

**ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ***

А.К. Ключков

alexklo9339@gmail.com

SPIN-код: 9060-3216

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Предложен метод численного решения замкнутого уравнения для функции плотности вероятности (ФПВ) распределения скорости частиц в случайном поле скорости газа. Движение частиц происходит только в результате воздействия силы сопротивления, записанной в приближении Стокса. Представлено аналитическое решение для ФПВ через функцию Грина уравнения Колмогорова — Фоккера — Планка. Метод численного интегрирования основан на разностной консервативной схеме первого порядка точности по времени и второго порядка по скорости. Результаты численного интегрирования сопоставлены с аналитическим решением. Проведено сравнение двух разностных схем, аппроксимирующих конвективное слагаемое: центральные разности и разности против потока.

Ключевые слова

Функция плотности вероятности, разностная схема, консервативная схема, аппроксимация, устойчивость, конвективное слагаемое

Поступила в редакцию 13.12.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Введение. Описание движения частиц или капель в случайном поле скорости газа широко распространено в различных технических приложениях, например, в авиамоторостроении, при проектировании и разработке двигателей внутреннего сгорания, энергетических установок по сжиганию дисперсного топлива и аппаратов химической технологии. Дисперсные потоки в случайном поле скорости газа реализуются в природных явлениях: перемещение капель и пыли в атмосфере, пыльные бури. Современные методы численного моделирования дисперсных течений в переменных Эйлера основаны на использовании систем уравнений для описания динамики дисперсной фазы, функционально аналогичных уравнениям динамики сплошной среды.

Описание динамики дисперсной примеси возможно в рамках описания Лагранжа, при котором рассчитывается огромное количество случайных траекторий частиц. Информацию, представляющую практический интерес, получают в результате осреднения сотен тысяч случайных траекторий. Другой подход основан на описании Эйлера, при котором исследуется вероятность попадания ча-

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 17-08-00376).

стиц в заданный объем фазового пространства [1–10]. Первоначальная процедура получения уравнений дисперсной фазы основана на подходе, называемом методом взаимопроникающих континуумов. Переход от дисперсного описания системы частиц к модели сплошной дисперсной фазы реализован в этом методе на основе осреднения по пространству и времени большого ансамбля частиц. В результате осреднения получают систему осредненных по пространству и времени уравнений баланса массы, импульса, энергии турбулентного движения частиц. При переходе к турбулентному течению выполняют осреднение, аналогичное осреднению Рейнольдса (RANS) уравнений баланса массы и импульса. Система осредненных уравнений состоит, как правило, из уравнения для осредненной концентрации частиц, осредненной скорости и уравнений для вторых моментов флуктуаций скорости дисперсной фазы. Замыкание уравнений в этом случае (выражения для вторых и третьих моментов флуктуаций скорости дисперсной фазы, турбулентного потока массы) осуществляется на основе полуэмпирических формул, основанных на различных интерпретациях градиентной гипотезы. Подобный способ записи уравнений баланса для турбулентных течений часто приводит к несогласующимся между собой замыканиям.

Принципиально другой метод описания турбулентного течения дисперсной фазы основан на использовании аппарата функции плотности вероятности (ФПВ). В этом случае осреднение проводят по ансамблю турбулентных реализаций. Рассматривают бесконечное множество случайных реализаций турбулентного потока в заданный момент времени, которое является полным пространством событий. По пространству событий выполняют осреднение. Эта процедура осреднения является строгой в духе аксиоматики теории случайных процессов А.Н. Колмогорова. В результате осреднения индикаторной функции (А.Н. Колмогоров), вырезающей случайную траекторию частицы в фазовом пространстве, получают функцию распределения плотности вероятности. В этом случае даже одну частицу можно рассматривать как сплошную среду — дисперсную фазу. Функция плотности вероятности содержит всю информацию о дисперсной системе. Поэтому возникает естественное стремление найти функцию плотности вероятности и с ее помощью вычислить все незамкнутые моменты в уравнениях баланса массы, импульса, энергии хаотического движения частиц в турбулентном потоке.

Уравнение для функции плотности вероятности — прямое уравнение А.Н. Колмогорова — является следствием строгого подхода, основанного на аксиомах классической теории случайных процессов. Существуют методы замыкания уравнения для ФПВ. Аналитическое и численное решение уравнения для ФПВ наталкивается на существенные трудности, поэтому в литературе применяют упрощенный метод, основанный на численном интегрировании системы уравнений для моментов [11–14]. Аналитическое решение уравнения для функции плотности вероятности можно получить только для ограниченного числа модельных случаев. Процедуры численного решения пока не разработаны. Поэтому цель работы — проиллюстрировать возможность численного ре-

шения уравнения для функции плотности вероятности и анализа эффективности различных аппроксимаций конвективных, диффузионных слагаемых, нестационарности, граничных условий в пространстве скоростей. Данная работа является чисто методической, поэтому в ней не исследуется трехмерное течение, а турбулентность предполагается однородной и изотропной. Это позволяет ограничиться одномерной записью уравнений.

