

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

К.М. Зубарев
Т.Л. Иванова

zubarev.bmstu@mail.ru
tahyksa@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Предложена математическая модель горизонтально-слоистой среды. Для заданных параметров многослойной среды рассмотрены прямая и обратная задачи магнитотеллурического зондирования. Решена задача магнитотеллурического зондирования для трехслойной среды с различными параметрами. Представленные результаты решения прямой и обратной задач позволили выявить особенности каждого из методов, провести сравнение реализованных алгоритмов. Разработанный программный комплекс можно использовать для решения задач на различных моделях среды

Ключевые слова

Электроразведка, магнитотеллурическое зондирование, кажущееся сопротивление, модель Тихонова — Каньяра, горизонтально-слоистая среда, удельное электрическое сопротивление, прямая задача, обратная задача

Поступила в редакцию 01.09.2016

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016

Введение. Магнитотеллурическое зондирование (МТЗ) является одним из методов геофизики (наряду с сейсморазведкой, гравиметрией и магнитометрией), используемых для изучения строения земной коры, поиска и разведки месторождений полезных ископаемых [1, 2]. МТЗ входит в обязательный комплекс геофизических методов при изучении земной коры по региональным профилям. Основано оно на изучении переменного электромагнитного поля магнитосферной и ионосферной природы, что позволяет различать слои, обладающие разной электрической проводимостью [3].

В геофизике принято выделять две основные задачи: прямую, в которой по заданной модели рассчитывают теоретическое (модельное) поле геофизического метода, и обратную, в которой по зарегистрированному или модельному полю определяют (или уточняют) параметры модели среды [4].

Для решения обратной задачи МТЗ в настоящее время используют методы ручного или автоматического подбора модели и методы преобразования, с помощью которых получают упрощенные, иногда неточные, модели среды [5]. Методы и алгоритмы, базирующиеся на глобальных целевых функциях, позволяют уточнить геоэлектрическую модель только при наличии хорошего, близкого к точному, начального приближения [6]. Поэтому создание и исследование новых алгоритмов решения обратной задачи МТЗ является важным направлением в развитии электромагнитных методов геофизики [7].

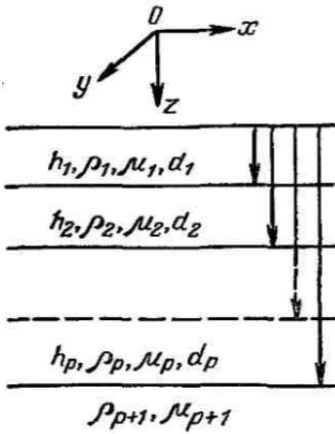


Рис. 1. Плоское поле в горизонтально-слоистой среде

Математическая и концептуальная постановка прямой задачи МТЗ. Пусть задано полупространство, разделенное горизонтальными границами на несколько слоев мощностью h_p с удельным сопротивлением ρ_p и магнитной проницаемостью μ_p , где p — номер слоя (рис. 1). На поверхность заданной среды падает плоская, однородная, монохроматическая волна, поляризованная вдоль напластования. Требуется найти элементы полей E , H и установить их связь с параметрами слоев h_p , ρ_p и μ_p :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= k^2 \vec{E}; \\ \vec{H} &= (i\omega\mu)^{-1} \text{rot} \vec{E}, \end{aligned} \quad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа; \vec{E} — напряженность электрического поля; \vec{H} — напряженность магнитного поля; k — волновое число; ω — круговая частота; μ — магнитная проницаемость.

Уравнение (1) является уравнением Гельмгольца и преобразуется в линейное дифференциальное уравнение [8]:

$$\frac{\partial^2 E_{x,y}}{\partial z^2} = k^2 E_{x,y}. \quad (2)$$

Преобразование выражений для электрических и магнитных напряженностей. Понятие импеданса. Общее решение уравнения (2) для составляющих напряженности электрического и магнитного полей в любом слое с индексом « p » будет иметь вид:

