

**СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС УПРУГОЙ ГАНТЕЛИ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ\***

Д.М. Щадинский

Dms-epost@yandex.ru

SPIN-код: 6365-2641

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

**Аннотация**

С помощью метода численного моделирования проанализировано возникновение резонанса в системе двух точечных частиц, связанных упругой нитью и погруженных в случайное поле скорости жидкости. Показано, что рассматриваемая система двух частиц может служить простейшей моделью полимерной нити в турбулентном потоке. Выведена система уравнений динамики относительного движения частиц в случайном поле скорости жидкости. Учтена зависимость относительной скорости жидкости от расстояния между частицами. Для численного моделирования стохастических процессов использован метод Эйлера—Маруямы. Динамика относительного движения частиц с учетом упругой связи рассчитана на основе алгоритма Верле. Проведен анализ порядка сходимости метода Эйлера—Маруямы и порядка аппроксимации численной схемы Верле. Представлены результаты тестирования схемы Верле путем сопоставления с точными решениями для осцилляторов при резонансе в вязкой жидкости. Установлены границы возбуждения резонанса в упругой гантели для периодического и случайного полей скорости жидкости.

**Ключевые слова**

Мелкомасштабная турбулентность, колебания частиц, стохастический параметрический резонанс, алгоритм Верле, метод Эйлера—Маруямы

Поступила в редакцию 08.12.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

**Введение.** Полимерные добавки в турбулентные потоки жидкости могут существенным образом изменять внутреннюю структуру турбулентности, например, искажать форму спектра турбулентности в области высокочастотных флуктуаций [1–9]. Отметим, что данный механизм до конца не изучен.

Цель настоящей работы — с помощью метода численного моделирования исследовать механизм возникновения резонанса в простой модели линейного полимера, находящегося в случайном поле скорости локально изотропной турбулентности.

Молекула линейного полимера моделируется двумя частицами, связанными упругой нестигаемой нитью, относительные колебания частиц — только вдоль

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №17-08-00376).

линии, соединяющей частицы (упругая гантель). При этом на частицы действуют силы вязкого трения, которые приводят к возникновению относительного движения частиц. Флуктуации скорости жидкости моделируются случайным процессом Гаусса с амплитудой, которая зависит от относительного расстояния между частицами. Все указанные выше условия согласуются с классической теорией А.Н. Колмогорова мелкомасштабной турбулентности [1, 9–11].

Численное моделирование случайного относительного движения частиц в поле мелкомасштабной турбулентности реализовано на основе решения стохастических дифференциальных уравнений методом Эйлера—Маруямы [1, 4, 9–14]. Далее в работе представлены результаты сопоставления численного и аналитических решений модельных стохастических уравнений. С помощью метода численного моделирования установлены порядки сильной и слабой сходимости численной схемы метода Эйлера—Маруямы.

Расчеты относительного движения частиц с учетом резонанса в вязкой среде реализованы на основе алгоритма Верле [1, 4, 9–15]. Проведено сопоставление результатов численного моделирования методом Верле и аналитических решений для осциллятора с учетом резонанса в вязкой среде. Произведена оценка порядка численной схемы метода Верле.

Исследовано возникновение резонанса в упругой гантели при периодическом изменении скорости жидкости с учетом зависимости скорости жидкости от расстояния. Проанализированы резонансные явления, возникающие в упругой гантели в нестационарном поле скорости жидкости.

**Постановка задачи. Исходные уравнения.** Рассмотрим движение двух шариков, связанных упругой пружинкой, в вязкой жидкости с флуктуациями скорости. Запишем динамические уравнения движения шариков в приближении Стокса:

$$\begin{aligned}\frac{dV_\alpha}{dt} &= \frac{1}{\tau_\alpha} \left\{ U(X_\alpha(t), t) - V_\alpha \right\} - \chi \left\{ X_\alpha(t) - X_\beta(t) - l_{\alpha\beta}^0 \right\}; \\ \frac{dV_\beta}{dt} &= \frac{1}{\tau_\beta} \left\{ U(X_\beta(t), t) - V_\beta \right\} + \chi \left\{ X_\alpha(t) - X_\beta(t) - l_{\alpha\beta}^0 \right\},\end{aligned}$$

где  $X_\alpha$ ,  $X_\beta$ ,  $V_\alpha$ ,  $V_\beta$  — координаты и скорости шариков;  $\tau_\alpha$ ,  $\tau_\beta$  — времена динамической релаксации шариков;  $\chi$  — значение упругой постоянной пружины;  $l_{\alpha\beta}^0$  — длина недеформированной пружины;  $U(X(t), t)$  — скорость жидкости. Затем — кинематические уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{dX_\alpha(t)}{dt} &= V_\alpha(t); \\ \frac{dX_\beta(t)}{dt} &= V_\beta(t).\end{aligned}$$

Отметим, что начальные условия для координат и скоростей шариков таковы:  $X_\alpha(0) = X_\alpha^0$ ;  $V_\alpha(0) = V_\alpha^0$ ;  $X_\beta(0) = X_\beta^0$ ;  $V_\beta(0) = V_\beta^0$ .