Итак, исследуем поведение инерционных частиц или капель в газе, силой Бассе и эффектами присоединенной массы пренебрежем, массовые силы рассматривать не будем. Частицы будем считать достаточно крупными, с диаметром более 1 мкм, что позволит не учитывать броуновскую диффузию и использовать методы механики сплошной среды при расчете силы сопротивления. Силу сопротивления частицы запишем в приближении Стокса.

Современное развитие численных методов позволяет продвинуться в разработке методик прямого численного интегрирования уравнения для ФПВ. В работе рассмотрено уравнение для ФПВ распределения скорости частиц в однородном случайном поле скорости газа (например, капли в условиях атмосферной турбулентности). Целью исследования является разработка численного алгоритма интегрирования уравнения для ФПВ.

В качестве примера рассмотрим вовлечение частиц в случайные флуктуации скорости газа. В начальный момент времени ФПВ скорости частиц имеет узкий пик, моделируемый распределением Гаусса с малой дисперсией. Эта аппроксимация соответствует случаю попадания почти детерминированного потока частиц в случайное поле скорости газа.

Построим численный алгоритм, основанный на консервативной неявной разностной схеме второго порядка точности по скорости и первого порядка точности по времени. Сформулируем граничные условия для ФПВ на границах интервала интегрирования второго порядка точности [15–22]. Исследуем популярную схему аппроксимации конвективных слагаемых с направленными разностями и сравним результаты расчетов с аналитическим решением, построенным на основе функции Грина уравнения для ФПВ.

Постановка задачи. Во многих современных приложениях реализуется движение твердых частиц в случайном поле скорости газа. Уравнения динамики инерционной частицы, движение которой определяется силой трения в газе, имеют вид

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} \{u(X(t), t) - V(t)\}; \quad \frac{dX(t)}{dt} = V(t),$$

где τ — время динамической релаксации, зависящее от массы частицы и коэффициента трения; $u(x, t)$ — случайная скорость газа.

Функция плотности вероятности перехода частицы в фазовом пространстве координат и скоростей определяется как

$$\Phi(x, V, t | x_0, V_0, t_0) = \langle \delta[(x - x_0) - (X(t) - X(t_0))] \delta[(V - V_0) - (V(t) - V(t_0))] \rangle.$$

Здесь x_0, V_0 — координата и скорость частицы в момент времени t_0 ; знак $\langle \dots \rangle$ означает осреднение по ансамблю случайных флуктуаций скорости газа.

Для простоты будем считать поле скорости газа флуктуациями с нулевым средним значением

$$\langle u(x, t) \rangle = 0.$$

Рассмотрим частный случай, для которого можно получить простое аналитическое решение: флуктуации скорости газа однородны в пространстве $u(x, t) = u(t)$. Для изотропного поля флуктуаций скорости можно ограничиться одномерным случаем.

Уравнение для функции плотности вероятности перехода в пространстве координат и скорости частицы можно получить на основе подхода, предложенного в работах Фоккера — Планка, А.Н. Колмогорова, Эйнштейна. Уравнение для функции плотности вероятности перехода для скорости частицы в однородном случайном поле скорости газа имеет вид

$$\frac{\partial \Phi(V, t | V_0)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial V} [V \Phi(V, t | V_0)] + \frac{\sigma^2}{\tau} \frac{\partial^2}{\partial V^2} \Phi(V, t | V_0), \quad (1)$$

где σ^2 — дисперсия флуктуаций скорости газа.

Функция распределение скорости частицы определена в интервале $-\infty < V < \infty$. Начальное условие для уравнения (1) имеет вид

$$\Phi(V, 0 | V_0) = \delta(V - V_0).$$

Аналитическое решение. Получим решение уравнения для ФПВ (1) с заданным начальным распределением:

$$\Phi_0(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp \left\{ -\frac{(V - V_0)^2}{2\sigma_0^2} \right\}, \quad (2)$$

где σ_0^2 — дисперсия флуктуаций скорости частицы, $\sigma_0^2 \ll \sigma^2$; V_0 — среднее значение скорости частицы в начальный момент времени. Дельта-образную функцию выбирают с учетом будущих компьютерных вычислений.