$$\begin{aligned} E_{xp} &= a_{xp} e^{-kpz} + b_{xp} e^{kpz}; \\ E_{yp} &= a_{yp} e^{-kpz} + b_{yp} e^{kpz}; \\ H_{xp} &= k_p (i\omega\mu_p)^{-1} (a_{yp} e^{-kpz} - b_{yp} e^{kpz}); \\ H_{yp} &= -k_p (i\omega\mu_p)^{-1} (a_{xp} e^{-kpz} - b_{xp} e^{kpz}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь a , b — коэффициенты, зависящие от мощности источника и электромагнитных параметров среды [9, 10]. В данном случае наиболее удобной характеристикой среды и поля является импеданс, представляющий собой отношение взаимно перпендикулярных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей [11–14]:

$$Z_p = \frac{E_{xp}}{H_{yp}} = -\frac{i\omega\mu_p}{k_p} \frac{a_{xp}e^{-k_p z} + b_{xp}e^{k_p z}}{a_{xp}e^{-k_p z} - b_{xp}e^{k_p z}}. \quad (4)$$

Для определения связи неизвестных коэффициентов a и b с параметрами слоистой толщи h_p, ρ_p и μ_p воспользуемся тождеством Н.В. Липской [2]:

$$\begin{aligned} \frac{a_p e^{-k_p(d_p-h_p)} + b_p e^{k_p(d_p-h_p)}}{a_p e^{-k_p(d_p-h_p)} - b_p e^{k_p(d_p-h_p)}} &\equiv \text{th}(k_p h_p + \text{arth} \frac{a_p e^{-k_p d_p} + b_p e^{k_p d_p}}{a_p e^{-k_p d_p} - b_{p+1} e^{k_p d_p}}) = \\ &= \text{th}(k_p h_p + \text{arth} \frac{k_p \mu_{p+1}}{k_{p+1} \mu_p} \frac{a_{p+1} e^{-k_{p+1} d_p} + b_{p+1} e^{k_{p+1} d_p}}{a_{p+1} e^{-k_{p+1} d_p} - b_{p+1} e^{k_{p+1} d_p}}) \end{aligned} \quad (5)$$

Левая часть тождества (5) представляет собой функцию, определенную на кровле p -го слоя ($z = d_p - h_p$). В то же время под знаком аретангенса имеем такую же функцию, но определенную на кровле $(p+1)$ -го слоя или на подошве p -го слоя ($z = d_p$). Обозначим их через R_p и R_{p+1} :

$$R_p = \text{th} \left(k_p h_p + \text{arth} \frac{k_p \mu_{p+1}}{k_{p+1} \mu_p} R_{p+1} \right). \quad (6)$$

Найденная функция является приведенным импедансом слоистого полупространства [12, 14]. При относительно высоких частотах ($k_1 h_1 \gg \text{arth} k_1 \mu_2 R_2 / k_2 \mu_1$) она зависит преимущественно от свойств верхних слоев разреза, при низких — от глубоких горизонтов. Поэтому функцию $R(\omega)$ можно назвать частотной характеристикой горизонтально-слоистого разреза [5].

Основной характеристикой при исследовании горизонтально-слоистой среды является кажущееся сопротивление [15, 16]:

$$\rho_T / \rho_1 = R_1^2(\omega) = |\rho_T| / \rho_1 e^{i\varphi_T}. \quad (7)$$

Для удобства расчета представим функцию приведенного импеданса в следующем виде [14]:

$$\begin{aligned} R_p(\omega) &= \frac{1 - \Phi_{p+1}(\omega)}{1 + \Phi_{p+1}(\omega)}, \\ \Phi_{p+1}(\omega) &= \frac{1 - \sqrt{\rho_{p+1} / \rho_p} R_{p+1}(\omega)}{1 + \sqrt{\rho_{p+1} / \rho_p} R_{p+1}(\omega)} e^{-k_p h_p}. \end{aligned} \quad (8)$$

На основе данного дробно-линейного соотношения построен алгоритм вычисления кажущегося сопротивления для горизонтально-слоистой среды, основные характеристики определим по формулам [17]

$$\begin{aligned} \rho_T &= \rho_1(\text{Re}_1^2 + i \text{Im}_1^2); \\ \varphi_T &= 2\text{arctg}(\text{Im}_1 / \text{Re}_1); \end{aligned} \tag{9}$$

где Re_1 и Im_1 — действительная и мнимая части функции $R_1(\omega)$. Вычисление функции $R_1(\omega)$ начинают с нижнего слоя на котором $\text{Re}_p = 1, \text{Im}_p = 0$.

