

РАСЧЕТ КРУТИЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ СТЕРЖНЯ НА ОСНОВЕ ПЛЕНОЧНОЙ АНАЛОГИИ

А.А. Кирюхин

arkiryukhin1999@gmail.com

SPIN-код: 1800-0060

Б.Н. Сульдин

suldin.bogdan@gmail.com

SPIN-код: 9859-5703

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Предложен алгоритм определения крутильной жесткости для стержней произвольных поперечных сечений на основе минимизации полного механического потенциала пленочного аналога деформируемого сечения, выполнен расчет напряженно-деформированного состояния стержня с учетом депланации прямоугольного и крестовидного поперечного сечения при кручении. Расчет показал, что для наиболее распространенного квадратного сечения точность определения крутильной жесткости методом пленочной аналогии превышает 95 % значения параметра, определенного аналитическими методами теории упругости. Для стержня крестовидного поперечного сечения, не описанного в справочниках по теории упругости, выявлена связь крутильной жесткости с параметрами формы прогиба пленки вдоль оси, перпендикулярной плоскости сечения. Разработаны рекомендации по установлению числа точек дискретного пленочного аналога и состава переменных, которыми задаются перемещения этих точек.

Ключевые слова

Кручение стержня, напряженно-деформированное состояние, метод мембранной (пленочной) аналогии, прямоугольное и крестообразное сечения, принцип Лагранжа, жесткость стержня

Поступила в редакцию 14.05.2018

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

На сегодняшний день анализ крутильной жесткости стержневых конструкций, различных по типу сечения, становится все более востребованным. Это объясняется тем, что постройки новых поколений представляют собой узкие многоэтажные здания со сложной системой прочно скрепленных стержней, на которых лежит колоссальная равномерно-распределенная нагрузка. Именно это равномерное распределение является результатом вычислений крутильной жесткости каждого элемента подобной системы, которые дают представление о том, какую нагрузку можно давать тому или иному стержню. Современные тенденции развития методов расчета напряженно-деформированного состояния элементов конструкций — ориентированность на использование высокопроизводительных ЭВМ для реализации расчетных алгоритмов с вычислительными операциями над большими массивами данных и универсальность, позволяющая получить решения для широкого круга задач [1, 2], — стимулируют внедрение

эффективных численных методов оценки прочности стержневых конструкций, для которых аналитическое решение этой задачи затруднено ввиду многообразия используемых материалов и форм поперечных сечений стержней.

Решение задачи о кручении стержней традиционными аналитическими методами представляет собой довольно сложную задачу, поскольку при кручении стержня с некруглым поперечным сечением необходимо учитывать не только взаимный поворот сечений, но и местный перекося (депланацию), вызванный искривлениями поперечного сечения стержня. В общем виде решение этой задачи было получено Ж.К. Сен-Венаном для наиболее распространенных поперечных сечений, таких как прямоугольник, равносторонний треугольник и эллипс [3]. Несмотря на это нахождение параметров кручения стержней более сложных сечений является очень трудоемкой задачей, основанной на решении уравнения

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -G\theta,$$

которому во всех внутренних точках поперечного сечения должна удовлетворять функция $F(x, y) = G\theta \left[\psi(x, y) - \frac{x^2 + y^2}{2} \right]$ — функция

напряжений Прандтля, где G — модуль сдвига; θ — угол взаимного поворота двух сечений, отнесенный к расстоянию между ними; $\psi(x, y)$ — функция, которая

внутри контура поперечного сечения удовлетворяет условию $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$, а на

контуре поперечного сечения — условию $\psi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \text{const}$.

Для сложных поперечных сечений задание функции $F(x, y)$ часто не представляется возможным, поэтому возникла потребность в применении более простых и наглядных методов решения задач о кручении.