Функция Грина уравнения ФПВ имеет вид

$$G(V, t | V') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1 - \exp(-2t/\tau))}} \exp \left\{ -\frac{(V - V' \exp(-t/\tau))^2}{2\sigma^2(1 - \exp(-2t/\tau))} \right\}.$$

Перепишем выражение для ФПВ как

$$G(V, t | V') = \frac{\exp(t/\tau)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\exp(2t/\tau) - 1)}} \exp \left\{ -\frac{(V \exp(t/\tau) - V')^2}{2\sigma^2(\exp(2t/\tau) - 1)} \right\}.$$

Решение через функцию Грина выглядит следующим образом:

$$\Phi(V, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(V') G(V, t | V') dV'.$$

Получим решение в виде функции Гаусса

$$\Phi(V, t) = \frac{\exp(t/\tau)}{\sqrt{2\pi[\sigma^2(\exp(2t/\tau) - 1) + \sigma_0^2]}} \exp\left\{-\frac{(V \exp(t/\tau) - V_0)^2}{2[\sigma^2(\exp(2t/\tau) - 1) + \sigma_0^2]}\right\}.$$

Для удобства анализа полученного решения перепишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi(V, t) = & \frac{\exp(t/\tau)}{\sqrt{2\pi[\sigma^2(1 - \exp(-2t/\tau)) + \sigma_0^2 \exp(-2t/\tau)]}} \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{(V - V_0 \exp(-t/\tau))^2}{2[\sigma^2(1 - \exp(-2t/\tau)) + \sigma_0^2 \exp(-2t/\tau)]}\right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

В начальный момент времени функция распределения (3) совпадает с дельта-образной функцией (2). Эта запись соответствует решению, описывающему частицу, помещенную в начальный момент времени во флуктуирующую среду с почти детерминированной скоростью V_0 . Для времени $t \gg \tau$ начальная информация диссипирует и распределение скорости (3) переходит в распределение Максвелла:

$$\Phi_{\infty}(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{V^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

По мере увеличения времени дисперсия флуктуаций скорости частицы

$$\langle V^2 \rangle = [\sigma^2(1 - \exp(-2t/\tau)) + \sigma_0^2 \exp(-2t/\tau)]$$

увеличивается от σ_0^2 при времени $t = 0$ до стационарного значения $\langle V^2 \rangle = \sigma^2$ при времени $t \gg \tau$.

Рисунок 1 иллюстрирует динамику перехода дельта-образного начального распределения скорости в распределение Максвелла ($\sigma = 1, \sigma_0 = 0,1$).

Численное решение уравнения для ФПВ. Решим исходное уравнение для ФПВ

$$\frac{\partial \Phi(V, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial V} [V \Phi(V, t)] + \frac{\sigma^2}{\tau} \frac{\partial^2}{\partial V^2} \Phi(V, t)$$

с начальным условием

$$\Phi_0(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left\{-\frac{(V-V_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}.$$

Здесь начальная дисперсия $\sigma_0^2 \ll \sigma^2$. Пусть $\sigma_0 \approx 0,1\sigma$. Начальная скорость $V_0 \approx 3\sigma$.

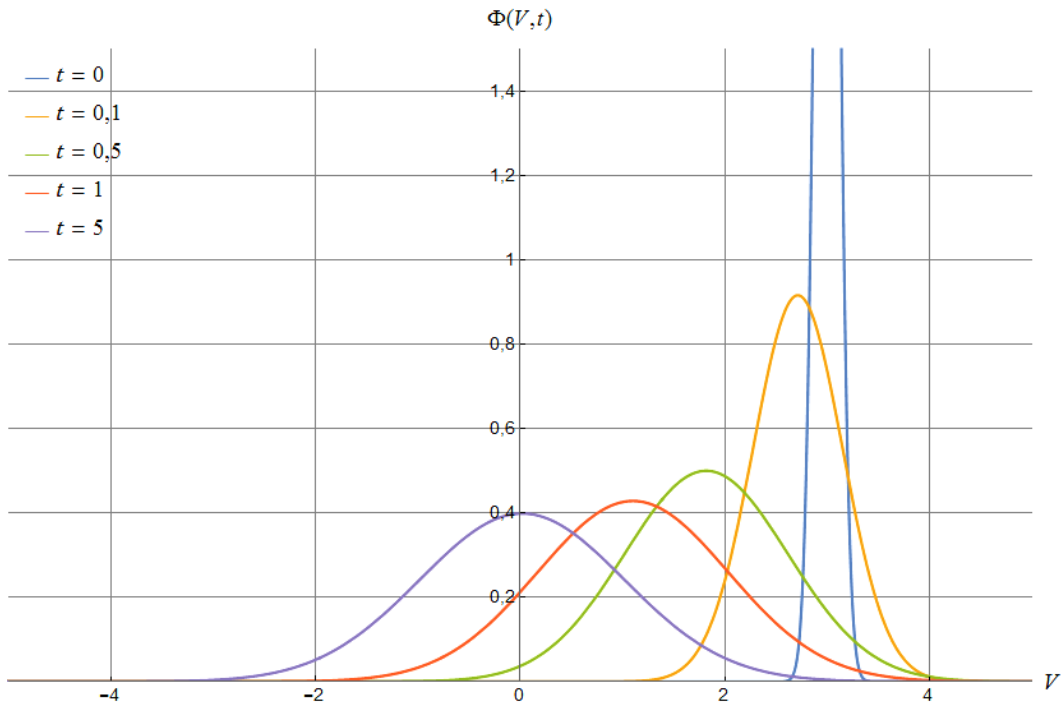


Рис. 1. Аналитическое решение уравнения Фоккера — Планка

Выберем границы интегрирования $V_{\min} = -10\sigma$, $V_{\max} = V_0 + 12\sigma$. Определим число узлов N так, чтобы шаг разбиения $\Delta V = (V_{\max} - V_{\min})/N \leq \sigma_0/5$. Нумерация узлов $i = 0, 1, \dots, N$.