Результаты решения прямой задачи МТЗ. На рис. 2 представлена модель среды, которую исследовали в данной работе. Магнитная проницаемость каждого слоя $\mu_p = 1$.

<i>Воздух</i>	
<i>Земля</i>	$\rho_1 = 100 \text{ Ом} \cdot \text{м}, h_1 = 1000 \text{ м}$
	$\rho_2 = 60 \text{ Ом} \cdot \text{м}, h_2 = 2000 \text{ м}$
<i>Нефть</i>	
<i>Земля</i>	$\rho_3 = 100 \text{ Ом} \cdot \text{м}, h_3 \rightarrow \infty$

Рис. 2. Исследуемая модель среды

График кажущегося сопротивления для заданной модели среды приведен на рис. 3.

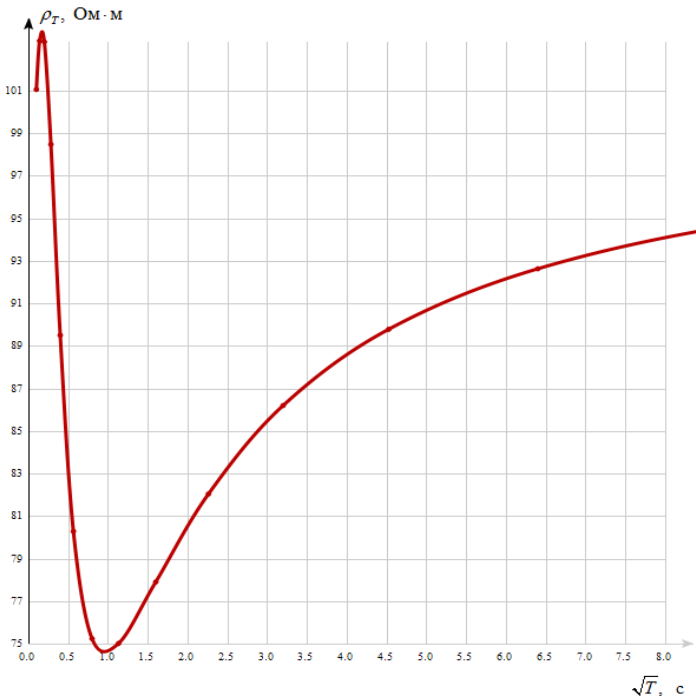


Рис. 3. График кажущегося сопротивления

Приведенная кривая согласуется с теоритическими представлениями о кажущемся сопротивлении. Видно, что при высоких частотах (малом периоде)

функция кажущегося сопротивления зависит от верхнего слоя, далее увеличивая период, получаем сведения о втором и третьем слоях.

Разработанный алгоритм протестирован на известных тестовых примерах. Результаты, полученные при решении прямой задачи, совпадают с результатами, опубликованными на сайте геофизического факультета МГУ.

Концептуальная и математическая постановка обратной задачи МТЗ.

Кажущееся сопротивление является функцией многих переменных. Фиксированные переменные — число слоев, частота падающей волны, варьируемые переменные — толщина слоев, их удельное сопротивление [18]. Обратная задача формулируется следующим образом: требуется найти такие значения мощности слоев, удельных сопротивлений и магнитных проницаемостей, чтобы сумма квадратов отклонений теоретического значения модуля кажущегося сопротивления от измеряемого для заданного набора частот была минимальной [19]:

$$F(\rho_1, \dots, \rho_n, h_1, \dots, h_n, \mu_1, \dots, \mu_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\hat{\rho}_T(M_i) - \rho_T(M_i, \rho_1, \dots, \rho_n, h_1, \dots, h_n, \mu_1, \dots, \mu_n))^2} \rightarrow \min. \tag{10}$$

Поставленную задачу решим при условии, что известен диапазон значений варьируемых величин [20].