Для дальнейшего исследования задачи обратимся к координате центра между шариками и относительной координате:  $X_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(X_\alpha + X_\beta)$ ;  $Y_{\alpha\beta} = X_\alpha - X_\beta$ . Тогда относительную скорость движения шариков представим как

$$W_{\alpha\beta} = V_\alpha - V_\beta.$$

Считая шарики одинаковыми, то есть  $\tau_\alpha + \tau_\beta = \tau$ , получим уравнение для вычисления относительной скорости и относительного смещения шариков соответственно:

$$\frac{dW_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} \left\{ U(X_\alpha(t), t) - U(X_\beta(t), t) \right\} - \frac{1}{\tau} W_{\alpha\beta}(t) - 2\chi \left\{ Y_{\alpha\beta}(t) - l_{\alpha\beta}^0 \right\};$$

$$\frac{dY_{\alpha\beta}(t)}{dt} = W_{\alpha\beta}(t).$$

**Аппроксимация скорости среды.** Поле случайной скорости среды задаем как

$$U(x, t) = \Delta U(t) \sin(kx),$$

где  $\Delta U(t)$  — случайный процесс;  $k$  — волновое число (величина, обратная масштабу). Такой вид  $U(x, t)$  соответствует первому члену в разложении в ряд Фурье функции на гармонические составляющие и обычно используется при численном моделировании подобных задач [1, 11].

Суммарное смещение будем считать много меньше характерного масштаба вихря, то есть  $kX_{\alpha\beta} \ll 1$ . В противном случае «эффект пересечения траекторий» приведет к общему ослаблению любых флуктуаций. Из теории мелкомасштабной турбулентности А.Н. Колмогорова следует, что относительная скорость жидкости в двух точках потока зависит от расстояния между этими точками. С уменьшением расстояния между точками снижается и скорость относительного движения жидкости. На основании данных положений запишем аппроксимацию относительной скорости жидкости для двух фиксированных точек:

$$\begin{aligned} U(X_\alpha(t), t) - U(X_\beta(t), t) &= \Delta U(t) \left\{ \sin \left[ k \left( X_{\alpha\beta} + \frac{Y_{\alpha\beta}}{2} \right) \right] - \sin \left[ k \left( X_{\alpha\beta} - \frac{Y_{\alpha\beta}}{2} \right) \right] \right\} = \\ &= 2\Delta U(t) \cos(kX_{\alpha\beta}) \sin \left( k \frac{Y_{\alpha\beta}}{2} \right) = 2\Delta U(t) \sin \left( k \frac{Y_{\alpha\beta}}{2} \right). \end{aligned}$$

Далее найдем относительное удлинение гантели:  $\tilde{Y}_{\alpha\beta}(t) = Y_{\alpha\beta}(t) - l_{\alpha\beta}^0$ . Предполагая малое значение первоначального смещения  $kl_{\alpha\beta}^0 \ll 1$ , получим

$$\begin{aligned} \sin\left(k\frac{Y_{\alpha\beta}}{2}\right) &= \sin\left(k\frac{\tilde{Y}_{\alpha\beta}(t) - l_{\alpha\beta}^0}{2}\right) = \\ &= \sin\left(k\frac{\tilde{Y}_{\alpha\beta}(t)}{2}\right)\cos\left(k\frac{l_{\alpha\beta}^0}{2}\right) + \cos\left(k\frac{\tilde{Y}_{\alpha\beta}(t)}{2}\right)\sin\left(k\frac{l_{\alpha\beta}^0}{2}\right) \approx \sin\left(k\frac{\tilde{Y}_{\alpha\beta}(t)}{2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение относительной скорости и смещения соответственно имеют вид

$$\frac{dW_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \frac{2\Delta U(t)}{\tau} \sin\left(k\frac{\tilde{Y}_{\alpha\beta}(t)}{2}\right) - \frac{1}{\tau}W_{\alpha\beta}(t) - 2\chi\tilde{Y}_{\alpha\beta}(t); \quad (1)$$

$$\frac{d\tilde{Y}_{\alpha\beta}(t)}{dt} = W_{\alpha\beta}(t). \quad (2)$$

Далее рассмотрим процесс  $\Delta U(t)$  такой, что

$$\langle \Delta U(t'), \Delta U(t'') \rangle = \langle \Delta U^2 \rangle \Psi(t' - t''),$$

где  $t', t''$  — различные моменты времени;  $\langle U^2 \rangle$  — дисперсия;  $\Psi$  — автокорреляционная функция. Интегральный временной масштаб имеет следующий вид:

$$T_E = \int_0^{\infty} \Psi(s) ds.$$

Затем запишем стохастическое дифференциальное уравнение, генерирующее структурированные во времени флуктуации скорости несущей среды

$$\frac{d\Delta U(t)}{dt} = \frac{1}{T_E}(\eta(t) - \Delta U(t)). \quad (3)$$

Здесь  $\eta(t)$  — белый шум, то есть дельта-коррелированный во времени случайный процесс Гаусса с нулевым средним значением, дисперсией  $\sigma_E^2$  и автокорреляционной функцией  $\langle \eta(t'), \eta(t'') \rangle = \sigma_E^2 \Psi_0(t' - t'') = 2\sigma_E^2 \tau_0 \delta(t' - t'')$ , где  $\delta(t' - t'')$  — дельта-функция;  $\tau_0$  — интегральный временной масштаб,  $\tau_0 = \int_0^{\infty} \Psi_0(t) dt = 2\tau_0 \int_0^{\infty} \delta(t) dt$ .

