УДК 517.9 DOI: 10.18698/2541-8009-2018-03-275

О ПРИЦИПАХ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ В КЛАССИЧЕСКОМ ИЗЛОЖЕНИИ

А.А. Аскерова

iselaskerova@yandex.ru
SPIN-код: 5741-2000

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Представлены теоремы о пределах, которые имеют условный характер. Приведено не только полное обоснование принципов теории пределов на основе развитой ранее теории действительных чисел, но и доказательства того, что эти принципы равносильны. Показано, что для доказательства общих теорем анализа все четыре принципа одинаково пригодны. Для решения задач на пределы последовательностей принципы Коши, Вейерштрасса и Кантора приспособлены лучше, чем принцип Дедекинда. Теоремы Кантора и Дедекинда доказываются для числовой прямой, причем под точками подразумеваются числа, под отрезками — некоторые совокупности чисел. Утверждения теорем понимаются в буквальном смысле, как относящиеся к обыкновенным отрезкам и точкам на геометрической, а не на числовой прямой. Эти утверждения являются следствиями принятых в геометрии определений и аксиом.

Ключевые слова

Формула, предел, принцип, теория, пространство, бесконечность, признак, последовательность

Поступила в редакцию 01.02.2018

Введение. Прежде чем перейти к подробному изложению основных принципов теории пределов, перечислим основные свойства действительных чисел.

1. Каждое рациональное число является действительным числом.

2. Для двух чисел α и β выполняется одно и только одно из трех соотношений:

$$\alpha = \beta, \ \ \alpha > \beta, \ \ \alpha < \beta.$$

3. Из условий $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$ следует, что $\alpha > \gamma$.

4. Для любых чисел α и β существует определенное число γ, называемое их суммой:

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

5. Сложение подчиняется коммутативному закону:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

6. Сложение подчиняется ассоциативному закону:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

7. Если $\alpha > \alpha'$, то $\alpha + \beta > \alpha' + \beta$.

8. Для любых двух чисел α и β существует такое число γ, что $\alpha = \beta + \gamma$. Это число называется разностью чисел α и β и обозначается через $\alpha - \beta$.

9. Для любых двух чисел α и β существует определенное число γ, называемое их произведением:

$$\gamma = \alpha \cdot \beta \,.$$

10. Умножение подчиняется коммутативному закону:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

11. Умножение подчиняется ассоциативному закону:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma.$$

12. Умножение подчиняется дистрибутивному закону:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

13. Если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то и $\alpha \cdot \beta > 0$.

14. Если $\beta \neq 0$ и α — произвольное число, то существует такое число γ, что $\alpha = \beta \cdot \gamma$. Оно называется частным чисел α и β и обозначается через $\dfrac{\alpha}{\beta}$ или $\alpha : \beta$.

Заметим, что список этих свойств отличается от списка свойств рациональных чисел только заголовками, тогда как свойства, выражаемые в принципах Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда, которые мы уставим далее, являются специальными свойствами всего множества действительных чисел. Они престают быть верными, если ограничиваться одними только рациональными числами или, например, только алгебраическими (действительными) числами. Отметим равнозначность, или эквивалентность, указанных четырех принципов. Она выражается в том, что если один из этих принципов (например, принцип Коши) уже доказан на основе теории действительных чисел, используемой в полном объеме, то любой другой принцип может быть выведен из этого принципа с помощью известных свойств [1–3]. Поскольку эти свойства являются распространением известных свойств рациональных чисел на действительные числа, можно заключить, что все то специфическое и новое, к чему удается прийти, расширяя множество рациональных чисел до множества всех действительных чисел, заложено в одной и той же мере в каждом из четырех принципов: Коши, Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда. Именно в этом смысле они равносильны между собой, и если все же имеет смысл пользоваться четырьмя, а не одним принципом, то это потому, что в одних вопросах и задачах можно быстрее прийти к цели с помощью одного, а в других — с помощью другого принципа [4–6].

Принцип Коши. *Определение.* Последовательность действительных чисел $\{\alpha_n\}$ называется фундаментальной, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что $\left|\alpha_n - \alpha_{n+p}\right| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$ и любом натуральном p.

Это определение представляет собой распространение известного понятия фундаментальной последовательности рациональных чисел на более общий случай последовательности действительных чисел [2–4]. Очевидно, что каждая сходящаяся последовательность $\{\alpha_n\}$ является фундаментальной, поскольку из того, что $|\alpha-\alpha_n|<\varepsilon/2$ при $n>N(\varepsilon)$ $(\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n)$, следует, что

$$|\alpha_n-\alpha_{n+p}|=|(\alpha_n-\alpha)+(\alpha-\alpha_{n+p})|\le|\alpha-\alpha_n|+|\alpha-\alpha_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Принцип Коши. Каждая фундаментальная последовательность действительных чисел $\{\alpha_n\}$ сходится.

Доказательство. Для случая, когда все α_n — рациональные числа, эта теорема была уже сформулирована при построении теории действительных чисел [4–6]. Установлено, что класс α, в который входит последовательность $\{\alpha_n\}$, представляет собой предел этой последовательности. Переходя к общему случаю, можно заменить последовательность $\{\alpha_n\}$ некоторой последовательностью рациональных чисел $\{u_n\}$, подобранных так, что $\{\alpha_n-u_n\}$ будет сходиться к нулю. Благодаря этому $\{u_n\}$ будет также фундаментальной последовательностью, а ее предел α будет также пределом и для последовательности $\{\alpha_n\}$.