На концах интервала интегрирования соблюдаются граничные условия второго рода:

$$\left. \frac{\partial \Phi(V,t)}{\partial V} \right|_{V=V_{\min}} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi(V,t)}{\partial V} \right|_{V=V_{\max}} = 0; \tag{4}$$

$$V_i = V_{\min} + \frac{V_{\max} - V_{\min}}{N} i, \quad \Delta t \approx 0,1\tau, \quad t^{(n+1)} = t^{(n)} + \Delta t, \quad t^{(0)} = 0,$$

$$\Phi_i^{(n)} = \Phi(V_i, t^{(n)}).$$

По временной сетке вычисления ведут до достижения стационарного состояния системы.

Неявная схема в недивергентной форме. Перепишем уравнение (1) в недивергентной форме:

$$\frac{\partial \Phi(V,t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \Phi(V,t) + \frac{V}{\tau} \frac{\partial}{\partial V} \Phi(V,t) + \frac{\sigma^2}{\tau} \frac{\partial^2}{\partial V^2} \Phi(V,t).$$

Аппроксимируем его следующим образом:

$$\frac{\Phi_i^{(n+1)} - \Phi_i^{(n)}}{\Delta t} = \frac{1}{\tau} \Phi_i^{(n)} + \frac{V_i}{\tau} \frac{\Phi_i^{(n+1)} - \Phi_{i-1}^{(n+1)}}{\Delta V} + \frac{\sigma^2}{\tau} \frac{\Phi_{i+1}^{(n+1)} - 2\Phi_i^{(n+1)} + \Phi_{i-1}^{(n+1)}}{(\Delta V)^2}, \quad (5)$$

$$i = 1, \dots, N-1.$$

Запишем уравнение (5) в виде формулы трехточечной прогонки:

$$\frac{\Delta t}{\tau} \left[-\frac{V_i}{\Delta V} + \frac{\sigma^2}{(\Delta V)^2} \right] \Phi_{i-1}^{(n+1)} - \left[1 + \frac{\Delta t}{\tau} \left(-\frac{V_i}{\Delta V} + \frac{2\sigma^2}{(\Delta V)^2} \right) \right] \Phi_i^{(n+1)} + \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\sigma^2}{(\Delta V)^2} \Phi_{i+1}^{(n+1)} = \left[-1 + \frac{\Delta t}{\tau} \right] \Phi_i^{(n)}.$$

Из такой записи видно, что прогонка для такой системы безусловно устойчива (т. е. строгое диагональное преобладание матрицы системы соблюдается всегда). Значит, эту систему уравнения следует решать методом трехдиагональной прогонки. Эта схема имеет порядок аппроксимации $O(\Delta V + \Delta t)$, поскольку конвективное слагаемое в разностном уравнении (5) аппроксимировано разностью по потоку. Таким образом, будет достаточно аппроксимировать граничные условие с первым порядком по скорости:

$$\Phi_0^{(n+1)} = \Phi_1^{(n+1)}, \quad \Phi_N^{(n+1)} = \Phi_{N-1}^{(n+1)}.$$

Покажем теперь, что схема позволяет проводить расчеты с порядком, предсказуемым теорией. Проведем расчеты на двух сетках с параметрами Δt , ΔV и $\Delta t/2$, $\Delta V/2$. Вычислим норму отклонения численного решения от аналитического $(R^{\Delta t, \Delta V})$ на момент времени T , в качестве нормы возьмем максимум отклонения по всем значениям (табл. 1).

Таблица 1

Норма отклонения численного и аналитического решения

Время сравнения	Δt	ΔV	$R^{\Delta t, \Delta V}$
$T = \Delta t$	0,10	0,02	0,468126
$T = 2\Delta t$	0,05	0,01	0,221855

Отношение норм при разных шагах сетки: $R^{\Delta t, \Delta V} / R^{\Delta t/2, \Delta V/2} = 2,11005$. Это доказывает, что схема позволяет проводить расчеты с порядком $O(\Delta V + \Delta t)$.

