$  — радиус нейтральной линии гибкого колеса;  $E$  — модуль упругости. Теоретический момент инерции  $I_x$  гибкого колеса подсчитывается как сумма моментов инерции гладких колец различной толщины [6]:

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_i = I_1 + I_2 + I_3,$$

где  $I_i = K_i \frac{l_i h_i^3}{12}$ ;  $I_1, I_2, I_3$  — моменты инерции соответствующих участков длиной  $l_1, l_2, l_3 = l - (l_1 + l_2)$ ;  $K_1, K_3$  — коэффициенты, учитывающие ужесточающее влияние цилиндрических участков гибкого колеса;  $K_2$  — коэффициент, учитывающий ужесточающее влияние зубьев.

Анализ результатов экспериментальных исследований и теоретических расчетов позволяет сделать следующие выводы:

1) момент инерции  $I_1$  кромки, снижающей концентрацию напряжений во впадине зубчатого венца, полностью входит в суммарный момент инерции гибкого колеса, следовательно  $K_1 = 1$ ;

2) ужесточающее влияние зубьев зависит от значения соотношения  $K_2 = f\left(\frac{h_c}{m}\right)$ . Полученные в ходе исследования значения  $K_2$  подтверждают корректность рекомендаций, приведенных в [1, 2]. Для инженерных расчетов гибких колес со стандартными зубьями запишем

$$K_2 = 1 + 0,3 \left(\frac{m}{h_c}\right)^{\frac{3}{2}} ;$$

3) ужесточающее влияние цилиндрической части оболочки гибкого колеса (участок длиной  $l_3$ ) находят из отношения  $\frac{h_c}{h_0}$ . Функциональная зависимость

$K_3 = f\left(\frac{h_c}{h_0}\right)$  определена ранее кривой аппроксимации экспериментальных данных следующего вида (рис. 3) [3, 4]:

$$K_3 = 0,8 \left(\frac{h_c}{h_0}\right)^{-2,5} . \tag{1}$$

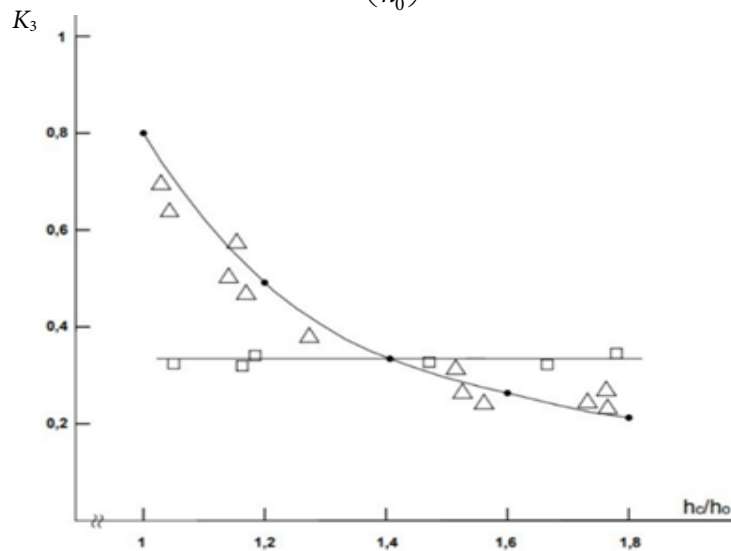


Рис. 3. Теоретические и экспериментальные кривые

Полученные в ходе экспериментов результаты позволили определить аналогичный характер разброса исследуемых параметров. При выборе аппроксимирующей функции был использован метод наименьших квадратов [7], проведен анализ

существующей функции (1). Отметим также, что были рассмотрены логарифмическая, гиперболическая, степенная, экспоненциальная и параболическая функции. Качество кривой оценивали с помощью средней относительной ошибки аппроксимации [8]:

$$\bar{A} = \frac{\sum |y_x - y_i| y_i}{n} 100 \%,$$

где  $y_x$  — значение аппроксимирующей кривой;  $y_i$  — значение коэффициента  $K_3$ , согласно экспериментальным данным;  $n$  — количество значений.

Ошибка  $\bar{A}$  в пределах 5–7 % свидетельствует о том, что уравнение подходит в достаточной степени к исходным данным. Ниже, в исходно-расчетной таблице, представлены индексы детерминации, которые характеризуют точность подбора. Эмпирические корреляционные отношения для каждой кривой характеризуют нелинейную связь экспериментальных точек относительно вида кривой. Отношения высчитывали согласно известной формуле [9]:

$$\eta = \sqrt{\frac{\sum (\bar{y} - y_x)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Отметим, что связь может быть слабой ( $0,1 < \eta < 0,3$ ), умеренной ( $0,3 < \eta < 0,5$ ), заметной ( $0,5 < \eta < 0,7$ ), высокой ( $0,7 < \eta < 0,9$ ) и весьма высокой ( $0,9 < \eta < 1$ ). Индекс детерминации, характеризующий точность подбора кривой относительно ее коэффициентов (см. табл.), запишем в виде [10]