Выберем в качестве u_n приближение к α_n по недостатку с точностью до 10^{-n}. Отбросив в десятичном разложении α_n все цифры, следующие за n-й цифрой после запятой, получим u_n. Очевидно, что

$$0\le\alpha_n-u_n<\frac{1}{10^n},$$

т. е. последовательность $\{\alpha_n-u_n\}$ сходится к нулю. Такого рода последовательности называют *нуль-последовательностями*. Отсюда можно заключить, что $\{u_n\}$ — также фундаментальная последовательность, поскольку если $1/10^n<\varepsilon/3$ и $|\alpha_n-\alpha_{n+p}|<\varepsilon/3$ при $n>N(\varepsilon)$, то при тех же значениях n имеем:

$$|u_n-u_{n+p}|=|(u_n-\alpha_n)+(\alpha_n-\alpha_{n+p})+(\alpha_{n+p}-u_{n+p})|\le$$
$$\le|u_n-\alpha_n|+|\alpha_n-\alpha_{n+p}|+|\alpha_{n+p}-u_{n+p}|<\frac{1}{10^n}+|\alpha_n-\alpha_{n+p}|+\frac{1}{10^{n+p}}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Но u_n — рациональные числа, поэтому последовательность $\{u_n\}$ входит в некоторый класс α и, следовательно, сходится к действительному числу α:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\alpha.$$

Покажем, что к тому же самому числу сходится и последовательность $\{\alpha_n\}$. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N_1(\varepsilon)$, что при $n > N_1(\varepsilon)$ будет соблюдаться условие

$$\left|\alpha - u_n\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а также такое $N_2(\varepsilon)$, что при $n > N_2(\varepsilon)$ будет справедливо

$$\frac{1}{10^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $n > N = \max\left[N_1(\varepsilon), \mathrm{N}_2(\varepsilon)\right]$ будем иметь:

$$\left|\alpha - \alpha_n\right| = \left|(\alpha - u_n) + (u - \alpha_n)\right| \le \left|\alpha - u_n\right| + \left|u_n - \alpha_n\right| < \left|\alpha - u_n\right| + \frac{1}{10^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

оттуда видно, что последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

Принцип Коши доказан полностью.

Принцип Дедекинда. Перейдем к принципу Вейерштрасса, используя принцип Коши. В дальнейшем изложении выведем принцип Кантора из принципа Вейерштрасса, а принцип Дедекинда — из принципа Кантора. Затем останется только показать, что начальное звено этой цепи принципов — принцип Коши — может быть выведено из конечного звена — принципа Дедекинда. Тогда вся цепь замкнется и можно будет утверждать, что любой из четырех принципов в указанном смысле следует из любого другого [3]. Все это наглядно иллюстрируется схемой, где стрелкой обозначен вывод, или следствие (рис. 1).

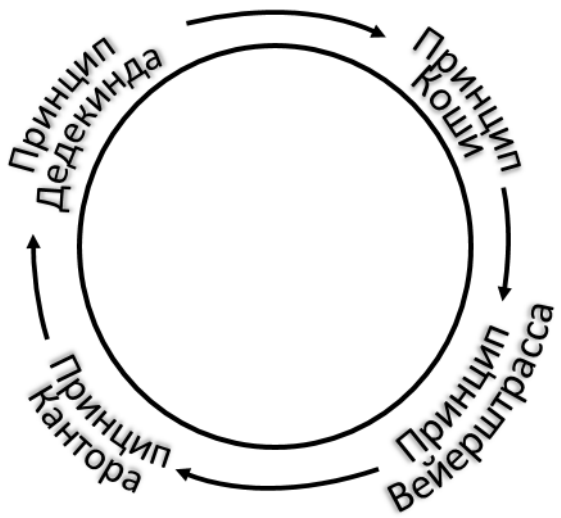

Рис. 1. Схема перехода к принципам

Принцип Вейерштрасса. Если для последовательности действительных чисел $\{\alpha_n\}$ выполняются следующие условия:

а) $\alpha_n \le \alpha_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$;

б) $\alpha_n \le M$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$,

то последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится, причем ее предел α удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_n \le \alpha \le M \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Чтобы доказать эту теорему, установим, что $\{\alpha_n\}$ — фундаментальная последовательность [1]. Тогда согласно принципу Коши последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится. Доказательство будем вести от противного. Итак, предположим, что $\{\alpha_n\}$ не является фундаментальной последовательностью. Тогда должно существовать такое $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0,$ для которого неравенства $\left|\alpha_n - \alpha_{n+p}\right| < \varepsilon_0$ не будут выполняться для всех *n* (достаточно больших) и для любых натуральных *p*. Но это значит, что для некоторых сколь угодно больших значений n и соответствующих им значений p будут справедливы противоположные неравенства: $\left|\alpha_n - \alpha_{n+p}\right| \ge \varepsilon_0$. Пусть n_1 — одно из таких значений *n*, а p_1 — соответствующее ему значение *p*. Тогда $\left|\alpha_{n_1} - \alpha_{n_1+p_1}\right| \ge \varepsilon_0;$ среди натуральных чисел, больших, чем $n_1 + p_1,$ должно встретиться такое $n_2,$ что для соответствующего ему p_2 будет справедливо неравенство $\left|\alpha_{n_2} - \alpha_{n_2+p_2}\right| \ge \varepsilon_0.$ Продолжая рассуждать подобным образом, найдем последовательность неограниченно возрастающих натуральных чисел n_k и соответствующих им натуральных чисел $p_k,$ таких, что $n_1 < n_1 + p_1 < n_2 < n_2 + p_2 < n_3 < n_3 + p_3 < n_4 < \ldots$ и $\left|\alpha_{n_k} - \alpha_{n_k+p_k}\right| \ge \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$ Имеем тождество

$$\alpha_{n_k+p_k} = \alpha_{n_1} + (\alpha_{n_1+p_1} - \alpha_{n_1}) + (\alpha_{n_2} - \alpha_{n_1+p_1}) + (\alpha_{n_2+p_2} - \alpha_{n_2}) + (\alpha_{n_3} - \alpha_{n_2+p_2}) + \ldots + \\ + (\alpha_{n_k} - \alpha_{n_{k-1}+p_{k-1}}) + (\alpha_{n_k+p_k} - \alpha_{n_k}).$$

