УДК 534.143 DOI: 10.18698/2541-8009-2018-03-283

О ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЕ ЖИДКОСТИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ, ПЛАВАЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ АКВАТОРИИ

В.Э. Меринова torisee@mail.ru
SPIN-код: 4335-7940

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Получено приближенное решение задачи об определении присоединенной массы жидкости и решение плоской краевой задачи о малых поперечных колебаниях упругого стержня, заданной длины, плавающего на поверхности водной акватории. При этом жидкость считается идеальной и несжимаемой, ее движение — потенциальным, а колебания — малыми. С учетом этих допущений и на основе метода собственных функций для оператора Лапласа получено аналитическое решение для частоты первого тока колебаний системы. Данное решение сложной краевой задачи может быть использовано для целого ряда технических задач, связанных с этой темой.

Ключевые слова

Упругость, балка, жидкость, колебания, частоты, потенциал, уравнение Лапласа, метод Фурье, метод Граммеля

Поступила в редакцию 20.02.2018

Достаточно часто при решении задач, связанных с колебаниями кораблей или подводных лодок, возникают затруднения при решении задачи об определении присоединенной массы жидкости.

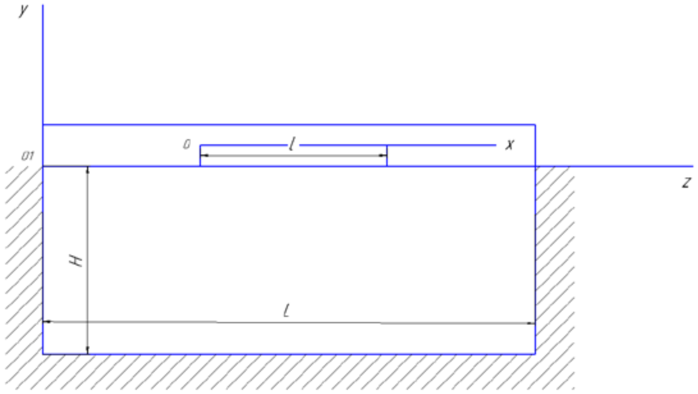
Для нахождения приближенного решения этой задачи рассмотрим малые поперечные колебания упругого стержня (однородной балки) длиной l, плавающего на поверхности водной акватории. Модель акватории представляет собой наполненный жидкостью жесткий прямоугольник длиной L ($L > \mathrm{l}$) и глубиной H (рис. 1). Получим выражение для частоты ω_1 первого тона колебаний системы.

Рассматриваемая механическая система может являться прототипом корабля или подводной лодки в надводном положении, поскольку материал корпуса корабля идеально упругий и подчиняется закону Гука.

Пусть на левой границе балки $z = z_1$, $x = 0$, на правой — z_2 (см. рисунок). Прогиб балки $w(x,t)$, изгиб прямой, материал подчиняется закону Гука, жесткость балки на изгиб EJ_0, где E —- модуль упругости первого рода, J_0 — момент инерции [1]. Глубина акватории H.

В качестве основных допущений примем, что колебания малые, жидкость идеальная и несжимаемая, а ее движение потенциальное с потенциалом $\Phi(x, y, t)$. Потенциал скорости Φ [2, 3] удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\Phi = 0$ в объеме, занятом жидкостью:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}. \tag{1}$$



Модель акватории, представляющая собой
заполненный жидкостью жесткий прямоугольник

Согласно методу Фурье выразим решение уравнения (1) как произведение функций:

$$\Phi = X(x)Y(y)\dot{s}(t),$$

где $X(x)$ зависит только от x, $Y(y)$ — только от y, $\dot{s}(t)$ — только от t.

Функцию $\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i$ будем искать в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} (A_{1i}\cos\lambda_i x + A_{2i}\sin\lambda_i x)(C_{1i}\operatorname{ch}\lambda_i y + C_{2i}\operatorname{sh}\lambda_i y)\dot{s}, \tag{2}$$

где λ_i — собственные значения; A_i, C_i — произвольные константы, определяемые при решении вариационной задачи.