**Приведение к безразмерному виду.** Теперь для исследования стохастического параметрического резонанса решим уравнения (1)–(3). Приводим их к безразмерному виду. Масштаб длины принимаем  $k^{-1}$ , масштаб скорости —  $\sigma_E$ , масштаб времени —  $T_E$ . Обозначим параметр инерции частицы как  $\Omega_E$ ,  $\Omega_E = \frac{\tau}{T_E}$ ; структурный параметр —  $\Lambda_E$ ,  $\Lambda_E = k\sigma_E T_E$ ; эффективную жесткость как  $S_0^2$ ,  $S_0^2 = 2 \frac{\kappa T_E}{k\sigma_E}$ . Безразмерные величины помечаем значком «звездочка». Затем получим флуктуации скорости источника:

$$\langle \eta(t'^*), \eta(t''*) \rangle = 2\tau_0^* \delta(t'^* - t''*), \quad \tau_0^* = \frac{\tau_0}{T_E}.$$

Тогда уравнения в безразмерном виде для относительного движения шариков в вязкой среде будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{d\Delta U^*(t^*)}{dt^*} = \eta(t^*) - \Delta U^*(t^*); \quad (4)$$

$$\frac{dW_{\alpha\beta}^*(t^*)}{dt^*} = \frac{2\Delta U^*(t^*)}{\Omega_E} \sin\left(k \frac{\tilde{Y}_{\alpha\beta}^*(t^*)}{2}\right) - \frac{1}{\Omega_E} W_{\alpha\beta}^*(t^*) - S_0^2 \tilde{Y}_{\alpha\beta}^*(t^*); \quad (5)$$

$$\frac{d\tilde{Y}_{\alpha\beta}^*(t^*)}{dt^*} = \Lambda_E W_{\alpha\beta}^*(t^*). \quad (6)$$

С учетом начальных условий получим

$$\begin{aligned} \Delta U^*(0) &= \Delta U^0; \\ \tilde{Y}_{\alpha\beta}^*(0) &= \tilde{Y}_{\alpha\beta}^0; \\ W_{\alpha\beta}^*(0) &= W_{\alpha\beta}^0. \end{aligned}$$

«Звездочку» далее не пишем. Среди полученных уравнений можно выделить уравнение (4), содержащее случайный процесс. Это стохастическое обыкновенное дифференциальное уравнение (СОДУ). Одна из наиболее популярных схем численного интегрирования СОДУ — обобщение явного метода Эйлера на уравнение, содержащее случайный процесс Винера. Уравнения (5) и (6) будем решать совместно и с помощью метода Верле. Предварительно проведем их анализ.

**Анализ метода Эйлера—Маруямы. Численная иллюстрация.** Сравним численное и точное решения модельного СОДУ:

$$dX(t) = \lambda X(t) dt + \mu X(t) dW(t),$$

где  $\lambda = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ;  $X(t)$  — неизвестная функция времени  $t$ ;  $X_0$  — начальное условие,  $X_0 = X(0)$ ;  $dW(t)$  — приращение случайного процесса Винера. Аналитическое решение следует из формулы Ито и имеет вид

$$X(t) = X_0 \exp \left\{ \left( \lambda - \frac{\mu^2}{2} \right) t + \mu W(t) \right\}.$$

Численную реализацию находим, используя алгоритм Эйлера—Маруямы. На рис. 1 показаны результаты интегрирования методом Эйлера—Маруямы и точного решения модельного уравнения. Видно, что согласие точного и численного решений удовлетворительное. Однако для корректного использования метода численного интегрирования необходимо оценить сходимость численного алгоритма при монотонно уменьшающемся шаге интегрирования.

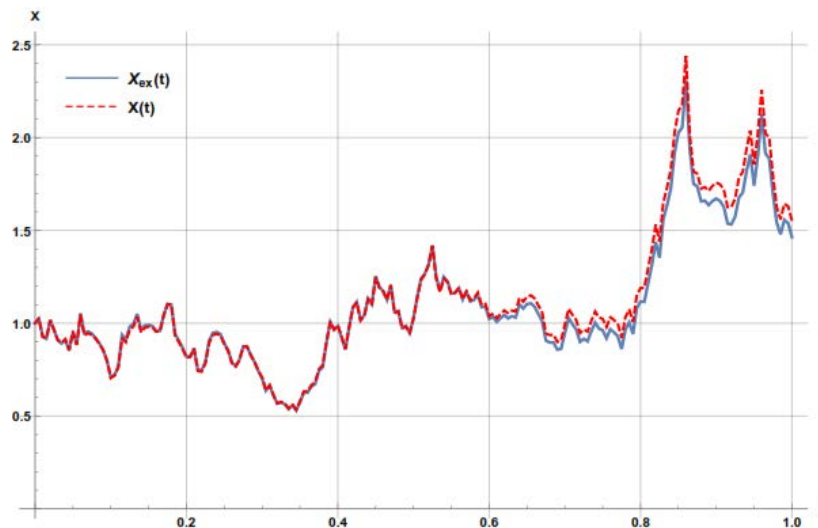


Рис. 1. Точное (кривая синего цвета) и численное (кривая красного цвета) решения модельного уравнения

**Сильная сходимость.** Условием численной эффективности разностной схемы служит сходимость результатов вычислений к точному решению при уменьшении величины шага по времени. Говорят, что метод решения СОДУ обладает сильной сходимостью с порядком  $p$ , если  $\exists C$ :

$$\langle |X_{ex}(t) - X(t)| \rangle \leq C(\Delta t)^p, \quad (7)$$

где  $X_{ex}(t)$  — точное решение;  $X(t)$  — результат численной аппроксимации;  $\Delta t$  — шаг по времени;  $\langle \cdot \rangle$  — обозначение математического ожидания.