Следовательно,

$$\alpha_{n_k+p_k} \ge \alpha_{n_1} + (\alpha_{n_1+p_1} - \alpha_{n_1}) + (\alpha_{n_2+p_2} - \alpha_{n_2}) + \ldots + (\alpha_{n_k+p_k} - \alpha_{n_k}) \ge \alpha_{n_1} + k\varepsilon_0.$$

Однако согласно условию б) теоремы $\alpha_{n_k+p_k} \le M$ при любом *k*. Поэтому и $\alpha_{n_1} + k\varepsilon_0 \le M$ при любом *k*, что невозможно, поскольку при *k* большем, чем $\dfrac{M - \alpha_{n_1}}{\varepsilon_0},$ левая часть последнего неравенства будет больше, чем его правая часть [7]. Полученное противоречие, возникшее вследствие того, что $\{\alpha_n\}$ не является фундаментальной последовательностью, свидетельствует об ошибочности этого предположения. Итак, $\{\alpha_n\}$ есть фундаментальная последовательность, которая сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$. Тогда α не может быть меньше, чем какое-либо из α_n, потому что при $\alpha<\alpha_{n_0}$ для всех $n>n_0$ было бы справедливо отношение $\alpha_n-\alpha\ge\alpha_{n_0}-\alpha>0$ и, следовательно, абсолютная величина $|\alpha_n-\alpha|$ не могла быть меньше положительного числа $\alpha_{n_0}-\alpha$ ни для одного из $n>n_0$. Но это противоречит тому, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$. Итак, всегда $\alpha_n\le\alpha$. Точно так же α не может быть больше, чем M, потому что при $\alpha>M$ для всех n выполнялось бы неравенство $\alpha-\alpha_n\ge\alpha-M>0$, что снова противоречит тому, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$. Итак, $\alpha\le M$.

Принцип Вейерштрасса обоснован полностью.

Используя принцип Кантора, введем следующие определения [2, 3]. Если α и β — действительные числа и $\alpha<\beta$, то назовем совокупность всех действительных чисел x, удовлетворяющих условиям $\alpha\le x\le\beta$, сегментом (числовым). Относительно сегмента $[\alpha_1,\beta_1]$, такого, что $\alpha\le\alpha_1<\beta_1\le\beta$, будем говорить, что он принадлежит сегменту $[\alpha,\beta]$, или что он вложен в сегмент $[\alpha,\beta]$, и записывать это так: $[\alpha,\beta]\supset[\alpha_1,\beta_1]$. Очевидно, что каждое число x, принадлежащее $[\alpha_1,\beta_1]$, вместе с тем принадлежит и $[\alpha,\beta]$. Относительно последовательности вложенных сегментов $\{[\alpha_n,\beta_n]\}$:

$$[\alpha_1,\beta_1]\supset[\alpha_2,\beta_2]\supset[\alpha_3,\beta_3]\supset\ldots\supset[\alpha_n,\beta_n]\supset[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}]\supset\ldots,$$

будем говорить, что это — стягивающаяся система сегментов в том случае, когда последовательность длин сегментов $\{[\beta_n-\alpha_n]\}$ сходится к нулю (рис. 2).

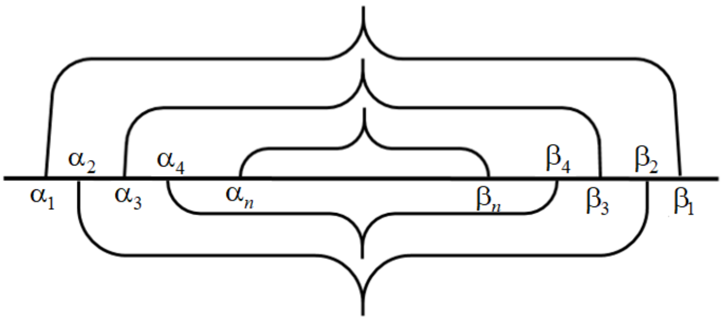

Рис. 2. Схема стягивания сегментов

Опираясь на принцип Вейерштрасса, докажем теорему.

Принцип Кантора. Для любой стягивающейся последовательности сегментов (числовых) $\{[\alpha_n,\beta_n]\}$ существует одно и только одно действительное число

γ, принадлежащее каждому из сегментов этой последовательности; оно является общим пределом последовательностей левых концов сегментов $\{\alpha_n\}$ и правых концов сегментов $\{\beta_n\}$; $\gamma = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n$.

Доказательство. Согласно условию, сегмент $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$ вложен в сегмент $[\alpha_n, \beta_n]$ таким образом, что $\alpha_n \le \alpha_{n+1} < \beta_{n+1} \le \beta_n$ при любом *n*. Отсюда следует, что $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_n \le \alpha_{n+1} \le \ldots$ и, кроме того, что $\alpha_n \le \beta_n \le \beta_{n+1} \le \ldots \le \beta_1$, т. е. последовательность $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условиям а) и б) принципа Вейерштрасса, причем роль *M* играет число β_1. Поэтому последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится к некоторому пределу γ: $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \gamma$, причем $\gamma \ge \alpha_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Покажем, что $\gamma \le \beta_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; отсюда будет следовать, что γ принадлежит каждому из сегментов $[\alpha_n, \beta_n]$.

Допустим противное, т. е. пусть $\gamma > \beta_{n_0}$. Тогда для всех $n > n_0$ будем иметь: $\gamma - \alpha_n > \gamma - \beta_n > \gamma - \beta_{n_0} > 0$. Но это противоречит тому, что $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \gamma$. Итак, $\gamma \le \beta_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, и поскольку, кроме того, $\gamma \ge \alpha_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, значение γ принадлежит каждому из сегментов $[\alpha_n, \beta_n]$. Заметим далее, что $0 \le \beta_n - \gamma \le \beta_n - \alpha_n$, и так как последовательность $\{\beta_n - \alpha_n\}$ есть нуль-последовательность, то и $\{\beta_n - \gamma\}$ есть нуль-последовательность, т. е. $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \gamma$. Таким образом, γ есть общий предел последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Заметим, что γ — единственное число, принадлежащее каждому из сегментов $[\alpha_n, \beta_n]$.