Граничные условия для поля с потенциалом $\Phi(x, y, t)$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = L;$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=-H} = 0.$$

Линеаризованное граничное условие на свободной поверхности жидкости:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \ 0 \le x \le x_2 \text{ и } x_2 \le x \le L;$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=0} = \dot{w} \text{ при } x_1 \le x \le x_2.$$

При подстановке граничных условий в уравнение (2) получим:

$$\Phi=\sum_{i=1}^{\infty}A_{1i}\cos\lambda_i x(\operatorname{ch}\lambda_i y+\operatorname{th}\lambda_i H\operatorname{sh}\lambda_i y)\dot{s},$$

где $\lambda_i=\dfrac{i\pi}{L},\ i=1,2,...$

Решение данной краевой задачи формируется как решение некоторой вариационной задачи с предварительными граничными условиями. В этом случае в качестве предварительных условий удовлетворяются силовые условия, а геометрические условия становятся естественными [4]. Таким образом, можно провести аналоги с методом Граммеля [5, 6].

Дифференциальное уравнение изгиба балки под воздействием гидродинамического давления жидкости (интеграл Лагранжа — Коши) $p=\rho\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ имеет вид следующий [7]:

$$\dot{w}^{\mathrm{IV}}-\beta^4\dot{w}=\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2};$$

$$\dot{w}^{\mathrm{IV}}-\beta^4\dot{w}=-\omega^2\rho\sum_{i=1}^{\infty}A_{1i}\cos\lambda_i x. \qquad (3)$$

Здесь $\dot{w}^{\mathrm{IV}}=\dfrac{\partial^4\dot{w}}{\partial x^4}$; $\beta^4=\dfrac{\mu_0\omega^2}{EJ_0}$ (μ_0 — погонная масса балки; ω — частота собственных колебаний системы; EJ_0 — жесткость балки на изгиб).

Граничные условия перепишем следующим образом:

$$\begin{cases}\dot{w}^{\mathrm{II}}(z=0)=\dot{w}^{\mathrm{II}}(z=l)=0;\\ \dot{w}^{\mathrm{III}}(z=0)=\dot{w}^{\mathrm{III}}(z=l)=0,\end{cases} \qquad (4)$$

где $\dot{w}^{\mathrm{II}}=\dfrac{\partial^2\dot{w}}{\partial x^2}$; $\dot{w}^{\mathrm{III}}=\dfrac{\partial^3\dot{w}}{\partial x^3}$.

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$\dot{w}=c_1\operatorname{ch}\beta z+c_2\operatorname{sh}\beta z+c_3\cos\beta z+c_4\sin\beta z+\dot{w}^*,$$

где

$$\dot{w}^*=-\omega^2\rho\sum_{i=1}^{\infty}A_{1i}\frac{\cos\lambda_i x}{\lambda_i^4-\beta^4}.$$

Решение уравнения (3) с учетом первого уравнения (4):

$$\dot{w}=c_1f_1(z)+c_2f_2(z)-\cos\beta z\sum_{i=1}^{\infty}A_{1i}\gamma_{1i}+\sin\beta z\sum_{i=1}^{\infty}A_{1i}\gamma_{2i}-\omega^2\rho\sum_{i=1}^{\infty}A_{1i}\frac{\cos\lambda_i x}{\lambda_i^4-\beta^4},$$

где $f_1(z)=\operatorname{ch}\beta z+\cos\beta z$, $f_2(z)=\operatorname{sh}\beta z+\sin\beta z$.

С учетом второго уравнения системы (4) сформулируем систему неоднородных алгебраических уравнений относительно констант c_1 и c_2:

$$\begin{cases} c_1 d_{11} + c_2 d_{12} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{1i} \gamma_{1i}^*; \\ c_1 d_{21} + c_2 d_{22} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{1i} \gamma_{2i}^*. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь константы c_1 и c_2 определяются по методу Крамера. Константы $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}$ имеют вид

$$\begin{aligned} d_{11} &= \beta^2 (\operatorname{ch} \beta l - \cos \beta l); \\ d_{12} &= \beta^2 (\operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l); \\ d_{21} &= \beta^3 (\operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l); \\ d_{22} &= \beta^3 (\operatorname{ch} \beta l - \cos \beta l), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\gamma_{1i}^*, \gamma_{2i}^*$ — константы, вид которых не приводится.