Из работы [13] известно, что для СОДУ порядок сходимости метода Эйлера—Маруямы  $p = 0,5$ .

Из рисунка 2 видно, что величина среднего модуля разности точного и приближенного решений зависит от шага интегрирования по времени. Осреднение проводят по 100 случайным траекториям. Таким образом, подтвержден теоретический порядок сильной сходимости метода Эйлера—Маруямы, равный 0,5.

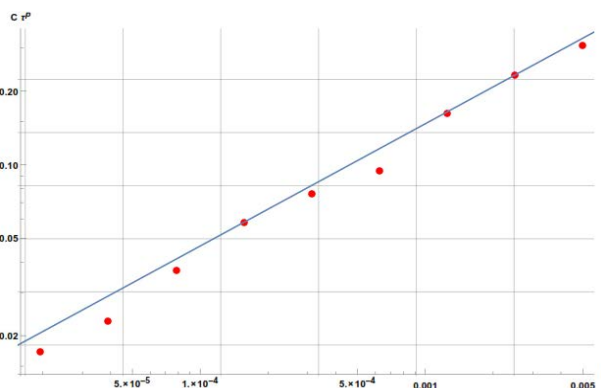


Рис. 2. Проверка сильной сходимости метода Эйлера—Маруямы:

сплошная кривая соответствует левой части условия (7), кривая в виде точек — правой его части

**Слабая сходимость.** Считают, что метод решения СОДУ обладает слабой сходимостью с порядком  $p$ , если ЭС:

$$\left| \langle X_{ex}(t) \rangle - \langle X(t) \rangle \right| \leq C(\Delta t)^p, \quad (8)$$

На рисунке 3 показан рассчитанный модуль разности между средними значениями точного и численного решений. Осреднение проводится по 100 траекториям. Подтвержден теоретический порядок слабой сходимости, равный единице [13].

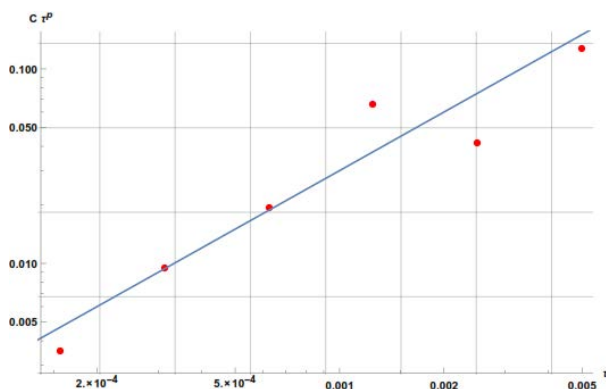


Рис. 3. Проверка слабой сходимости метода Эйлера—Маруямы:

сплошная кривая соответствует левой части условия (8), кривая в виде точек — правой части

**Метод Верле.** Поскольку в данной работе планируется использование метода Верле для нахождения условий возникновения стохастического параметри-

ческого резонанса, то имеет смысл проверить корректность данного метода на гармоническом осцилляторе в различных условиях.

Сначала рассмотрим общий случай. Гармонический осциллятор с трением и вынуждающей силой:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} + \frac{1}{\Omega_E} W &= -\omega_0^2 Y + A_0 \sin \nu t = F(Y, t); \\ \frac{dY}{dt} &= W, \end{aligned}$$

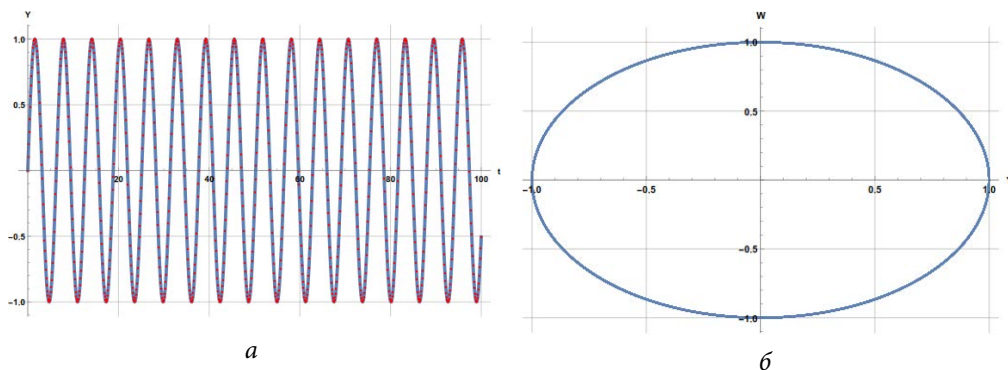
где  $A_0$ ,  $\nu$  — амплитуда и частота вынуждающей силы;  $\omega_0$  — собственная частота.

Применим к данной системе алгоритм Верле в скоростной форме [15]:

$$Y_{n+1} = Y_n + W_n \Delta t + F(Y_n, t_n) \frac{\Delta t^2}{2}; \tag{9}$$

$$W_{n+1} \left( 1 + \frac{1}{\Omega_E} \right) = W_n + [F(Y_{n+1}, t_{n+1}) + F(Y_n, t_n)] \frac{\Delta t}{2}. \tag{10}$$

Теперь положим, что  $A_0 = 0$ ,  $\Omega_E \gg 1$  и получим случай гармонического осциллятора без трения и вынуждающей силы. Рисунок 4 иллюстрирует решение методом Верле уравнений (9) и (10) для данного случая. Здесь и далее кривая синего цвета обозначает численное решение, кривая в виде красных точек — точное решение. Стоит отметить, что наблюдается удовлетворительное согласование аналитического решения и полученных результатов, погрешность в данном случае составляет величину порядка  $10^{-4}$ . Зная точное решение данной задачи, найдем для момента времени  $t$  ошибки решений при условии разного шага ( $R^{\Delta t}$  — модуль разности точного и численного решения при шаге  $\Delta t$ ). Данные таблицы подтверждают второй порядок аппроксимации для метода Верле.