Если допустить, что существует $\gamma' \ne \gamma$, также принадлежащее каждому из этих сегментов, то из того, что $\gamma' - \gamma \le \beta_n - \alpha_n$ и $\{\beta_n - \alpha_n\}$ есть нуль-последовательность, будет следовать, что $|\gamma' - \gamma| = 0$, т. е. $\gamma' = \gamma$.

Принцип Кантора полностью обоснован.

Докажем необходимое для дальнейших рассуждений несколько более общее предложение [3]. Пусть $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$ — произвольная последовательность вложенных сегментов действительных чисел: $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \ldots \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset \ldots$. Тогда существует по крайней мере одно действительное число, принадлежащее каждому из этих сегментов.

Доказательство. Повторяя для последовательности сегментов $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$ рассуждения, приведенные в начале доказательства принципа Кантора, найдем число $\gamma = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$, удовлетворяющее двойному неравенству $\alpha_n \le \gamma \le \beta_n$, т. е. принадлежащее любому из сегментов $[\alpha_n, \beta_n]$. Это и есть искомое число. Так как теперь не предполагается, что $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$ является стягивающей системой, нельзя утверждать, что $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$ и что γ есть единственное число, принадлежащее всем сегментам последовательности [3–5]. По крайней мере одно число, принадлежащее всем сегментам $\left[\alpha_n, \beta_n\right]$, всегда существует.

Введем понятие сечения Дедекинда. *Какое-либо разделение (или разбиение) множества всех действительных чисел на два класса A и B называют сечением (в смысле Дедекинда), произведенным на множестве всех действительных чисел, если выполняются следующие условия:*

1) каждое действительное число принадлежит одному и только одному из классов A и B, причем каждый из этих классов содержит по крайней мере по одному числу (т. е. не является пустым);

2) каждое число, принадлежащее одному определенному классу (например, A), меньше, чем любое число другого класса (B).

Тот класс, числа которого меньше, называется *нижним* классом, другой — *верхним*.

Отнесем, например, к классу A все действительные числа, не превосходящие α, а к классу B — все действительные числа, большие α. Тогда получим сечение, для которого α будет принадлежать нижнему классу и притом будет являться наибольшим числом этого класса. Что касается верхнего класса, то ни одно число не будет наименьшим в нем, но для каждого $\beta \in B$ можно будет указать другое число, например, $(\alpha+\beta)/2$, также принадлежащее B (так как $(\alpha+\beta)/2 > \alpha$) и меньшее, чем β.

С помощью того же α можно образовать и другое сечение, отнеся к нижнему классу A все действительные числа, меньшие, чем α, а к верхнему классу B — числа, не меньшие α. Тогда α войдет в верхний класс, причем будет наименьшим числом этого класса. Что касается нижнего класса A, то ни одно число не будет наибольшим в нем, но для каждого $\gamma \in A$ можно будет указать большее число, также принадлежащее A (например, $(\alpha+\gamma)/2$). В обоих случаях сечение производится посредством числа α. Согласно принципу Дедекинда утверждается, что для всякого сечения на множестве действительных чисел существует действительное число α, производящее именно это сечение. Докажем этот принцип, опираясь на доказанный принцип Кантора.

Принцип Дедекинда. Каково бы ни было сечение на множестве всех действительных чисел, существует действительное число γ, производящее это сечение; оно принадлежит либо нижнему классу и тогда является наибольшим в нем, либо верхнему классу и тогда является наименьшим в нем.

Доказательство. Пусть a и b — действительные числа, из которых a принадлежит нижнему классу A сечения, а b — верхнему классу B. Тогда $\left[a\right] \le a$ — целое число из класса A и $\left[b\right]+1 > b$ — целое число из класса B. Рассмотрим возрастающие целые числа

$$\left[a\right], \left[a\right]+1, ..., \left[b\right]+1.$$

Первое из них принадлежит *A*, последнее — *B*; следовательно, среди них должно существовать последнее принадлежащее классу *A* целое число $\alpha_1 > [a]$, такое, что следующее за ним целое число $\beta_1 = \alpha_1 + 1 \le [b] + 1$ принадлежит классу *B*.

Рассмотрим теперь числа, которые следуют, возрастая с шагом 0,1, от α_1 и до β_1:

$$\alpha_1, \alpha_1 + \frac{1}{10}, \alpha_1 + \frac{2}{10}, ..., \alpha_1 + \frac{9}{10}, \alpha_1 + \frac{10}{10} = \beta_1.$$

Среди них найдется последнее принадлежащее классу *A* число $\alpha_2 = \alpha_1 + k_1/10 \ge \alpha_1$, такое, что следующее за ним число $\beta_2 = \alpha_1 + (k_1 + 1)/10 \le \beta_1$ будет принадлежать классу *B*. Следующий этап рассуждений будем вести, отправляясь от чисел α_2 и β_2 и рассматривая числа, которые следуют, возрастая с шагом 0,1, от α_2 до β_2. Получим числа $\alpha_3 = \alpha_2 + k_2/10^2 \ge \alpha_2$ и $\beta_3 = \alpha_2 + (k_2 + 1)/10^3 \le \beta_2$, из которых первое принадлежит классу *A*, а второе — классу *B*. Заметим, что пары чисел α_1 и β_1, α_2 и β_2 можно рассматривать как концы сегментов с длинами, равными 1, 1/10 и $1/10^2$, с левыми концами, принадлежащими классу *A*, и с правыми концами, принадлежащими классу *B*, причем сегмент $[\alpha_2, \beta_2]$ вложен в $[\alpha_1, \beta_1]$, а сегмент $[\alpha_3, \beta_3]$ вложен в $[\alpha_2, \beta_2]$. Продолжая эти рассуждения дальше, получим бесконечную последовательность сегментов $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$ таких, что

$$[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset [\alpha_3, \beta_3] \supset ... \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \supset ...$$