Проверим, является ли эта схема консервативной. В качестве балансового соотношения для ФПВ используем условие нормировки, т. е. интеграл от каждого очередного решения по расчетной области должен сохраняться и быть равным единице. Интеграл вычислим по квадратурной формуле трапеций. Результаты вычисления нормы для очередного решения в n -й момент времени приведены ниже (при этом параметры имели следующие значения: $\sigma = 1$, $\sigma_0 = 0,1$, $V_0 = 3$, $V_{\min} = -10$, $V_{\max} = 15$, $N = 1250$, $\Delta V = 0,02$, $\tau = 1$, $\Delta t = 0,1$):

Номер временного слоя	0	1	2	...	47	48	49
Значение нормы	1	1	1	...	1	1	1

Очевидно, что эта схема является консервативной. Схемы в недивергентном виде не всегда такие простые. Попробуем получить консервативную схему повышенного порядка для исходного уравнения (1).

Неявная схема с центральной разностью. Рассмотрим исходное уравнение (1), попробуем аппроксимировать конвективное слагаемое центральной разностью. Получим следующую разностную схему:

$$\frac{\Phi_i^{(n+1)} - \Phi_i^{(n)}}{\Delta t} = \frac{1}{\tau} \frac{V_{i+1} \Phi_{i+1}^{(n+1)} - V_{i-1} \Phi_{i-1}^{(n+1)}}{2\Delta V} + \frac{\sigma^2}{\tau} \frac{\Phi_{i+1}^{(n+1)} - 2\Phi_i^{(n+1)} + \Phi_{i-1}^{(n+1)}}{(\Delta V)^2}, \quad (6)$$

$$i = 1, \dots, N - 1.$$

Схема (6) имеет порядок аппроксимации $O((\Delta V)^2 + \Delta t)$ в силу центральной разности. Значит, теперь необходимо получить аппроксимацию граничных условий со вторым порядком по скорости. Рассмотрим левое граничное условие:

$$\left. \frac{\partial \Phi(V, t)}{\partial V} \right|_{V=V_{\min}} = 0;$$

$$\Phi(V_{\min} + \Delta V, t) = \Phi(V_{\min}, t) + \Delta V \left. \frac{\partial \Phi}{\partial V} \right|_{V=V_{\min}} + \frac{(\Delta V)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2} \right|_{V=V_{\min}} + O((\Delta V)^3);$$

$$\frac{\Phi(V_{\min} + \Delta V, t) - \Phi(V_{\min}, t)}{\Delta V} - \frac{\Delta V}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2} \right|_{V=V_{\min}} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial V} \right|_{V=V_{\min}} + O((\Delta V)^2).$$

Из уравнения (1) получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2} = \frac{\tau}{\sigma^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial(V\Phi)}{\partial V} \right).$$

Подставим полученное выражение в аппроксимацию производной:

$$\frac{\Phi_1^{(n+1)} - \Phi_0^{(n+1)}}{\Delta V} - \frac{\Delta V}{2} \frac{\tau}{\sigma^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial(V\Phi)}{\partial V} \right) \Bigg|_{V=V_{\min}} = 0.$$

Производную по времени и по скорости аппроксимируем правой разностью. В итоге получим следующую аппроксимацию левого граничного условия:

$$\frac{\Phi_0^{(n+1)} - \Phi_0^{(n)}}{\Delta t} = \frac{1}{\tau} \frac{V_1 \Phi_1^{(n+1)} - V_0 \Phi_0^{(n+1)}}{\Delta V} + \frac{\sigma^2}{\tau} \frac{\Phi_1^{(n+1)} - \Phi_0^{(n+1)}}{0,5(\Delta V)^2}.$$

Проводя аналогичные рассуждения для правого условия, запишем формулу для следующей аппроксимации:

$$\frac{\Phi_N^{(n+1)} - \Phi_N^{(n)}}{\Delta t} = \frac{1}{\tau} \frac{V_N \Phi_N^{(n+1)} - V_{N-1} \Phi_{N-1}^{(n+1)}}{\Delta V} - \frac{\sigma^2}{\tau} \frac{\Phi_N^{(n+1)} - \Phi_{N-1}^{(n+1)}}{0,5(\Delta V)^2}. \quad (6)$$

Итак, получена аппроксимация уравнения для ФПВ (1) и граничных условий (4) со вторым порядком по скорости.

Перепишем разностное уравнение (6) в виде формулы трехточечной прогонки:

$$\frac{\Delta t}{\tau} \left[\frac{V_{i-1}}{2\Delta V} + \frac{\sigma^2}{(\Delta V)^2} \right] \Phi_{i-1}^{(n+1)} - \left[1 + 2 \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\sigma^2}{(\Delta V)^2} \right] \Phi_i^{(n+1)} + \frac{\Delta t}{\tau} \left[\frac{V_{i+1}}{2\Delta V} + \frac{\sigma^2}{(\Delta V)^2} \right] \Phi_{i+1}^{(n+1)} = -\Phi_i^{(n)}.$$

Получим условие устойчивости из $B_i > A_i + C_i$:

$$\left[1 + 2 \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\sigma^2}{(\Delta V)^2} \right] > \frac{\Delta t}{\tau} \left[\frac{V_{i-1}}{2\Delta V} + \frac{\sigma^2}{(\Delta V)^2} \right] + \frac{\Delta t}{\tau} \left[\frac{V_{i+1}}{2\Delta V} + \frac{\sigma^2}{(\Delta V)^2} \right];$$

$$1 > \frac{\Delta t}{\tau} \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2\Delta V} = \frac{\Delta t}{\tau}.$$

Получаем следующее условие устойчивости: $\Delta t < \tau$. Таким образом, повышение порядка аппроксимации привело к условной устойчивости.