Алгоритмы решения обратной задачи МТЗ. Для решения обратной задачи, как наиболее удобный, использовали метод полного перебора, суть которого заключается в выборе нескольких моделей и сопоставлении их с экспериментальными данными [21].

Отметим, что метод Хука — Дживса служит для поиска безусловного локального экстремума функции, базируется непосредственно на значениях функции (прямой метод). Алгоритм делится на фазу исследующего поиска и фазу поиска по образцу. Однако, если линии уровня ЦФ имеют овражный характер, то процедура поиска становится неэффективной и даже может привести к отсутствию сходимости к точке локального *extr* [22]. Модифицированный метод Хука — Дживса позволяет существенно ускорить сходимость за счет того, что поиск периодически проводится в направлении $d^i = x^i - x^{i-1}$ [23].

Для сокращения времени работы метода полного перебора разработан модифицированный метод полного перебора (ММПП). Суть его заключается в том, что заданный интервал между нижней и верхней границами параметра среды делится на n отрезков (рис. 4).

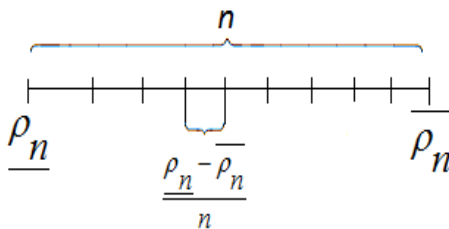


Рис. 4. Интервал между верхней и нижней границами параметра среды

Далее классическим методом перебора осуществим поиск такой комбинации отрезков, при которой значение функции будет минимальным. Границы найденных отрезков становятся новыми нижними и верхними границами параметров среды. После этого процедуру повторяют для выбранных на предыдущем шаге отрезков. Оптимизацию продолжают до тех пор, пока интервал между нижней и верхней границами каждого из параметров не станет меньше единицы. Когда шаг параметра становится равен меньше единицы, перебор по данному параметру завершают.

Данный метод позволяет существенно ускорить оптимизацию, увеличить диапазон значений для параметров среды при минимальном увеличении времени работы. При этом возможна потеря точности, которая также может быть компенсирована путем увеличения n .

Алгоритм метода. Шаг 1. Определить нижние значения для параметров среды $\underline{\rho}_i, \underline{h}_j, \bar{\rho}_i, \bar{h}_i$, задать условие остановки:

$$F_{\min} < \varepsilon \text{ или } (\underline{\rho}_i - \bar{\rho}_i) / n < 1, (\underline{h}_j - \bar{h}_i) / n < 1. \quad (11)$$

Шаг 2. Разделить интервал для каждого из параметров на n частей.

$$h_k = \frac{\underline{\rho}_i - \bar{\rho}_i}{n}; \quad h_l = \frac{\underline{h}_j - \bar{h}_i}{n}. \quad (12)$$

Шаг 3. Последовательно перебрать все варианты значений для параметров среды.

Шаг 4. Для каждого варианта модели среды определить значение функции и сравнить его с минимальным. «Да» — перейти к шагу 5, «Нет» — продолжить перебор.

Шаг 5. $F_{\min} = F$, запомнить текущее значение каждого из параметров и обозначить его как $\rho_i \min, h_i \min$.

Шаг 6. Для значения F_{\min} проверить условия остановки $F_{\min} < \varepsilon$: «Да» — текущая модель является оптимальной, «Нет» — продолжить перебор.

Шаг 7. После завершения перебора проверить условие остановки, «Да» — завершить оптимизацию, «Нет» — определить новые значения для верхней и нижней границ каждого из параметров:

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_i &= \rho_i \min; & \underline{h}_j &= h_j \min; \\ \bar{\rho}_i &= \rho_i \min + h_k; & \bar{h}_i &= h_i \min + h_l, \end{aligned} \quad (13)$$

перейти к шагу 2.