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (\bar{y} - y_x)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}.$$

#### Индексы детерминации для разных видов функции

Вид функции	Уравнение кривой	$\bar{A}$ , %	$\eta$	$R^2$
Логарифмическая	$-1,084 \ln \left( \frac{h_c}{h_0} \right) + 0,795$	15,18	0,949	0,9
Гиперболическая	$1,447 / \left( \frac{h_c}{h_0} \right) - 0,625$	12,23	0,952	0,907
Степенная	$0,863 \left( \frac{h_c}{h_0} \right)^{(-2,479)}$	209,15	0,989	0,977
Экспоненциальная	$4,963 \exp \left[ -1,808 \left( \frac{h_c}{h_0} \right) \right]$	207,07	0,991	0,981
Параболическая	$0,76 \left( \frac{h_c}{h_0} \right)^2 - 2,916 \left( \frac{h_c}{h_0} \right) + 2,986$	9,78	0,957	0,916

Для инженерных расчетов аппроксимировать следует параболической зависимостью:

$$K_3 = 0,76 \left( \frac{h_c}{h_0} \right)^2 - 2,916 \left( \frac{h_c}{h_0} \right) + 2,986 .$$

На рисунках 4 и 5 представлены функции относительно характерного разброса экспериментальных данных.

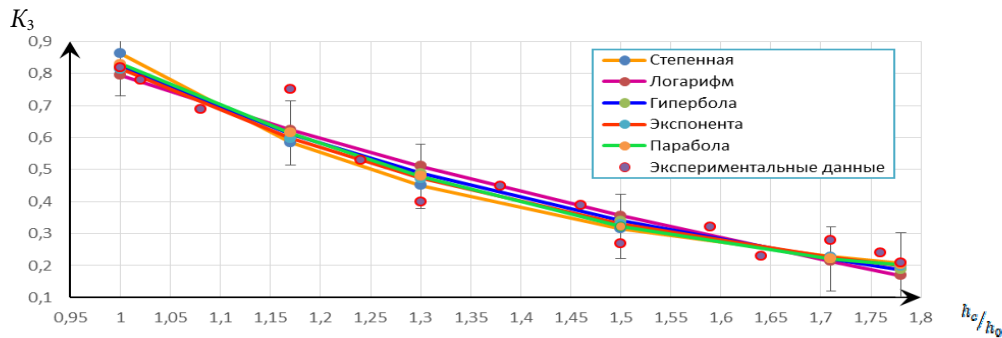


Рис. 4. Кривые аппроксимации относительно экспериментальных точек

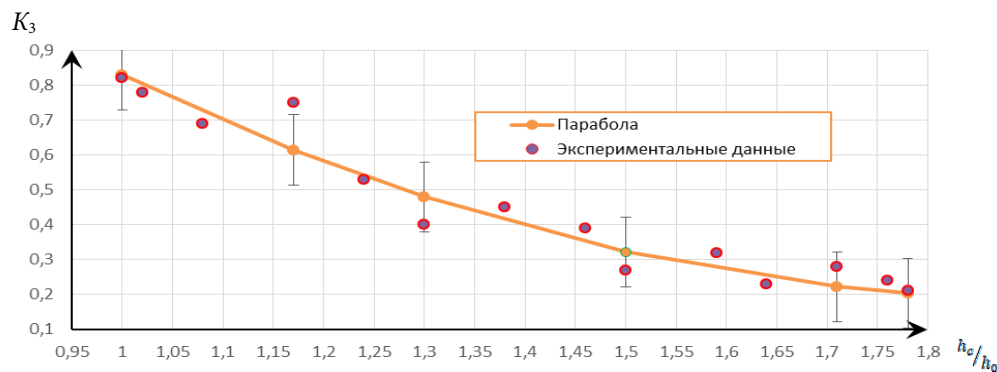


Рис. 5. Характерная параболическая кривая с учетом стандартной погрешности

Разнообразие размеров геометрических форм гибкого колеса позволило подобрать ряд конструктивных решений, удовлетворяющих различным компоновочным требованиям. Проведенные исследования позволили уточнить расчет напряженно-деформированного состояния гибкого колеса волновой передачи, что особенно важно при проверке ее на заклинивание.

### Литература

- [1] Костиков Ю.В., Тимофеев Г.А., Фурсяк Ф.И. Исследование крутильной жесткости волновых зубчатых передач внешнего деформирования с гибким колесом-кольцом. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2012, № 8, с. 1–7.
- [2] Динович М.Я., Шаломов Н.М. Влияние зубьев на жесткость обода при его растяжении. *Вестник машиностроения*, 1976, № 2, с. 25–26.