Как и в предыдущем подпункте, покажем, что схема позволяет проводить расчеты с точностью, предсказываемой теорией. По аналогии проведем расчеты на двух сетках, найдем норму разности численного и аналитического решения и сравним их (табл. 2).

Таблица 2

Норма отклонения численного и аналитического решения

Время сравнения	Δt	ΔV	$R^{\Delta t, \Delta V}$
$T = \Delta t$	0,100	0,02	0,4048760
$T = 4\Delta t$	0,025	0,01	0,0919406

Отношение норм при разных шагах сетки $R^{\Delta t, \Delta V} / R^{\Delta t/4, \Delta V/2} = 4,40367$. Это доказывает, что схема считает с порядком $O((\Delta V)^2 + \Delta t)$. Как и предыдущая, она является консервативной. Результаты вычисления нормы для очередного решения в n -й момент времени представлены ниже (интеграл равен единице для любой траектории, значит, схема является консервативной; расчеты выполнены с теми же значениями параметров):

Номер временного слоя	0	1	2	...	47	48	49
Значение нормы	1	1	1	...	1	1	1

Проанализируем полученные данные с помощью рис. 2, где приведены результаты численного (*пунктирные кривые*) и аналитического (*сплошные кривые*) решения уравнения (1). Расчеты проведены со следующими значениями параметров: $\sigma = 1$, $\sigma_0 = 0,1$, $V_0 = 3$, $V_{\min} = -10$, $V_{\max} = 15$, $N = 2500$, $\Delta V = 0,01$, $\tau = 1$, $\Delta t = 0,05$.

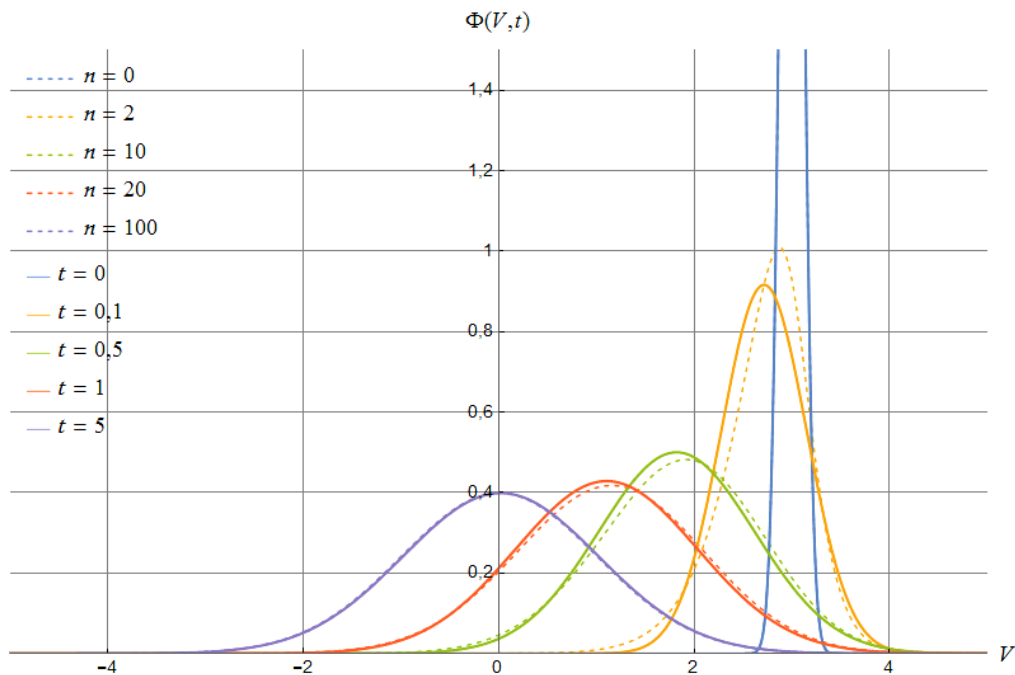


Рис. 2. Сопоставление численного и аналитического решения

Ошибка численного и аналитического решения для момента времени $t = 0,1$ лежит в интервале от нуля до максимального отклонения, равного 0,191104. Далее с течением времени этот отрезок уменьшается. Отметим, что при сгущении сетки этот интервал так же стремится к нулю, что говорит о правильности численного решения по отношению к аналитическому.