Реализуемый в настоящем исследовании метод пленочной (мембранной) аналогии основан на том, что, независимо от формы исследуемого сечения, задача о кручении стержня сводится к тому же дифференциальному уравнению, что и задача о равновесии пленки (мембраны), натянутой на жесткий контур того же очертания, что и поперечное сечение стержня, и нагруженной равномерно распределенным давлением [4–6]. Пример прогиба пленки (мембраны) для некоторого произвольного сечения представлен на рис. 1.

Дифференциальное уравнение, которому должны удовлетворять перемещения $\omega(x, y)$ мембраны, имеет следующий вид [7]:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = -\frac{p}{q}, \quad (1)$$

где $\omega(x, y)$ — прогибы точек мембраны (перемещения вдоль оси, перпендикулярной плоскости сечения); p — давление на единицу площади; q — равномерное растягивающее усилие, приходящееся на единицу длины в каждом сечении мембраны (распределенная сила).

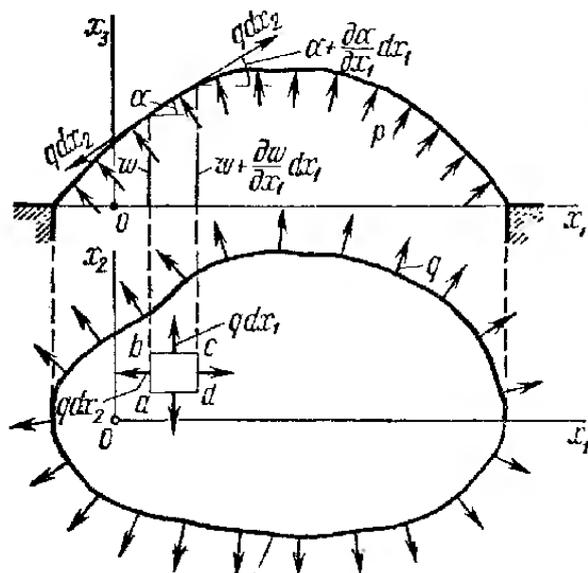


Рис. 1. Мембранная аналогия кручения стержня

Уравнение (1) становится тождественным уравнению функции кручения, если принять $F(x, y) = \left(\frac{2G\theta q}{\rho} \right) \cdot \omega(x, y)$. Для точек контура сечения $\omega = 0$.

Аналогом функции кручения являются перемещения, аналогом крутящего момента — объем, заключенный между плоскостью контура и поверхностью пленки, аналогом напряжения — угол, который составляет касательная к точке поверхности пленки с плоскостью контура (это означает, что по форме поверхности прогнувшейся мембраны можно судить о распределении касательных напряжений в сечении). Таким образом, нахождение параметров кручения стержня сводится к задаче о равновесии пленки, натянутой на контур того же очертания, что и рассматриваемое поперечное сечение, и подверженной равномерному давлению, а сама задача, в свою очередь, сводится к нахождению формы прогиба пленки [5, 6].

Очевидно, что точно задать искомую поверхность какой-либо одной функцией не представляется возможным, поэтому сечение разбивают на участки с помощью конечного числа точек. Пленка, находясь под давлением, прогибается, и эти точки перемещаются вдоль оси, перпендикулярной плоскости сечения. Эти перемещения приближенно задают форму прогиба. Чем больше точек используется для разбиения и переменных, которыми задаются перемещения этих точек, тем адекватнее будет форма поверхности прогиба и тем точнее могут быть найдены параметры кручения стержня заданного сечения.

Для нахождения значений переменных, которыми задаются перемещения точек, воспользуемся методом прямой минимизации полного механического потенциала системы (принципом Лагранжа). Выразим полный потенциал механической системы Π через параметры задачи равновесия пленки [8]:

$$\Pi = q\Delta S - pV, \tag{2}$$

где ΔS — разность площади деформированной пленки и площади сечения; V — объем, заключенный между плоскостью контура и поверхностью пленки.