Результаты решения обратной задачи МТЗ. После анализа кривой, полученной при решении прямой задачи, выбраны следующие начальные приближения, нижние и верхние границы:

$$\begin{aligned}
 \rho_1^0 &= 90 \text{ Ом} \cdot \text{м}, & h_1 &= 600 \text{ м}; & \underline{\rho}_1 &= 70, & \underline{\rho}_2 &= 30, & \underline{\rho}_3 &= 50; \\
 \rho_2^0 &= 30 \text{ Ом} \cdot \text{м}, & h_2 &= 1\,200; & \overline{\rho}_1 &= 120, & \overline{\rho}_2 &= 100, & \overline{\rho}_3 &= 110; \\
 \rho_3^0 &= 50 \text{ Ом} \cdot \text{м}, & h_3 &\rightarrow \infty; & \underline{h}_1 &= 500, & \underline{h}_2 &= 1\,500; \\
 & & & & \overline{h}_1 &= 1\,500, & \overline{h}_2 &= 2\,500;
 \end{aligned}$$

На рис. 5 представлены несколько итераций метода Хука — Дживса. Верхняя кривая — экспериментальная, полученная при решении обратной задачи, нижние кривые получены на i -й итерации.

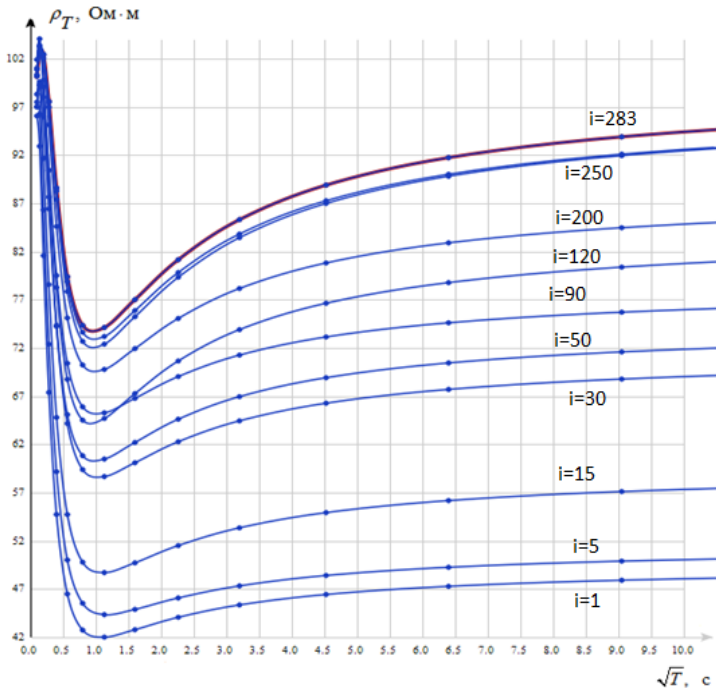


Рис. 5. Теоретические кривые на итерациях метода Хука — Дживса:
 1–10 — i равно 1, 5, 15, 30, 50, 90, 120, 200, 250 и 283, соответственно

Из рисунка видно, что метод Хука—Дживса показал хорошую сходимость, но при дальнейшем исследовании установлено, что он работает не при всех начальных приближениях. Это объясняется тем, что функция потенциала является овражной.

При решении обратной задачи методом полного перебора с шагом по каждому из параметров $h_k = 1$ получена кривая, полностью совпадающая с экспериментальной. Значения параметров среды оказались равны истинным (заданным при решении прямой задачи).

На рис. 6 изображены кривая, полученная в результате решения задачи ММПП, и экспериментальная кривая. Видно, что ММПП показал хорошую сходимость. Данный алгоритм протестирован при других нижних и верхних границах. Получены результаты, близкие к экспериментальным.