Видно, что в результате вычислений начальное распределение скорости частицы с дисперсией σ_0^2 и математическим ожиданием V_0 переходит к стационарному

нарному распределению с дисперсией σ^2 и нулевым математическим ожиданием. Это соответствует тому, что частица с почти детерминированной скоростью V_0 попадает в случайное поле скорости газа. Поле скорости этого газа описывается флуктуациями с нулевым средним значением, а дисперсия равна σ^2 . С течением времени частица постепенно вовлекается в движение газа. Это приводит к тому, что ее приблизительная начальная скорость V_0 становится в среднем равной нулю, а разброс значений скорости вокруг ее среднего становится равен σ . Отсюда можно сделать вывод, что численное решение проявляет те же свойства, что и аналитическое: начальная информация о распределении скорости частицы диссипирует и переходит в распределение Максвелла.

Заключение. Разработан численный алгоритм интегрирования уравнения для ФПВ скорости частиц в однородном поле случайной скорости газа. Численная схема основана на разностной аппроксимации слагаемых в уравнении для ФПВ. При вычислениях использован неявный метод интегрирования с первым порядком точности по времени и вторым порядком точности по скорости. Построена разностная аппроксимация граничного условия для ФПВ второго порядка точности. Решение системы разностных уравнений реализовано методом трехточечной прогонки. Рассмотрены две схемы аппроксимации конвективного слагаемого: метод центральных разностей и метод направленных разностей. Показано, что метод с разностями по потоку обеспечивает безусловную устойчивость метода прогонки и первый порядок аппроксимации по скорости. Для аппроксимации центральными разностями порядок по скорости становится вторым, но появляется ограничение на шаг интегрирования по времени.

Результат аналитического решения удовлетворительно согласуется с данными численного интегрирования. Аналитическое решение получено на основе функции Грина уравнения для ФПВ.

Литература

- [1] Кузнецов В.Р., Сабельников В.А. *Турбулентность и горение*. Москва, Физматлит, 1986, 288 с.
- [2] Тихонов В.И., Миронов М.А. *Марковские процессы*. Москва, Советское радио, 1977, 488 с.
- [3] Леви П. *Стохастические процессы и броуновское движение*. Москва, Наука, 1972, 376 с.
- [4] Хорстхемке В., Лефевр Р. *Индукцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии, биологии*. Москва, Мир, 1987, 400 с.
- [5] Терехов В.И., Пахомов М.А. *Тепломассоперенос и гидродинамика в газопельных потоках*. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2008, 283 с.
- [6] Risken H. *The Fokker-Planck equation*. Berlin, Springer, 1989, 472 p.
- [7] Ho C., Sasaki R. Extensions of a class of similarity solutions of Fokker-Planck equation with time-dependent coefficients and fixed/moving boundaries. *Journal of Mathematical Physics*, 2013, vol. 55, no. 11, pp. 1–7.

- [8] Libby P.A., Bilger R.W., Williams F.A. *Turbulent reacting flows*. New York, Springer, 1980, 246 p.
- [9] Кляцкин В.И. *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах*. Москва, Наука, 1980, 336 с.
- [10] Кляцкин В.И., Гурарий Д. Когерентные явления в стохастических динамических системах. *Успехи физических наук*, 1999, т. 169, № 2, с. 171–207.
- [11] Hasegawa H. A moment approach to non-Gaussian colored noise. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2007, vol. 384, no. 2, pp. 241–258.
- [12] Hasegawa H. Dynamics of the Langevin model subjected to colored noise: functional-integral method. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2008, vol. 387, no. 12, pp. 2697–2718.
- [13] Hasegawa Y., Arita M. Noise-intensity fluctuation in Langevin model and its higher-order Fokker-Planck equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2011, vol. 390, no. 6, pp. 1051–1063.
- [14] Haworth D.C. Progress in probability density function methods for turbulent reacting flows. *Progress in Energy and Combustion Science*, 2010, vol. 36, no. 2, pp. 168–259.
- [15] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. Москва, Наука, 1977, 736 с.
- [16] Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Приближенные методы математической физики*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001, 700 с.
- [17] Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2 т.* Москва, Мир, 1991, 504 с., 552 с.
- [18] Роуч П. *Вычислительная гидродинамика*. Москва, Мир, 1980, 616 с.
- [19] Ши Д. *Численные методы в задачах теплообмена*. Москва, Мир, 1988, 544 с.
- [20] Самарский А.А. *Разностные методы решения задач газовой динамики*. Москва, Наука, 1980, 352 с.
- [21] Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. Москва, Наука, 1980, 536 с.
- [22] Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва, Наука, 1978, 592 с.