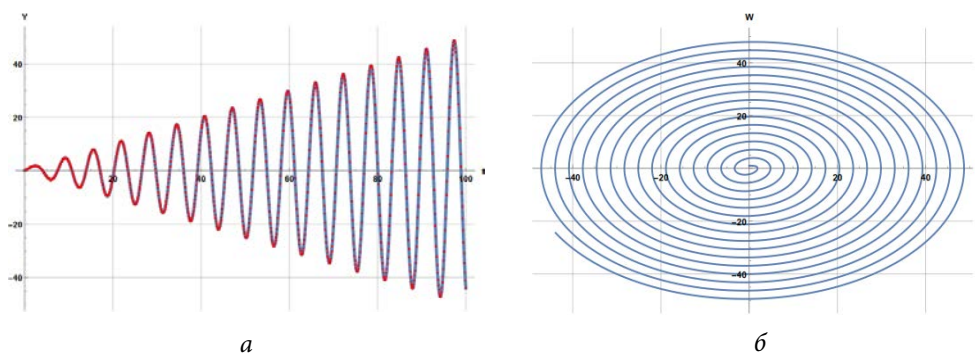
**Рис. 4.** Зависимость смещения от времени (а) и фазовый портрет (б) для гармонического осциллятора



**Порядок аппроксимации схемы Верле**

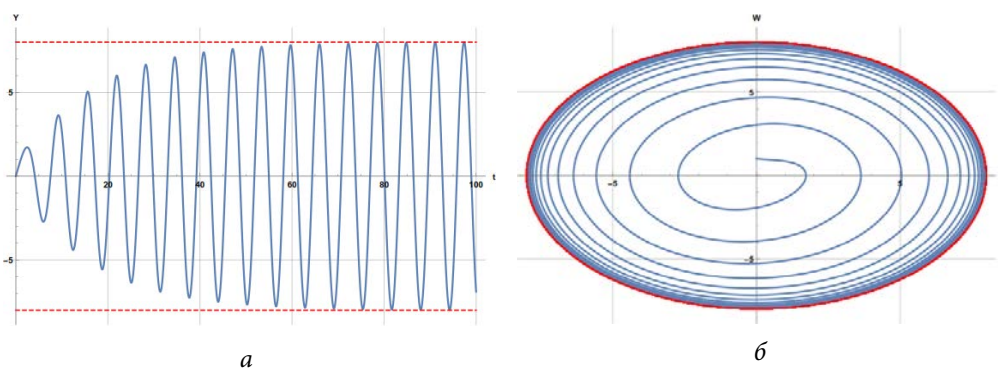
$t = 25$	$R^{\Delta t} / R^{\Delta t/2}$	$R^{\Delta t/2} / R^{\Delta t/4}$	$R^{\Delta t} / R^{\Delta t/4}$
$\Delta t = 0,01$	4,04055	4,16905	16,8453

Положим теперь, что  $A_0 \neq 0$ ,  $\Omega_E \gg 1$ ,  $\nu = \omega_0$  и получим резонанс для осциллятора без трения (рис. 5). Аналогично предыдущим расчетам, наблюдается достаточное соответствие точного и численного, полученного с помощью алгоритма Верле, решений.



**Рис. 5.** Зависимость смещения от времени (а) и фазовый портрет (б) для гармонического осциллятора с вынуждающей силой

В случае, когда  $\Omega_E \sim 1$ , имеем резонанс линейного осциллятора с вынуждающей силой и трением. Кривые красного цвета на рис. 6 обозначают максимально возможную при данных параметрах амплитуду, полученную из аналитического решения.



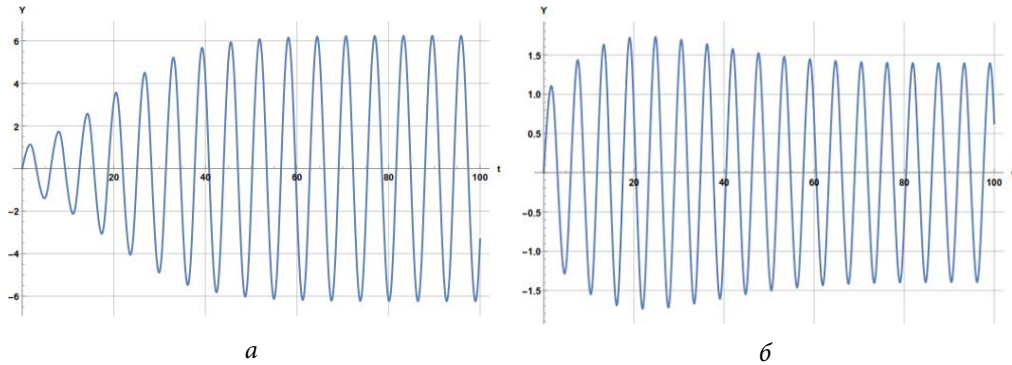
**Рис. 6.** Зависимость смещения от времени (а) и фазовый портрет (б) для гармонического осциллятора с вынуждающей силой и трением