и $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{1}{10^n - 1} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, это стягивающая система сегментов, и на основании принципа Кантора можно утверждать, что существует число γ, принадлежащее любому из этих сегментов:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n.$$

Покажем, что это число производит данное сечение. Предположим сначала, что оно принадлежит нижнему классу: $\gamma \in A$. Убедимся, что оно является наибольшим в этом классе, т. е. что каждое число $\beta > \gamma$ не принадлежит *A*, т. е. принадлежит классу *B*.

В самом деле, допуская противное, предположим, что $\beta \in A$. Тогда $\beta < \beta_n$, так как $\beta_n \in B$ и, следовательно, $\beta_n - \gamma > \beta - \gamma > 0$. Но это противоречит тому, что $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$. Итак, если $\gamma \in A$, то оно является наибольшим в классе A и вместе с тем производит данное сечение. Совершенно так же покажем, что в случае, когда $\gamma \in B$, оно является наименьшим в этом классе и, следовательно, и в этом случае производит данное сечение.

Теорема доказана.

Докажем, что из принципа Дедекинда может быть выведен как следствие принцип Коши, с которого мы начали. Этим доказательством завершится установление эквивалентности четырех принципов: Коши, Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда. Итак, опираясь непосредственно на принцип Дедекинда, установим принцип Коши. *Каждая фундаментальная последовательность* $\{\alpha_n\}$ *действительных чисел сходится.*

Для доказательства заметим сначала, что каждая фундаментальная последовательность действительных чисел ограничена. Рассуждения здесь совершенно такие же, как и при доказательстве ограниченности фундаментальной последовательности рациональных чисел. Положив $\varepsilon = 1$, можно утверждать, что $\left|\alpha_{n+p} - \alpha_n\right| < 1$, при $n > N$. Пусть $n = n_0 > N$ — фиксированное натуральное число. Тогда

$$\left|\alpha_{n_0+p}\right| = \left|\alpha_{n_0} + (\alpha_{n_0+p} - \alpha_{n_0})\right| \le \left|\alpha_{n_0}\right| + \left|\alpha_{n_0+p} - \alpha_{n_0}\right| < \left|\alpha_{n_0}\right| + 1 \quad (p = 1, 2, 3, ...),$$

т. е. абсолютные величины всех членов последовательности, следующих за α_{n_0}, меньше, чем $\left|\alpha_{n_0}\right| + 1$. Обозначим наибольшее из чисел $\left|\alpha_1\right|, ..., \left|\alpha_{n_0}\right|, \left|\alpha_{n_0}\right| + 1$ через M, тогда при любом n будем иметь $\alpha_n \le M$, что и выражает собой ограниченность последовательности $\{\alpha_n\}$. Произведем теперь сечение на множестве всех действительных чисел, отнеся к нижнему классу A все числа, меньшие бесконечно многих членов последовательности, а к верхнему классу B — все остальные действительные числа [5, 6]. Иными словами, $a \in A$ тогда и только тогда, когда существует бесконечное множество натуральных чисел $n_1, n_2, ..., n_k, ...$, для каждого из которых выполняется неравенство $a < \alpha_{n_k}$. Число $b \in B$ характеризуется тем, что среди членов последовательности $\{\alpha_n\}$ либо нет ни одного члена, превосходящего b, либо имеется лишь конечное число таких членов.

Убедимся сначала, что классы A и B действительно образуют сечение. Очевидно, что каждое действительное число войдет в один и только один из классов A и B. Ни один из этих классов не является пустым; например, число $M - 1$, которое меньше каждого из α_n, принадлежит классу A, а число $M + 1$, которое больше каждого α_n, принадлежит классу $B(\left|\alpha_n\right| \le M)$. Таким образом, условие 1), входящее в определение сечения, выполнено. Но выполнено также и условие 2), поскольку если $a \in A$, то существуют бесконечно многие члены последовательности $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, ..., \alpha_{n_k}, ...$, превосходящие a. Следовательно, если a' — какое-либо действительное число, не превышающее a, то для него должны выполняться неравенства $a' < \alpha_{n_k}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$, откуда следует, что и $a' \in A$. Таким образом, для любого b, не принадлежащего A, т. е. для $b \in B$, должно выполняться неравенство $b > a$, каково бы ни было $a \in A$. Итак, условие 2) также выполнено, и классы A и B образуют сечение. Но тогда, согласно принципу Дедекинда, существует действительное число γ, производящее сечение [7].

Покажем, что оно и является пределом последовательности $\{\alpha_n\}$. В самом деле, пусть ε — какое-либо положительное число. Тогда, с одной стороны, существует такое N, что при $n > N$ и любом p выполняется неравенство $|\alpha_{n+p} - \alpha_n| < \varepsilon/2$ (так как $\{\alpha_n\}$ — фундаментальная последовательность) [8]. С другой стороны, полуинтервалу $(\gamma - \varepsilon/2, \gamma + \varepsilon/2]$ должны принадлежать бесконечно многие члены последовательности $\{\alpha_n\}$ [9].