Полный потенциал системы Π зависит от известных давления, натяжения, размеров сечения и неизвестных переменных, обозначающих перемещения точек, с помощью которых сечение разбито на меньшие участки. Таким образом, можно определить значения переменных перемещений, при которых потенциал принимает минимальное значение, а следовательно, объем и площадь, которые через эти перемещения выражались. Переход от задачи равновесия пленки к задаче кручения позволяет связать параметры кручения (прежде всего, крутильную жесткость стержня $C = GI_k$, где I_k — геометрическая жесткость сечения на кручение) для стержней произвольных поперечных сечений с параметрами формы прогиба пленки. Модуль сдвига G — константа для материала стержня, поэтому задача сводится к нахождению I_k . Для прямоугольного поперечного сечения это регламентируемая справочной литературой величина [4], по ней можно выполнить проверку корректности описанного подхода.

Рассмотрим сечение в форме прямоугольника со сторонами a и b . Расположим некоторую точку в центре прямоугольника, перемещение этой точки при деформации мембраны и есть неизвестная переменная h_1 (рис. 2). Очевидно, что фигура, образованная плоскостью сечения и прогнувшейся поверхностью, является пирамидой со сторонами a , b и высотой h_1 . Добавим по три точки на каждой из полудиагоналей через равные расстояния (рис. 3). В этом случае сечение (см. рис. 2) разбивается на равнобедренные треугольники и равнобокие трапеции. Очевидно, что перемещения точек, симметричных относительно центра прямоугольника или оси симметрии, равны. Это значит, что из 17 перемещений всего четыре — h_1 , h_2 , h_3 и h_4 — различные ненулевые неизвестные перемещения (перемещения точек на контуре, очевидно, равны нулю). Такое расположение хорошо тем, что площадь поверхности прогиба легко определяется как сумма площадей треугольников и трапеций, а объем прогиба — как суммарный объем усеченных и обычной пирамид. Также очевидно, что ввиду симметричности данной фигуры можно рассчитывать площадь и объем лишь ее половины.

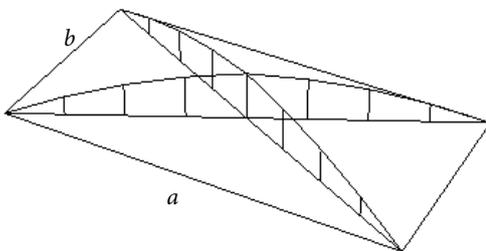


Рис. 2. Деформация мембраны

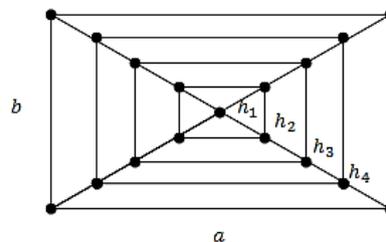


Рис. 3. Схема для расчета параметров прогиба пленки

После преобразования радикалов находим следующие значения площади и объема:

$$\begin{aligned} S &= ab + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \left((h_1 - h_2)^2 + 3(h_2 - h_3)^2 + 5(h_3 - h_4)^2 + 7h_4^2 \right); \\ V &= \frac{ab}{48} \left((h_1 - h_2) + 7(h_2 - h_3) + 19(h_3 - h_4) + 37h_4 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставим эти значения в выражение потенциала системы:

$$\begin{aligned} \Pi &= q \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \left((h_1 - h_2)^2 + 3(h_2 - h_3)^2 + 5(h_3 - h_4)^2 + 7h_4^2 \right) - \\ &- p \left(\frac{ab}{48} \right) \left((h_1 - h_2) + 7(h_2 - h_3) + 19(h_3 - h_4) + 37h_4 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Для нахождения минимума функции нескольких переменных в виде (3) необходимо найти частные производные по всем четырем переменным перемещениям, затем приравнять их к нулю и решить получившуюся систему линейных уравнений. Эта задача выполнена в программе Wolfram Mathematica 9.0 [9]. Подстановка найденных значений перемещений h_1 , h_2 , h_3 и h_4 в выражения (3) позволяет определить искомый объем прогиба:

$$V = \frac{1871a^3b^3p}{30240(a^2 + b^2)q}.$$

С целью нахождения геометрической жесткости сечения на кручение I_k перейдем к задаче о кручении стержня. Согласно [10] крутящий момент связан с объемом прогиба соотношением $M = 2\gamma V$, где $\gamma = \frac{F(x, y)}{\omega(x, y)} = \frac{2G\theta q}{p} \rightarrow M = \frac{4G\theta q}{p} V$.