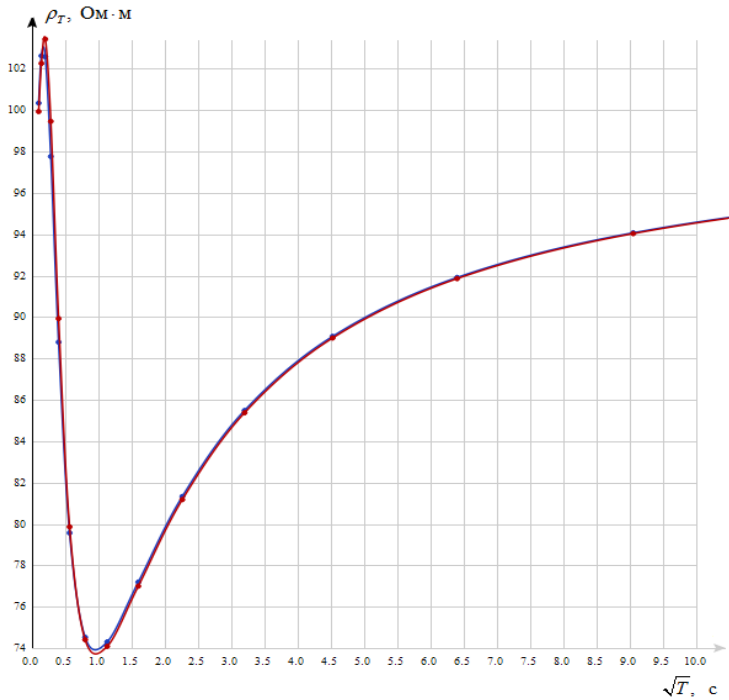


Рис. 6. Теоретическая кривая (синего цвета), полученная ММПП, и экспериментальная кривая (красного цвета)

По результатам тестирования приведенных методов можно выделить преимущества и недостатки каждого из алгоритмов. В таблице представлены данные, полученные при решении методами Хука — Дживса, полного перебора и ММПП.

Результаты решения обратной задачи различными методами

Метод полного перебора	ММПП	Метод Хука — Дживса
Хорошая сходимость	Хорошая сходимость	Плохая сходимость
Высокая точность результатов. Процент погрешности составляет $\epsilon < 0,0001$	Высокая точность результатов. Процент погрешности составляет $\epsilon < 0,01$	Работает не при всех начальных приближениях
Увеличение интервала между границами приведет к многократному увеличению времени выполнения		Не зависит от интервала между нижней верхней границами значения параметров
Требуется большое количество времени на выполнение. Для решения обратной задачи для заданной модели среды потребовалось 25 мин	Работает в четыре раза быстрее классического метода полного перебора	Работает в восемь раз быстрее метода полного перебора и в два раза быстрее ММПП

Выводы. ММПП является оптимальным для решения обратных задач, поскольку позволяет найти значения параметров среды с высокой точностью и за меньшее время, по сравнению с классическим методом полного перебора. Реализованный в работе метод Хука — Дживса показал плохую сходимость и не может использоваться для поставленного класса задач.

Созданный исследовательский пакет программ позволяет решать прямые и обратные задачи МТЗ. С помощью этого пакета решены прямые задачи для различных тестовых примеров, полученные данные совпадают с данными, опубликованными на сайте геофизического факультета МГУ.

В ходе решения обратной задачи создан алгоритм, позволяющий существенно ускорить поиск значений параметров среды. В ходе многочисленных экспериментов изучены свойства алгоритма. Вне зависимости от исходных данных с большой точностью оцениваются параметры среды.

Разработанные алгоритмы, программа и технические приемы могут быть использованы для исследовательских работ на различных моделях, опытной обработки производственных данных, для создания пакета программ и технологий решения обратных задач МТЗ, а также использования в производственном режиме.

Литература

1. Жданов М.С. Электроразведка. М.: Недра, 1986. 316 с.
2. Жданов М.С., Варенцов И.М., Голубев Н.Г., Крылов В.А. Методы моделирования электромагнитных полей. Материалы межд. проекта СОМЕМ1. М.: Наука, 1990. 199 с.
3. Матвеев Б.К. Электроразведка. Москва. Недра, 1990. 232 с.
4. Бердичевский М.Н. Электрическая разведка методом магнитотеллурического профилирования. М.: Недра, 1968. 254 с.
5. Бердичевский М.Н. Электрическая разведка методом теллурических токов. М.: Гостехиздат, 1960. 239 с.
6. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Магнитотеллурическое зондирование горизонтально-однородных сред. М.: Диалог-МГУ, 1997. 352 с.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
8. Гольцман Ф.М. Проблемные вопросы информационно-статистической теории интерпретации геофизических наблюдений // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1977. № 12. С. 75–86.
9. Гольцман Ф.М. Статистические методы интерпретации. М.: Наука, 1971. 328 с.
10. Дмитриев В.И. Прямая и обратная задачи магнитотеллурического зондирования слоистой среды // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1970. № 1. С. 64–69.
11. Альпин Л.М., Давс Д.С., Каринский А.Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. М.: Недра, 1985. 407 с.
12. Андреева Е.В. Контролируемая трансформация кривых МТЗ // Изв. АН СССР. Физика земли. 1991. № 10. С. 89–95.
13. Краев А.П. Основы геоэлектрики. 2-е изд. Л.: Недра, 1965. 588 с.
14. Аузин А.К. Электроразведка (спецкурс по индуктивным и радиоволновым методам рудной электроразведки). М.: Недра, 1977. 134 с.
15. Никитин А.А. Теоретические основы обработки геофизической информации. М.: Недра, 1986. 342 с.