**Резонанс осциллятора с параметрическим воздействием.** Прежде чем решать систему СДУ (4)–(6), проанализируем детерминированный случай скорости жидкости. Применим метод Верле в скоростной форме к системе:

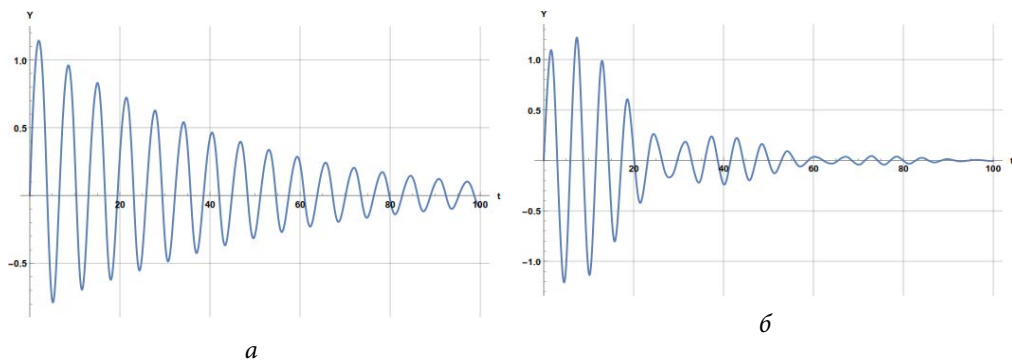
$$\frac{dW_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \frac{1}{\Omega_E} A_0 \sin(\nu t) \sin\left(k \frac{\tilde{Y}_{\alpha\beta}(t)}{2}\right) - \frac{1}{\Omega_E} W_{\alpha\beta}(t) - S_0^2 \tilde{Y}_{\alpha\beta}(t),$$

$$\frac{d\tilde{Y}_{\alpha\beta}^*(t^*)}{dt^*} = \Lambda_E W_{\alpha\beta}^*(t^*).$$

Из рисунков 7 и 8 видно, что, в отличие от линейного гармонического осциллятора, в данном случае резонанс достигается не в одном значении частоты вынуждающей силы, а существует диапазон таких частот, что удовлетворяет соотношению  $2\omega_0 \approx \nu$ . Также отметим, что при равенстве частоты вынуждающей силы и собственной резонанс отсутствует.



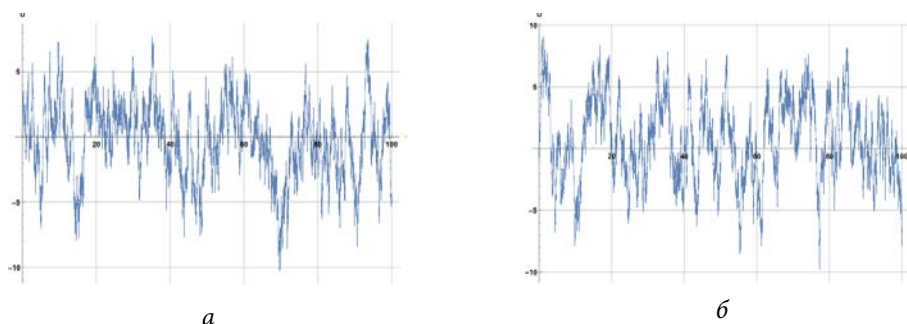
**Рис. 7.** Параметрический резонанс:  
 а —  $\omega_0 = 1, \nu = 2$ ; б —  $\omega_0 = 1, \nu = 2,2$



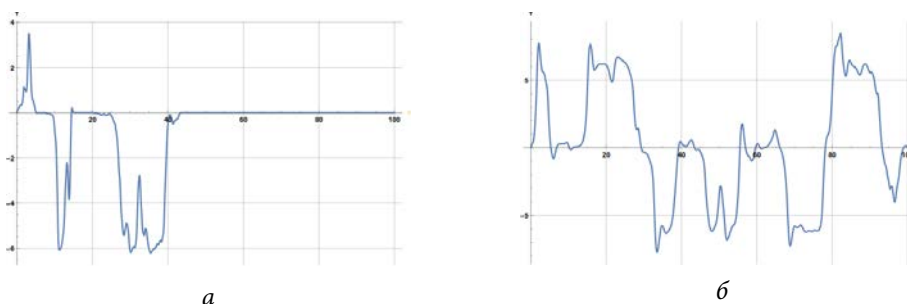
**Рис. 8.** Затухающие колебания:  
 а —  $\omega_0 = 1, \nu = 2,3$ ; б —  $\omega_0 = 1, \nu = 1$

**Стохастический параметрический резонанс.** Опираясь на полученные результаты, решим уравнения (4)–(6), описанными методами и исследуем условия возникновения резонанса. Из предыдущего пункта ясно, что должен существовать ряд параметров, при которых возникает резонанс.