Известно [7], что $M = GI_k \theta$. Из этих двух равенств следует, что $I_k = \frac{4q}{p} V$.

Подставив найденный объем прогиба пленки в уравнение геометрической жесткости сечения на кручение, определим значение I_k стержня:

$$I_k = \frac{1871a^3b^3}{7560(a^2 + b^2)}.$$

Для сравнения полученного результата со справочными данными [4] положим, что $a = 2b$, тогда искомое значение $I_k = 0,396b^4$. Для такого соотношения сторон табличное значение $I_k = 0,458b^4$. Таким образом, найденное значение составляет примерно 86,5 % табличного, что свидетельствует о необходимости увеличения числа точек и перемещений для получения более точного результата.

Расположим внутри прямоугольного сечения стержня пять рядов по пять точек, равноудаленных друг от друга и от сторон прямоугольника (рис. 4, а). Сечение и поверхность прогиба разобьем на треугольники. Вследствие симметричности формы прогиба будем рассматривать только четверть сечения,

представленную на рис. 4, б и задаваемую девятью различными ненулевыми перемещениями (обозначенными h_i , где i — целые числа от 1 до 9).

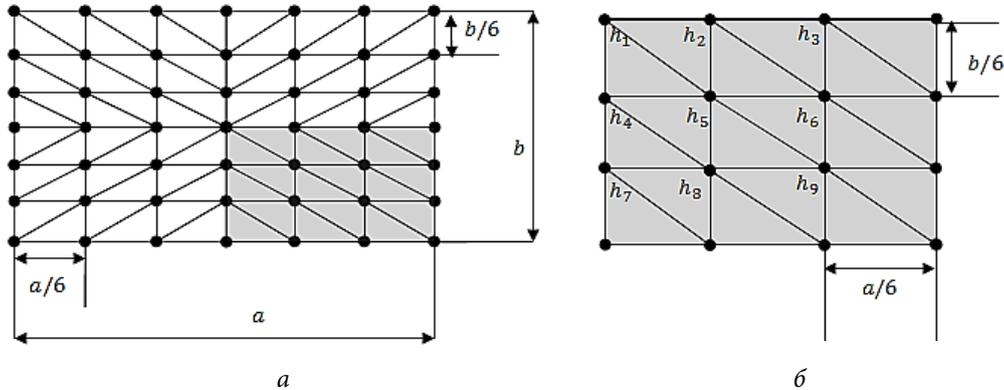


Рис. 4. Расчетная схема для прямоугольного сечения (а) и подобная область (б) формы прогиба

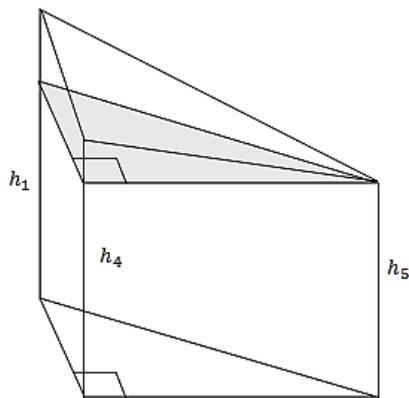


Рис. 5. Деформация конечного элемента

Рассмотрим фигуры, из которых состоит прогиб пленки. На рис. 5 в качестве примера показана фигура, образованная перемещениями h_1 , h_4 и h_5 . Нижнее основания этой фигуры — прямоугольный треугольник (прямой угол при h_4). Все рассматриваемое сечение состоит из таких фигур, поэтому нужно найти геометрические параметры фигуры и по аналогии распространить их на все остальные в рассматриваемой четверти сечения.