Окончательно с учетом выражений (5), (6) получим прогиб:

$$\dot{w} = q_{1i} \alpha_{1i} f_1(z) + q_{2i} \alpha_{2i} f_2(z) + \sin \beta z \gamma_{2i}^0 + \cos \beta z \gamma_{1i}^0 + \rho \frac{\cos \lambda_i x}{\lambda_i^4 - \beta^4}.$$

Для построения частотного уравнения применим подход, изложенный в [4, 6, 8, 9]. Умножив равенство $\nabla^2 \Phi = 0$ на Φ_i и применив формулу Грина, запишем:

$$\int_{\tau} \nabla^2 \Phi \Phi_i d\tau = 0;$$

$$\iint_{s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} \bigg|_S \Phi_j - \frac{\partial \Phi_j}{\partial \bar{n}} \bigg|_S \Phi \right) dS = 0.$$

Решение получим в виде

$$\ddot{q}_1 a_{11} + q_1 c_{11} = 0, \tag{7}$$

где a_{11} — приведенная масса системы; c_{11} — приведенная жесткость системы; при этом $\omega_1^2 = c_{11} / a_{11}$ — квадрат частоты первого тона колебаний системы.

С учетом (7) и граничных условий (4) запишем:

$$\ddot{q}_1 \left[\alpha_{11} f_1(z) + \alpha_{21} f_2(z) + \sin \beta z \gamma_{21}^0 + \cos \beta z \gamma_{11}^0 + \rho \frac{\cos \lambda_1 z}{(\lambda_i^4 - \beta^4)} - \frac{L-l}{2g} - \frac{\sin 2\lambda_1 L - \sin 2\lambda_1 l}{4 g \lambda_1} \right] =$$

$$= - \left[- \frac{\cos^2 \lambda_1 l}{2} + \frac{1}{2} - \frac{L-1}{2} - \frac{\sin 2\lambda_1 L - \sin 2\lambda_1 l}{4} \right] q_1,$$

откуда имеем

$$\omega = \sqrt{\left[-\frac{\cos^2 \lambda_1 l}{2} + \frac{1}{2} - \frac{L-1}{2} - \frac{\sin 2\lambda_1 L - \sin 2\lambda_1 l}{4} \right]}.$$

Для определения приведенной массы системы воспользуемся выражением для кинетической энергии:

$$T = \frac{\mu_0}{2} \int_0^l \dot{y}^2 dx = \frac{\mu_0 \omega_0^2}{2} T_{\max},$$

где μ_0 — погонная масса балки; ω_0 — частота колебаний свободной однородной балки [7]; $T_{\max}$ — амплитудное значение кинетической энергии. Для рассматриваемой системы

$$T = \frac{\mu^* \omega_1^2}{2} T_{\max},$$

где ω_1 — частота колебаний системы с учетом жидкости.

При сравнении двух равенств будем иметь:

$$\mu^* = \frac{\mu_0 \omega_0^2}{\omega_1^2}, \text{ где } \omega_0 > \omega_1.$$

В статье определена присоединенная масса жидкости при колебании упругого стрежня, плавающего на свободной поверхности акватории. Данную механическую систему при определенных условиях можно рассматривать как модель тела, плавающего на поверхности жидкости. Полученное приближенное решение этой сложной краевой задачи необходимо при решении задач о колебаниях таких тел, как корабли (газо- и нефтевозы) и подводные лодки, а также для решения целого ряда иных технических задач, связанных с этой темой.

Литература

[1] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016, 543 с.

[2] Колесников К.С., Дубинин В.В, ред. *Курс теоретической механики*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 580 с.

[3] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика.* Ч. 2. Москва, Альянс, 2016, 727 с.

[4] Пожалостин А.А. Осесимметричные колебания упругих баков с жидкостью. *Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок*. Москва, Наука, 1970, с. 483–487.

[5] Балабух Л.И. Некоторые точные решения задачи о колебания жидкости в упругих оболочках. *Тр. V Всес. конф. по теории пластин и оболочек.* Москва, Наука, 1965, с. 68–72.