Действительно, допустим, что здесь их содержится только конечное число: если $\gamma < \gamma + \varepsilon/2$, то $\gamma + \varepsilon/2 \in B$ и, следовательно, лишь конечное число членов последовательности $\{\alpha_n\}$ может превосходить $\gamma + \varepsilon/2$. Отсюда следует, что только конечное число членов последовательности $\{\alpha_n\}$ может превосходить $\gamma - \varepsilon/2$, поскольку каждое $\alpha_n > \gamma - \varepsilon/2$ должно либо принадлежать полуинтервалу $(\gamma - \varepsilon/2, \gamma + \varepsilon/2]$: $\gamma - \varepsilon/2 < \alpha_n \le \gamma + \varepsilon/2$, либо превосходить $\gamma + \varepsilon/2$: $\alpha_n > \gamma + \varepsilon/2$.

Но это означает, что $\gamma - \varepsilon/2 \in B$, тогда как число $\gamma - \varepsilon/2$, будучи меньше γ, должно принадлежать классу A. На основании этого противоречия заключаем, что полуинтервалу $(\gamma - \varepsilon/2, \gamma + \varepsilon/2]$ принадлежат бесконечно многие члены последовательности $\{\alpha_n\}$. Среди них найдутся такие, номера которых превосходят N. Пусть $\alpha_{n_0} \in (\gamma - \varepsilon/2, \gamma + \varepsilon/2]$, т. е. $\gamma - \varepsilon/2 < \alpha_{n_0} \le \gamma + \varepsilon/2$, причем $n_0 > N$. Тогда для всех $n > n_0$ будем иметь:

$$|\alpha_n - \gamma| = |(\alpha_n - \alpha_{n_0}) + (\alpha_{n_0} - \gamma)| \le |\alpha_n - \alpha_{n_0}| + |\alpha_{n_0} - \gamma| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Отсюда и следует, что последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \gamma$.

Доказательство закончено.

Для доказательства общих теорем анализа все четыре принципа одинаково пригодны. Для решения задач на пределы последовательностей принципы Коши, Вейерштрасса и Кантора приспособлены лучше, чем принцип Дедекинда, прежде всего потому, что в последнем непосредственно не говорится ни о какой последовательности [9–11].

Что же касается сравнения между собой принципов Коши, Вейерштрасса и Кантора, то из них более простыми в применении являются принцип Вейерштрасса и, в сущности, мало от него отличающийся принцип Кантора [10]. Нужно, чтобы последовательность $\{\alpha_n\}$ была монотонной, т. е. чтобы члены ее изменялись в одну сторону. В принципе Кантора речь идет о двух монотонных последовательностях $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$: одну из них составляют левые концы сегментов, другую — правые. Можно, однако, рассматривать α_n и β_n как члены одной немонотонной последовательности: $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \ldots$. Здесь члены, стоящие на нечетных местах, следуют, не убывая $(\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3 \le \ldots)$, а члены, стоящие на четных местах, — не возрастая $(\beta_1 \ge \beta_2 \ge \beta_3 \ge \ldots)$. Для применимости принципа достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\alpha_n \le \beta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и чтобы $\{\beta_n - \alpha_n\} \to 0$ при $n \to \infty$. При этих условиях последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ будут иметь общин предел γ, и тот же предел будет иметь последовательность $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots \alpha_n, \beta_n, \ldots$.

Применение принципа Коши к решению задач нередко оказывается более сложным, чем применение принципов Вейерштрасса и Кантора. Но принцип этот имеет преимущество общности формулировки — здесь не требуется каких-либо специальных условий, налагаемых на члены последовательности, подобных условию монотонности (принцип Вейерштрасса) или условию вложенности сегментов, с концами соответственно в нечетных и четных членах последовательности (принцип Кантора).

Покажем все эти замечания на примерах.

I. Установить, что последовательность $\alpha_1 = \sqrt{2}$, $\alpha_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\alpha_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\alpha_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, ... сходится, и найти ее предел (все корни берутся в арифметическом смысле).

Решение. С одной стороны, заметим, что последовательность монотонна, а именно что $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В самом деле, переход от α_n к α_{n+1} связан с увеличением подкоренного выражения: $\sqrt{2}$, стоящий в выражении для α_n на последнем месте, заменяется выражением $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. С другой стороны, последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена. В самом деле, $\alpha_1 = \sqrt{2} < 2$; предположив, что условие $\alpha_n < 2$ уже доказано, заметим, что $\alpha_{n+1} = \sqrt{2+\alpha_n}$, тогда будем иметь: $\alpha_{n+1} < \sqrt{2+2} = 2$. Итак, $\{\alpha_n\}$ — монотонная и ограниченная последовательность, а значит, согласно принципу Вейерштрасса, эта последовательность сходится [9].

Пусть $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, тогда $0 < \alpha_n \le \alpha \le 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Переписывая соотношение $\alpha_{n+1} = \sqrt{2+\alpha_n}$ в виде $\alpha^2{}_{n+1} = 2 + \alpha_n$ и применяя к последовательностям $\{\alpha^2{}_{n+1}\}$ и $\{2+\alpha_n\}$ теоремы о пределе произведения (степени) и суммы (такое применение стало возможным, поскольку доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ существует), находим $\alpha^2 = 2 + \alpha$. Отсюда получаем: $\alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \begin{cases} 2; \\ -1 \end{cases}$ и, наконец (отбрасывая отрицательное значение), $\alpha = 2$. Очевидно, что среди всех известных принципов теории пределов принцип Вейерштрасса является наиболее удобным для решения этой задачи.

II. Пусть a и b — два положительных числа, причем $a < b$. Образуем их среднее геометрическое $\alpha_1 = \sqrt{ab}$ и среднее арифметическое $\beta_1 = (a+b)/2$. Известно, что

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < b \left(\beta_1 - \alpha_1 = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} > 0 \right).$$

Образуем теперь среднее геометрическое и среднее арифметическое чисел α_1 и β_1: получим $\alpha_2 = \sqrt{\alpha_1 \beta_1}$, $\beta_2 = (\alpha_1 + \beta_1)/2$, причем будем иметь неравенства $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \beta_1$.