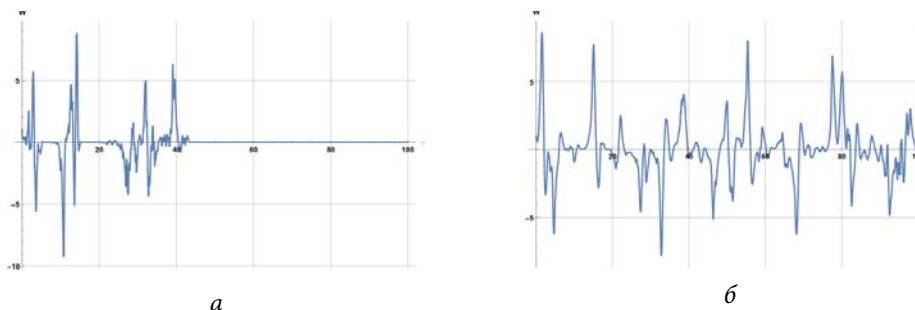
На рисунках 9–14 представлены зависимости случайной скорости среды, относительного смещения и относительной скорости от времени для случая резонанса справа и затухающих колебаний слева. В обоих случаях в качестве начальных условий взяты значения  $\Delta U^0 = 0$ ;  $\tilde{Y}_{\alpha\beta}^0 = 0$ ;  $W_{\alpha\beta}^0 = 0$  и безразмерный интегральный временной микромасштаб  $\tau_0 = 10$ . Опираясь на предыдущие результаты, было установлено, что наиболее ярко явление резонанса возникает при  $\Lambda_E = 0,1$ ;  $\Omega_E = 0,1$ ;  $S_0^2 = 1$ , а также при незначительных отклонениях от данных величин. Затухание колебаний происходит уже при  $\Lambda_E = 1$ ;  $\Omega_E = 0,1$ ;  $S_0^2 = 1$ .



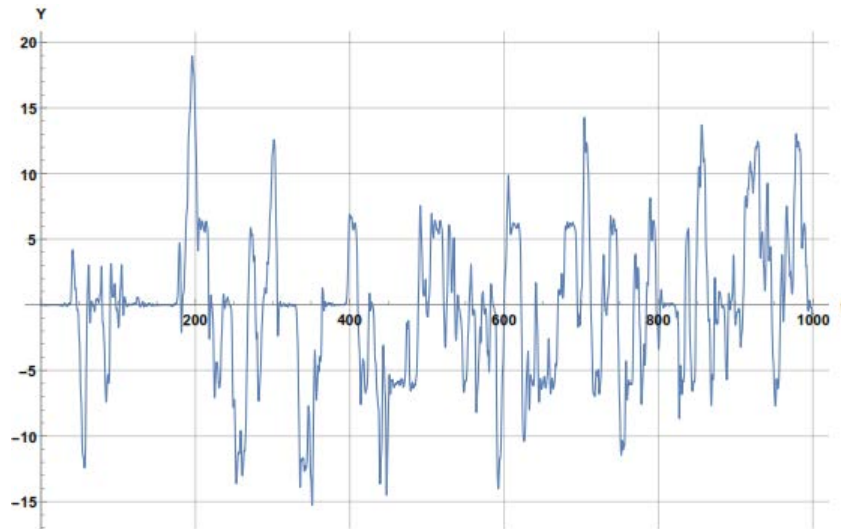
**Рис. 9.** Зависимость случайной скорости жидкости от времени: при затухающих колебаниях (а) и в случае возникновения резонанса (б)



**Рис. 10.** Зависимость относительного смещения от времени: при затухающих колебаниях (а) и в случае возникновения резонанса (б)



**Рис. 11.** Зависимость относительной скорости от времени: при затухающих колебаниях (а) и в случае возникновения резонанса (б)



**Рис. 12.** Зависимость относительного смещения от времени при точном расчете

С учетом параметров, при которых наиболее ярко возникает резонанс, начальные условия  $\Delta U^0 = 0$ ,  $\tilde{Y}_{\alpha\beta}^0 = 0$ ,  $W_{\alpha\beta}^0 = 0,01$ , проведем более точный расчет (рис. 12). Из рисунка видно, что даже при незначительных возмущениях амплитуда относительных колебаний растет значительно.

Для подтверждения корректности работы программы была рассчитана выборочная дисперсия для  $\Delta U$ . Все полученные значения оказались близки к единице (0,85–1,15), что свидетельствует о подходящих теоретических данных. Датчик случайных чисел был написан на основе центральной предельной теоремы. Для проверки корректности его работы также были рассчитаны математическое среднее и выборочная дисперсия: значения отличались от теоретических на величины порядка  $10^{-3}$ .

**Выводы.** Численными методами исследовано относительное движение двух частиц, связанных упругой линейной нитью, в периодическом и случайном полях скорости жидкости. Скорость жидкости моделировали в соответствии с классической теорией мелкомасштабной турбулентности А.Н. Колмогорова.

Динамика относительного движения частиц моделировали на основе метода Верле. Метод решения стохастического дифференциального уравнения построен на основе алгоритма Эйлера—Маруямы. Точность методов и порядки аппроксимации численных схем иллюстрируются аналитически и путем сопоставления с точными решениями.

Для двух случаев скорости среды показано возникновение резонанса в относительном движении частиц, связанных упругой нитью. Эмпирическим способом оценен диапазон возникновения резонансных явлений. В периодическом поле скорости жидкости установлено возникновение резонанса при условии  $2\omega_0 \approx \nu$ , в случае случайного поля скорости жидкости также продемонстрировано существование значений параметров вызывающих резонанс.