Клочков Алексей Константинович — студент кафедры «Прикладная математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Деревич Игорь Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

NUMERICAL AND ANALYTICAL SOLUTION OF THE EQUATION FOR THE PROBABILITY-DENSITY FUNCTION

A.K. Klochkov

lidrail@mail.ru

SPIN-code: 9057-4232

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article suggests a computational solution of the closed-form equation for the probability-density function (PDF) of the particles velocity distribution in the gas velocity random field. The particles motion occurs only due to the influence of the resistance force written in the Stokes approximation. We introduce an analytical solution for the PDF through the Green's function of the Fokker-Planck-Kolmogorov equation. The numerical quadrature method is based on the conservative difference scheme of the first accuracy order in time and of the second order in velocity. The results of the numerical quadrature are collated with the analytical solution. We compare two difference schemes approximating the convectional summand: central differences and upwind differences.

Keywords

Probability-density function, difference scheme, conservative scheme, approximation, equilibrium, convectional summand

© Bauman Moscow State Technical University, 2018

References

- [1] Kuznetsov V.R., Sabel'nikov V.A. Turbulentnost' i gorenie [Turbulence and combustion]. Moscow, Fizmatlit publ., 1986, 288 p.
- [2] Tikhonov V.I., Mironov M.A. Markovskie protsessy [Markov processes]. Moscow, Sovetskoe radio publ., 1977, 488 p.
- [3] Levi P. Stokhasticheskie protsessy i brounovskoe dvizhenie [Stochastic processes and Brownian motion]. Moscow, Nauka publ., 1972, 376 p.
- [4] Khorstkhemke V., Lefevr R. Indutsirovannye shumom perekhody: Teoriya i primeneniye v fizike, khimii, biologii [Noise induced transitions: theory and application in physics, chemistry, biology]. Moscow, Mir publ., 1987, 400 p.
- [5] Terekhov V.I., Pakhomov M.A. Teplomassoperenos i gidrodinamika v gazokapel'nykh potokakh [Heat and mass transfer in gas-droplet flows]. Novosibirsk, NSTU publ., 2008, 283 p.
- [6] Risken H. The Fokker-Planck equation. Berlin, Springer publ., 1989, 472 p.
- [7] Ho C., Sasaki R. Extensions of a class of similarity solutions of Fokker-Planck equation with time-dependent coefficients and fixed/moving boundaries. *Journal of Mathematical Physics*, 2013, vol. 55, no. 11, pp. 1–7.
- [8] Libby P.A., Bilger R.W., Williams F.A. Turbulent reacting flows. New York, Springer publ., 1980, 246 p.
- [9] Klyatskin V.I. Stokhasticheskie uravneniya i volny v sluchayno-neodnorodnykh sredakh [Stochastic equations and waves in random medium]. Moscow, Nauka publ., 1980, 336 p.

-
- [10] Klyatskin V.I., Gurariy D. Coherent phenomena in stochastic dynamical systems. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 1999, vol. 169, no. 2, pp. 171–207. (Eng. version: *Physics–Uspekhi*, 1999, vol. 42, no. 2, pp. 165–198.)
- [11] Hasegawa H. A moment approach to non-Gaussian colored noise. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2007, vol. 384, no. 2, pp. 241–258.
- [12] Hasegawa H. Dynamics of the Langevin model subjected to colored noise: functional-integral method. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2008, vol. 387, no. 12, pp. 2697–2718.
- [13] Hasegawa Y., Arita M. Noise-intensity fluctuation in Langevin model and its higher-order Fokker-Planck equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2011, vol. 390, no. 6, pp. 1051–1063.
- [14] Haworth D.C. Progress in probability density function methods for turbulent reacting flows. *Progress in Energy and Combustion Science*, 2010, vol. 36, no. 2, pp. 168–259.
- [15] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka publ., 1977, 736 p.
- [16] Vlasova E.A., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Priblizhennyye metody matematicheskoy fiziki* [Approximate methods of mathematical physics]. Moscow, Bauman Press, 2001, 700 p.
- [17] Fletcher C.A.J. *Computational techniques for fluid dynamics*. Springer, 1988, 409 p., 484 p. (Russ. ed: *Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostey: v 2 t.* Moscow, Mir publ., 1991, 504 p., 552 p.)
- [18] Roache P.J. *Computational fluid dynamics*. Hermosa Publishers, 1976, 446 p. (Russ. ed.: *Vychislitel'naya gidrodinamika*. Moscow, Mir publ., 1980, 616 p.)
- [19] Shih T.M. *Numerical heat transfer*. CRC Press, 1984, 563 p. (Russ. ed.: *Chislennyye metody v zadachakh teploobmena*. Moscow, Mir publ., 1988, 544 p.)
- [20] Samarskiy A.A. *Raznostnyye metody resheniya zadach gazovoy dinamiki* [Difference methods of solving gas dynamics problems]. Moscow, Nauka publ., 1980, 352 p.
- [21] Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noy matematiki* [Methods of computational mathematics]. Moscow, Nauka publ., 1980, 536 p.
- [22] Samarskiy A.A., Nikolaev E.S. *Metody resheniya setochnykh uravneniy* [Solution method for finite-difference equations]. Moscow, Nauka publ., 1978, 592 p.

Klochkov A.K. — student, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — I.V. Derevich, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.