Продолжая этот процесс, будем по найденным на каком-либо этапе числам α_n и β_n вводить числа $\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n \cdot \beta_n}$ и $\beta_{n+1} = \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{2}$. Тогда при любом n будут выполняться неравенства $\alpha_n < \alpha_{n+1} < \beta_{n+1} < \beta_n$. Иными словами, сегмент $\left[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}\right]$ будет вложен в сегмент $\left[\alpha_n, \beta_n\right]$. Чтобы применить к последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ принцип Кантора, остается убедиться в том, что длина сегмента $\left[\alpha_n, \beta_n\right]$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Но

$$\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} - \sqrt{\alpha_n \beta_n} = \frac{\alpha_n - 2\sqrt{\alpha_n \cdot \beta_n} + \beta_n}{2} = \frac{(\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{\beta_n})^2}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{\beta_n} - \sqrt{\alpha_n})^2 (\sqrt{\beta_n} + \sqrt{\alpha_n})^2}{2(\sqrt{\beta_n} + \sqrt{\alpha_n})^2} = \frac{(\beta_n - \alpha_n)^2}{2(\beta_n + \alpha_n + 2\sqrt{\alpha_n \beta_n})} = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} \cdot \frac{\beta_n - \alpha_n}{\beta_n + \alpha_n + 2\sqrt{\alpha_n \beta_n}},$$

и поскольку вторая дробь меньше единицы, то $\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} < (\beta_n - \alpha_n)/2$.

Это означает, что длина сегмента $\left[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}\right]$ меньше половины длины сегмента $\left[\alpha_n, \beta_n\right]$ и, следовательно, стремится к нулю при $n \to \infty$ (выписывая неравенства $\beta_2 - \alpha_2 < (\beta_1 - \alpha_1)/2$, $\beta_3 - \alpha_3 < (\beta_2 - \alpha_2)/2, \ldots, \beta_{n+1} - \alpha_{n+1} < (\beta_n - \alpha_n)/2$ и перемножая их почленно, после сокращений находим $\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} \le (\beta_1 - \alpha_1)/2^n$, откуда и следует наше утверждение).

Итак, последовательность сегментов $\left\{\left[\alpha_n, \beta_n\right]\right\}$ является стягивающейся системой сегментов и, следовательно, согласно принципу Кантора, последовательности $\left\{\alpha_n\right\}$ и $\left\{\beta_n\right\}$, получаемые путем последовательного образования средних геометрических и средних арифметических, имеют общий предел γ. Этот предел удовлетворяет неравенствам $a < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \ldots < \gamma < \ldots < \beta_n < \beta_{n-1} < \ldots < \beta_1 < b$ и называется арифметико-геометрическим средним чисел a и b [6, 9].

Видно, что принцип Кантора дает наиболее естественное средство для установления существования арифметико-геометрического среднего.

I. Пусть x — произвольное действительное число. Требуется доказать, что последовательность

$$\alpha_1 = \frac{\sin x}{1\cdot 2},\quad \alpha_2 = \frac{\sin x}{1\cdot 2} + \frac{\sin 2x}{2\cdot 3},\quad \alpha_3 = \frac{\sin x}{1\cdot 2} + \frac{\sin 2x}{2\cdot 3} + \frac{\sin 3x}{3\cdot 4},\ldots,$$
$$\alpha_n = \frac{\sin x}{1\cdot 2} + \frac{\sin 2x}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n\cdot(\mathrm{n}+1)},\ldots$$

сходится.

Здесь не существует простых неравенств между значениями членов, которые позволили бы применить принцип Вейерштрасса (как в случае монотонности последовательности) или принцип Кантора (как в том случае, когда данная последовательность составлена из двух чередующихся монотонных последовательностей) [9–11]. Поэтому обратимся к принципу Коши. Для этого рассмотрим абсолютную величину разности $\alpha_{n+p} - \alpha_n$ и начнем с предварительных упрощений, позволяющих убедиться, что при достаточно больших n и любых p эта величина будет меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Имеем:

$$\left|\alpha_{n+p} - \alpha_n\right| = \left\|\left[\frac{\sin x}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n(n+1)} + \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}\right] - \left[\frac{\sin x}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n(n+1)}\right]\right\| =$$
$$= \left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}\right| \le \frac{\left|\sin(n+1)x\right|}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\left|\sin(n+p)x\right|}{(n+p)(n+p+1)} \le$$
$$\le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Если принять, что $n > -1 + 1/\varepsilon$, то $n+1 > 1/\varepsilon$, $1/(n+1) < \varepsilon$ и, следовательно, $\left|\alpha_{n+p} - \alpha_n\right| < \varepsilon$.

Итак, последовательность $\{\alpha_n\}$ — фундаментальная последовательность и, следовательно, согласно принципу Коши, она сходится. Приведенные примеры показывают, насколько важно уметь пользоваться различными принципами теории пределов, применяя в каждой задаче тот из них, который лучше приспособлен к ее условиям.

Заключение. Изученные основные принципы теории пределов характеризуют, каждый в отдельности, одно и то же свойство множества действительных чисел, а именно свойство *непрерывности*. Присоединяя к рациональным числам иррациональные числа, определяемые им посредством сечений, производимых на множестве рациональных чисел, доказано, что расширенное таким образом множество чисел, т. е. множество действительных чисел, уже обладает свойством, аналогичным свойству непрерывности прямой.