16. Хмелевский В.К. Основной курс электроразведки: Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1970. 245 с.
17. Шейнманн С.М. Современные физические основы теории электроразведки. Л.: Недра, 1969. 242 с.
18. Якубовский Ю.В., Ляхов Л.Л. Электроразведка. 2-е изд. М.: Недра, 1980. 365 с.
19. Грибов А.Ф., Жидков Е.Н., Краснов И.К. О численном решении обратной задачи теплопроводности // Инженерный журнал: наука и инновации. Электрон. журн. 2013. № 9. DOI: 10.18698/2308-6033-2013-9-964
20. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. Т. 2: Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 560 с.
21. Димитриенко Ю.И., Краснов И.К., Реш Г.Ф., Акинкин Д., Кузнецов И. Разработка вычислительной технологии решения геометрически-обратных задач тепловой диагностики трехслойных сварных конструкций. Инженерный журнал: наука и инновации // Электрон. журн. 2012. № 2. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-2-37
22. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Маркевич М.Н., Сборщиков С.В. Математическое моделирование диэлектрических свойств наноструктурированных композиционных материалов методом асимптотического осреднения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 1. С. 76–89. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-76-89
23. Апельцин В.Ф., Мозжорина Т.Ю. Свойства одномерного фотонного кристалла как отражающей или волноведущей структуры в случае Н-поляризованного возбуждения // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 2 (2). С. 3–27. DOI: 10.18698/2309-3684-2014-2-327

Зубарев Кирилл Михайлович — магистрант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Иванова Татьяна Леонидовна — магистрант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — И.К. Краснов, канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

FORWARD AND INVERSE PROBLEMS OF MAGNETOTELLURICS

K.M. Zubarev

zubarev.bmstu@mail.ru

T.L. Ivanova

tahyksa@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article proposes a mathematical model for a horizontally stratified medium. We consider forward and inverse problems of magnetotellurics for preset multilayered medium parameters. We solved the magnetotellurics problem for a three-layer medium with various parameters. We supply results of solving the forward and inverse problems that allowed us to detect the specifics of each method and compare the algorithms implemented. The software package developed can be used for solving problems based on various medium models

Keywords

Electrical prospecting, magnetotellurics, apparent resistivity, Tikhonov — Cagniard model, horizontally stratified medium, resistivity, forward problem, inverse problem