## Литература

- [1] Frisch U. *Turbulence. The legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge, Cambridge University Press, 1996, 312 p.
- [2] Dallas V. *Multiscale structure of turbulent channel flow and polymer dynamics in viscoelastic turbulence*. Department of Aeronautics & Institute for Mathematical Sciences. Imperial College London, 2010, 148 p.
- [3] Graham M.D. Drag reduction in turbulent flow of polymer solutions. *Rheology Reviews*, 2004, pp. 143–170.
- [4] Kivotides D. A method for the computation of turbulent polymeric liquids including hydrodynamic interactions and chain entanglements. *Physics Letters A*, 2017, vol. 381, no. 6, pp. 629–635.
- [5] Kuramoto Y. Rhythms and turbulence in populations of chemical oscillators. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1981, vol. 106, no. 1–2, pp. 128–143.
- [6] Li F.C., Kawaguchi Y., Yu B., Wei J.J., Hishida K. Experimental study of drag-reduction mechanism for a dilute surfactant solution flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, vol. 51, no. 3–4, pp. 835–843.
- [7] Rubinstein M., Colby R.H. *Polymer physics*. Oxford University Press, 2003, 443 p.
- [8] Odijk T. Turbulent drag reduction in one and two dimensions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2001, vol. 298, no. 1–2, pp. 140–154.
- [9] Tsinober A. *An informal introduction to turbulence*. Springer, 2001, 328 p.
- [10] McComb W.D. *The physics of fluid turbulence*. Clarendon Press, 1992, 602 p.
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика*. Москва, Наука, 1988, 736 с.
- [12] Hasegawa Y., Arita M. Noise-intensity fluctuation in Langevin model and its higher-order Fokker-Planck equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2011, vol. 390, no. 6, pp. 1051–1063.
- [13] Higham D.J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, 2001, vol. 43, no. 3, pp. 525–546.
- [14] Liu K., Jin Y. Stochastic resonance in periodic potentials driven by colored noise. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2013, vol. 392, no. 21, pp. 5283–5288.
- [15] Verlet L. Computer «Experiments» on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules. *Physical Review*, 1967, vol. 159, no. 1, pp. 98–103.

**Щадинский Дмитрий Михайлович** — студент кафедры «Прикладная математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Научный руководитель** — Деревич Игорь Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

---

**STOCHASTIC PARAMETRIC RESONANCE OF THE ELASTIC DUMBBELL  
IN THE VISCOUS FLUID**

D.M. Schadinskiy

Dms-epost@yandex.ru

SPIN-code: 6365-2641

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation****Abstract**

*The article analyses the occurrence of resonance in the system of two point particles bound with the elastic thread and dipped into the random field of the fluid velocity by means of the numerical simulation technique. The study shows that the considered system of two particles can be the simplest model of the polymeric thread in the turbulent flow. We bring out the dynamic equation system for the relative motion of the particles in the random field of the fluid velocity. The relative fluid velocity dependency on the interparticle distance is taken into account. We use an Euler-Maruyama method for the numerical simulation of the stochastic processes. The dynamics of the relative motion of the particles with regard for the elastic constraint is calculated through the Verlet algorithm. The article analyses the order of the Euler-Maruyama method convergence and the order of Verlet integration approximation. The work presents the results of testing the Verlet integration by means of the correlation with the exact solutions for oscillators at resonance in the viscous fluid. We numerically set limits for resonance excitation in the elastic dumbbell for the periodic and random field of the fluid velocity.*

**Keywords**

*Low-scale turbulence, particles oscillation, stochastic parametric resonance, Verlet algorithm, Euler-Maruyama method*

© Bauman Moscow State Technical University, 2018

---

**References**

- [1] Frisch U. Turbulence. The legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge, Cambridge University Press, 1996, 312 p.
- [2] Dallas V. Multiscale structure of turbulent channel flow and polymer dynamics in viscoelastic turbulence. Department of Aeronautics & Institute for Mathematical Sciences. Imperial College London, 2010, 148 p.
- [3] Graham M.D. Drag reduction in turbulent flow of polymer solutions. *Rheology Reviews*, 2004, pp. 143–170.
- [4] Kivotides D. A method for the computation of turbulent polymeric liquids including hydrodynamic interactions and chain entanglements. *Physics Letters A*, 2017, vol. 381, no. 6, pp. 629–635.
- [5] Kuramoto Y. Rhythms and turbulence in populations of chemical oscillators. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1981, vol. 106, no. 1–2, pp. 128–143.
- [6] Li F.C., Kawaguchi Y., Yu B., Wei J.J., Hishida K. Experimental study of drag-reduction mechanism for a dilute surfactant solution flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, vol. 51, no. 3–4, pp. 835–843.

- [7] Rubinstein M., Colby R.H. Polymer physics. Oxford University Press, 2003, 443 p.
- [8] Odijk T. Turbulent drag reduction in one and two dimensions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2001, vol. 298, no. 1–2, pp. 140–154.
- [9] Tsinober A. An informal introduction to turbulence. Springer, 2001, 328 p.
- [10] McComb W.D. The physics of fluid turbulence. Clarendon Press, 1992, 602 p.
- [11] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. T. VI. Gidrodinamika [Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka publ., 1988, 736 p.
- [12] Hasegawa Y., Arita M. Noise-intensity fluctuation in Langevin model and its higher-order Fokker-Planck equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2011, vol. 390, no. 6, pp. 1051–1063.
- [13] Higham D.J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, 2001, vol. 43, no. 3, pp. 525–546.
- [14] Liu K., Jin Y. Stochastic resonance in periodic potentials driven by colored noise. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2013, vol. 392, no. 21, pp. 5283–5288.
- [15] Verlet L. Computer “Experiments” on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules. *Physical Review*, 1967, vol. 159, no. 1, pp. 98–103.

**Schadinskiy D.M.** — student, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Scientific advisor** — Derevich I.V., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.