Отмечено, что принцип Дедекинда равносилен трем другим принципам: Кантора, Коши и Вейерштрасса. Следовательно, можно утверждать, что каждый из основных принципов теории пределов выражает свойство непрерывности множества всех действительных чисел. При построении геометрии прямая и точка относятся к основным понятиям, которые не сводятся одно к другому, хотя и могут находиться в определенных отношениях (например, точка может лежать на некоторой прямой, прямая может проходить или не проходить через некоторую точку). В самом деле, для того чтобы выделить множество точек прямой среди всех других возможных множеств точек, нужно уже владеть понятием прямой. Свойства множества всех точек, принадлежащих одной и той же прямой, устанавливаются в специальных аксиомах геометрии. К числу их принадлежат аксиомы непрерывности, составляющие пятую группу аксиом в системе, предложенной Л. Гильбертом. В более полной формулировке, где подчеркивается непустота каждого из двух классов и где недостаточно определенное понятие «влево» заменено более точными понятиями, исходя из идеи, выраженной аксиомой Дедекинда, можно построить теорию действительного числа независимо от теории Кантора. Теории Дедекинда и Кантора абсолютно равносильны, поскольку обе они приводят к непрерывным коммутативным архимедовски расположенным полям, которые изоморфны друг другу.

Литература

[1] Сидняев Н.И., Крылов Д.А. *Непрерывность. Бесконечно малые и бесконечно большие функции*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 38 с.

[2] Сидняев Н.И., Невский Ю.А., Садыхов Г.С. *Бесконечно малые и бесконечно большие: теория и практика*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, 22 с.

[3] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*. Санкт-Петербург, Лань, 2008, 560 с.

[4] Сидняев Н.И., Гордеева Н.М., Попушина Е.С., Рыбдалова О.Д. *Руководство к решению задач по векторному анализу*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, 62 с.

[5] Сидняев Н.И., Соболев С.К. Механизмы совершенствования математического образования в техническом вузе. *Alma Mater (Вестник высшей школы)*, 2015, № 6, с. 5–14.

[6] Сидняев Н.И., Томашпольский В.Я. *О математике, математиках и кафедре «Высшая математика»*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 258 с.

[7] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1. Москва, Физмалит, 2003, 680 с.

[8] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*. Ч. 1. Москва, Айрис-пресс, 2007, 282 с.

[9] Смирнов В.И. *Курс высшей математики*. Т. 1. Санкт-Петербург, БХВ-Петербург, 2008, 624 с.

[10] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. *Сборник задач по математическому анализу*. Т. 1. *Предел. Непрерывность. Дифференцируемость*. Москва, Физматлит, 2003, 362 с.

[11] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа*. Ч. 1. Москва, Физматлит, 2005, 648 с.

Аскерова Айсель Агасафовна — студентка кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Сидняев Николай Иванович, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

CLASSICAL IDEAS ABOUT PRINCIPLES OF THE THEORY OF LIMITS

A.A. Askerova

iselaskerova@yandex.ru
SPIN-code: 5741-2000

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article presents limit theorems that have a conditional character. We provide not only full justification of the theory of limits principles based on the previously developed real numbers theory, but also the evidence that these principles are equivalent. It is shown that all the four principles are equally applicable for proving the general analysis theorems. In order to solve the problems on limits of sequences the Cauchy, Weierstrass and Cantor principles are adjusted better than the Dedekind principle. The Cantor and Dedekind theorems are proved for the number scale, where by the points are meant the numbers, and by the segments – some sum-total numbers. The statements of the theorems are understood literally, as referring to the ordinary segments and points on the geometrical rather than on the number scale. These statements are the consequences of the definitions and axioms accepted in geometry.

Keywords

Formula, limit, principle, theory, space, infinitude, attribute, sequence

References

[1] Sidnyaev N.I., Krylov D.A. Nepreryvnost'. Beskonechno malye i beskonechno bol'shie funktsii [Continuity. Infinitely-small and infinitely-large functions]. Moscow, Bauman Press, 2014, 38 p.

[2] Sidnyaev N.I., Nevskiy Yu.A., Sadykhov G.S. Beskonechno malye i beskonechno bol'shie: teoriya i praktika [Infinitely-small and infinitely-large: theory and practice]. Moscow, Bauman Press, 2015, 22 p.

[3] Natanson I.P. Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy [Theory of functions of real variable]. Sankt-Peterburg, Lan', 2008, 560 p.

[4] Sidnyaev N.I., Gordeeva N.M., Popushina E.S., Rybdalova O.D. Rukovodstvo k resheniyu zadach po vektornomu analizu [Guidance to solving problems of vector analysis]. Moscow, Bauman Press, 2015, 62 p.

[5] Sidnyaev N.I., Sobolev S.K. Mechanisms for improvement of mathematical education in technical university. *Alma Mater (Vestnik vysshey shkoly)* [Alma Mater (High School Herald)], 2015, no. 6, pp. 5–14.

[6] Sidnyaev N.I., Tomashpol'skiy V.Ya. O matematike, matematikakh i kafedre "Vysshaya matematika" [On mathematics, mathematicians and "Advanced mathematics" chair]. Moscow, Bauman Press, 2014, 258 p.

[7] Fikhtengol'ts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 1 [Differential and integral calculation course. Vol. 1]. Moscow, Fizmalit publ., 2003, 680 p.

[8] Pis'mennyy D.T. Konspekt lektsiy po vysshey matematike. Ch. 1 [Lecture notes on advanced mathematics]. Moscow, Ayris-press publ., 2007, 282 p.
[9] Smirnov V.I. Kurs vysshey matematiki. T. 1 [Advanced mathematics course. Vol. 1]. Sankt-Peterburg, BKhV-Peterburg publ., 2008, 624 p.
[10] Kudryavtsev L.D., Kutasov A.D., Chekhlov V.I., Shabunin M.I. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu. T. 1. Predel. Nepreryvnost'. Differentsiruemost' [Problem book on mathematical analysis. Vol. 1. Limit. Continuity. Differentiability]. Moscow, Fizmatlit publ., 2003, 362 p.
[11] Il'in V.A., Poznyak E.G. Osnovy matematicheskogo analiza. Ch. 1 [Mathematical analysis fundamentals. P. 1]. Moscow, Fizmatlit publ., 2005, 648 p.

Askerova A.A. — student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — N.I. Sidnyaev, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.