- [3] Новоселов В.П., Черненко А.Г., Буйначев С.К. *Волновые зубчатые передачи: конструкция и расчет*. Екатеринбург, УРФУ, 2012, 71 с.
- [4] Костиков Ю.В. Изгибная жесткость гибких колес волновых передач. *Вестник машиностроения*, 1980, № 4, с. 1–3.
- [5] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1977, 488 с.
- [6] Воробьев Л.Н. *Краткий курс теории упругости, пластин и оболочек*. Новочеркасск, Изд-во НПИ, 1975, 94 с.
- [7] Тейлор Дж. *Введение в теорию ошибок*. Пер. с англ. Л.Г. Деденко. Москва, Мир, 1985, 272 с.
- [8] Кокотушкин Г.А., Федотов А.А., Храпов П.В. *Численные методы алгебры и приближения функций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 60 с.
- [9] Ершов Э.Б. Распространение коэффициента детерминации на общий случай линейной регрессии, оцениваемой с помощью различных версий метода наименьших квадратов. *Экономика и математические методы*, 2002, т. 38, № 3, с. 107–120.
- [10] Костиков Ю.В., Тимофеев Г.А., Фурсяк Ф.И. Влияние способа изготовления гибкого колеса на кинематическую погрешность волновой передачи. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2014, № 4, с. 67–71.

**Сумнительный Никита Владимирович** — студент кафедры «Ракетные двигатели», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Рязанов Роман Станиславович** — студент кафедры «Ракетные двигатели», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Научный руководитель** — Костиков Юрий Васильевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Теория механизмов и машин», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

---

## BENDING STIFFNESS OF HARMONIC GEAR DRIVE

N.V. Sumnitelny

nik4ok@gmail.com

SPIN-code: 6951-1100

R.S. Ryazanov

yanemal@rambler.ru

SPIN-code: 6221-5970

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

---

### Abstract

The study focuses on the problem of reducing the dimensions of machine drives with the increase in the carried loads. The problem can be solved by using new types of gears, the most promising of these being wave gears. When estimating an elastically deformed flexible gear, it is necessary to take into account the reduced inertia moment, the geometric shape of the flexible gear and the toughening effect of its individual sections with respect to the reduced inertia moment. The article presents an experimental study of bending stiffness of flexible gears, as well as a comparative analysis of the existing dependencies. Recommendations are given concerning the influence of geometric parameters on bending stiffness of a flexible gear in a wave gear transmission.

### Keywords

Harmonic gear drive, bending stiffness, nonuniplanar bending, uniplanar bending, inertia moment, ring gear

© Bauman Moscow State Technical University, 2018

---

### References

- [1] Kostikov Yu.V., Timofeev G.A., Fursyak F.I. Investigation of the torsional stiffness of external deformation wave gears with a flexible wheel-ring. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2012, no. 8, pp. 1–7.
- [2] Dinovich M.Ya., Shalomov N.M. Tooth impact on rim rigidity under tension. *Vestnik mashinostroeniya*, 1976, no. 2, pp. 25–26.
- [3] Novoselov V.P., Chernenko A.G., Buynachev S.K. Volnovye zubchatye peredachi: konstruktsiya i raschet [Wave gears: construction and calculation]. Ekaterinburg, URFU publ., 2012, 71 p.
- [4] Kostikov Yu.V. Bending stiffness of flexible wave gears. *Vestnik mashinostroeniya*, 1980, no. 4, pp. 1–3.
- [5] Biderman V.L. Mekhanika tonkostennykh konstruktsiy [Thin-walled constructions mechanics]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1977, 488 p.
- [6] Vorob'yev L.N. Kratkiy kurs teorii uprugosti, plastin i obolochek [Short theory course of elasticity, plate and shell]. Novocherkassk, NPI publ., 1975, 94 p.
- [7] Taylor J.R. An introduction to error analysis. University Science Books, 1982, 270 p. (Russ. ed.: Vvedenie v teoriyu oshibok. Moscow, Mir publ., 1985, 272 p.).
- [8] Kokotushkin G.A., Fedotov A.A., Khrapov P.V. Chislennyye metody algebrы i priblizheniya funktsiy [Numerical methods of algebra and functions approximation]. Moscow, Bauman Press, 2011, 60 p.



- [9] Ershov E.B. Determination coefficient expansion on general case of linear regression assessed by different versions of least squares method. *Ekonomika i matematicheskie metody*, 2002, vol. 38, no. 3, pp. 107–120.
- [10] Kostikov Yu.V., Timofeev G.A., Fursyak F.I. The influence of the method of manufacturing a flexible wheel on the kinematic error of the wave gear. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy*. [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2014, no. 4, p. 67–71.

**Sumnitelny N.V.** — student, Department of Rocket Engines, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Ryazanov R.S.** — student, Department of Rocket Engines, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Scientific advisor** — Kostikov Yu.V., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Theory of Mechanisms and Machines, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.