© Bauman Moscow State Technical University, 2016

References

- [1] Zhdanov M.S. *Elektrorazvedka* [Electric prospecting]. Moscow, Nedra Publ., 1986. 316 p. (in Russ.).
- [2] Zhdanov M.S., Varentsov I.M., Golubev N.G., Krylov V.A. *Metody modelirovaniya elektromagnitnykh poley. Materialy mezhd. proekta COMEMI* [Methods for magnetic field simulation. Proc. of “COMEMI” Int. Project]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 199 p. (in Russ.).
- [3] Matveev B.K. *Elektrorazvedka* [Electric prospecting]. Moscow, Nedra Publ., 1990. 232 p. (in Russ.).
- [4] Berdichevskiy M.N. *Elektricheskaya razvedka metodom magnetotelluricheskogo profilirovaniya* [Electric prospecting by magnetotelluric profiling method]. Moscow, Nedra Publ., 1968. 254 p. (in Russ.).
- [5] Berdichevskiy M.N. *Elektricheskaya razvedka metodom telluricheskikh tokov* [Electric prospecting by electric current method]. Moscow, Gostoptekhizdat Publ., 1960. 239 p. (in Russ.).
- [6] Berdichevskiy M.N., Dmitriev V.I. *Magnetotelluricheskoe zondirovanie gorizonta'no-odnorodnykh sred* [Magnetotelluric sounding of lateral-homogeneous medium]. Moscow, Dialog-MGU Publ., 1997. 352 p. (in Russ.).
- [7] Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Mathematical physics equations]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p. (in Russ.).
- [8] Gol'tsman F.M. *Topical issues of information statistic interpretation theory for geophysical exploration. Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli*, 1977, no. 12, pp. 75–86 (in Russ.).
- [9] Gol'tsman F.M. *Statisticheskie metody interpretatsii* [Statistical interpretation methods]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 328 p. (in Russ.).
- [10] Dmitriev V.I. *Direct and inverse problems of magnetotelluric layered earth sounding. Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli*, 1970, no. 1, pp. 64–69 (in Russ.).
- [11] Al'pin L.M., Daev D.S., Karinskiy A.D. *Teoriya poley, primenyaemykh v razvedochnoy geofizike* [Field theory used in exploratory geophysics]. Moscow, Nedra Publ., 1985. 407 p. (in Russ.).
- [12] Andreeva E.V. *Controlled transformation of magnetotelluric sounding curves. Izvestiya AN SSSR. Fizika zemli*, 1991, no. 10, pp. 89–95 (in Russ.).

- [13] Kraev A.P. *Osnovy geoelektriki* [Fundamentals of geo-electrical engineering]. Leningrad, Nedra Publ., 1965. 588 p. (in Russ.).
- [14] Auzin A.K. *Elektrorazvedka (spetskurs po induktivnym i radiovolnovym metodam rudnoy elektrorazvedki)* [Electric prospecting (specialized course on inductive and radio-frequency methods of mine electric prospecting)]. Moscow, Nedra Publ., 1977. 134 p. (in Russ.).
- [15] Nikitin A.A. *Teoreticheskie osnovy obrabotki geofizicheskoy informatsii* [Theoretical foundations of geophysical data processing]. Moscow, Nedra Publ., 1986. 342 p. (in Russ.).
- [16] Khmelevskiy V.K. *Osnovnoy kurs elektrorazvedki* [Electric prospecting basic course]. Moscow, MSU Publ., 1970. 245 p. (in Russ.).
- [17] Sheynmann S.M. *Sovremennye fizicheskie osnovy teorii elektrorazvedki* [Modern physical principles of electric prospecting theory]. Leningrad, Nedra Publ., 1969. 242 p. (in Russ.).
- [18] Yakubovskiy Yu.V., Lyakhov L.L. *Elektrorazvedka* [Electric prospecting]. Moscow, Nedra Publ., 1980. 365 p. (in Russ.).
- [19] Gribov A.F., Zhidkov E.N., Krasnov I.K. A numerical solution of inverse problem of head transfer. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2013, no. 9 (in Russ.). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-9-964
- [20] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. T. 2: Universal'nye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Continuum mechanics. Vol. 2. Universal continuum mechanics and electrodynamics laws]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 560 p. (in Russ.).
- [21] Dimitrienko Yu.I., Krasnov I.K., Resh G.F., Akinkin D., Kuznetsov I. Development of computing technology for solving the geometrically inverse problems of thermal diagnostics of three-layer welded constructions. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2012. no. 2 (in Russ.). DOI: 10.18698/2308-6033-2012-2-37
- [22] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Markevich M.N., Sborshchikov S.V. Mathematical modelling of dielectric properties of nanostructural composites using asymptotic homogenizing method. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences], 2016, no. 1, pp. 76–89 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-76-89
- [23] Apel'tsin V.F., Mozzhorina T.Yu. Properties of one-dimensional photonic crystal as a reflective or wave guiding structure when excited by H-polarization. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody*, 2014, no. 2 (2), pp. 3–27 (in Russ.). DOI: 10.18698/2309-3684-2014-2-327

Zubarev K.M. — graduate student of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Ivanova T.L. — graduate student, of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — I.K. Krasnov, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.