[6] Пожалостин А.А. *Построение системы гармонических функций для расчета осесимметричных колебаний жидкости в упругом цилиндрическом баке с жидкостью*. Москва, ВИМИ, 1987, с. 71–74.
[7] Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. Москва, Машиностроение, 1985, 472 с.
[8] Лейбензон Л.С. *О натуральных периодах колебаний плотины, подпирающей реку*. Сб. трудов АН СССР. Т.1. Москва, Изд-во АН СССР, 1951, с. 157–161.
[9] Балабух Л.И., Молчанов А.Г. Осесимметричные колебания сферической оболочки частично заполненной жидкостью. *Известия АН СССР. Механика твердого тела,* 1967, № 5, с. 22–26.
[10] Никитин Н.Н. *Курс теоретической механики*. Санкт-Петербург, Лань, 2016, 719 с.

Меринова Виктория Эдуардовна — студентка кафедры «Ядерные реакторы и установки», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Пожалостин Алексей Алексеевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

ON THE LIQUID ADDED MASS UNDER THE OSCILLATIONS OF THE ELASTIC ROD FLOATING ON THE AQUATORIUM SURFACE

V.E. Merinova

torisee@mail.ru
SPIN-code: 4335-7940

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article introduces the approximate solution to the problem of estimating the liquid added mass as well as the solution to the plane boundary value problem of small transverse oscillations of the specified length elastic rod floating on the aquatorium surface. In this connection we consider the liquid to be ideal and incondensable, its flowing — potential, and the oscillations — small. Subject to these assumptions and based on the method of eigen functions for the Laplasian operator we have obtained an analytical solution for the frequency of the first current of the system oscillations.

Keywords

Elasticity, beam, liquid, oscillations, frequencies, potential, Laplacian equation, Fourier method, Grammel's method

References

[1] Feodos'yev V.I. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. Moscow, Bauman Press, 2016, 543 p.

[2] Kolesnikov K.S., Dubinin V.V, ed. Kurs teoreticheskoy mekhaniki [Theoretical mechanics course]. Moscow, Bauman Press, 2017, 580 p.

[3] Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. Teoreticheskaya gidromekhanika. Ch. 2 [Theoretical hydromechanics. P. 2]. Moscow, Al'yans publ., 2016, 727 p.

[4] Pozhalostin A.A. Osesimmetrichnye kolebaniya uprugikh bakov s zhidkost'yu [Axial-symmetrical oscillations of flexible tank with liquid]. *Tr. VII Vses. konf. po teorii obolochek i plastinok* [Proc. VII Russ. Conf. on Shells and Plates Theory]. Moscow, Nauka publ., 1970, pp. 483–487.

[5] Balabukh L.I. Nekotorye tochnye resheniya zadachi o kolebaniya zhidkosti v uprugikh obolochkakh [Some accurate solutions of problem of liquid oscillations in flexible shells]. *Tr. V Vses. konf. po teorii plastin i obolochek* [Proc. V Russ. Conf. on Shells and Plates Theory]. Moscow, Nauka publ., 1965, pp. 68–72.

[6] Pozhalostin A.A. Postroenie sistemy garmonicheskikh funktsiy dlya rascheta osesimmetrichnykh kolebaniy zhidkosti v uprugom tsilindricheskom bake s zhidkost'yu [Solution of harmonic functions system for calculating liquid oscillations in flexible cylindrical tank]. Moscow, VIMI publ., 1987, pp. 71–74.

[7] Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W. Vibration problems in engineering. Wiley, 1974, 521 p. (Russ. ed.: Kolebaniya v inzhenernom dele. Moscow, Mashinostroenie publ., 1985, 472 p.)

[8] Leybenzon L.S. O natural'nykh periodakh kolebaniy plotiny, podpirayushchey reku [On natural periods of the river dam oscillations]. *Sb. trudov AN SSSR. T.1* [Proc. USSR Academy of Science. Vol. 1]. Moscow, AN SSSR publ., 1951, pp. 157–161.

[9] Balabukh L.I., Molchanov A.G. Axial-symmetrical oscillations of the spherical shell partially filled with liquid. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1967, no. 5, pp. 22–26.
[10] Nikitin N.N. Kurs teoreticheskoy mekhaniki [Theoretical mechanics course]. Sankt-Petersburg, Lan' publ., 2016, 719 p.

Merinova V.E. — student, Department of Nuclear Reactors and Power Plants, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Pozhalostin A.A., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.