Важно разбить сечение таким образом, чтобы в фигуре прямой угол не находился при наименьшем перемещении. В таком случае мы можем провести через верхнюю точку наименьшего перемещения (в данном случае — h_5) сечение этой фигуры, параллельное основанию (показано на рис. 5 серым). Тогда фигуру можно разбить на две: прямую призму с основаниями в форме прямоугольных треугольников и четырехугольную пирамиду, в которой основанием является трапеция, а высотой — сторона, равная одной из сторон основания фигуры (в данном случае это сторона серого треугольника, которая обозначена $a/6$).

Суммируя объемы призмы и пирамиды, получаем: $V_i = \frac{ab(h_1 + h_4 + h_5)}{216}$. По аналогии найдем объемы всех фигур, входящих в рассматриваемую четверть (все фигуры, в которых есть нулевые перемещения, т. е. фигуры, связанные с контуром сечения, представляют собой пирамиды, высота которых равна

стороне основания). После суммирования получим объем четверти прогиба, по которому вычислим объем всего прогиба:

$$V = 4 \frac{ab}{216} (2h_1 + 3h_2 + 3h_3 + 3h_4 + 6h_5 + 6h_6 + 3h_7 + 6h_8 + 6h_9).$$

Введем декартову систему с началом координат в одном из углов подобного прямоугольника таким образом, чтобы две оси лежали в плоскости сечения. По координатам перемещений точек согласно формуле Герона с использованием системы Wolfram Mathematica найдем площадь треугольника:

$$S = 4 \left(\frac{bh_3^2}{4a} + \frac{b^2(h_1-h_2)^2 + a^2(h_2-h_5)^2}{4ab} + \frac{a^2(h_1-h_4)^2 + b^2(h_4-h_5)^2}{4ab} + \frac{b^2(h_2-h_3)^2 + a^2(h_3-h_6)^2}{4ab} + \frac{a^2(h_2-h_5)^2 + b^2(h_5-h_6)^2}{4ab} + \frac{bh_6^2}{4a} + \frac{a^2(h_3-h_6)^2 + b^2h_6^2}{4ab} + \frac{ah_7^2}{4b} + \frac{b^2(h_4-h_5)^2 + a^2(h_5-h_8)^2}{4ab} + \frac{a^2(h_4-h_7)^2 + b^2(h_7-h_8)^2}{4ab} + \frac{ah_8^2}{4b} + \frac{b^2(h_7-h_8)^2 + a^2h_8^2}{4ab} + \frac{b^2(h_5-h_6)^2 + a^2(h_6-h_9)^2}{4ab} + \frac{a^2(h_5-h_8)^2 + b^2(h_8-h_9)^2}{4ab} + \frac{ah_9^2}{4b} + \frac{bh_9^2}{4a} + \frac{b^2(h_8-h_9)^2 + a^2h_9^2}{4ab} + \frac{a^2(h_6-h_9)^2 + b^2h_9^2}{4ab} + \frac{ab}{4} \right).$$

Подставим это значение в выражение для потенциала:

$$\Pi = q \left(\frac{bh_3^2}{ab} + \frac{b^2(h_1-h_2)^2 + a^2(h_2-h_5)^2}{ab} + \frac{a^2(h_1-h_4)^2 + b^2(h_4-h_5)^2}{ab} + \frac{b^2(h_2-h_3)^2 + a^2(h_3-h_6)^2}{ab} + \frac{a^2(h_2-h_5)^2 + b^2(h_5-h_6)^2}{ab} + \frac{bh_6^2}{a} + \frac{a^2(h_3-h_6)^2 + b^2h_6^2}{ab} + \frac{ah_7^2}{b} + \frac{b^2(h_4-h_5)^2 + a^2(h_5-h_8)^2}{ab} + \frac{a^2(h_4-h_7)^2 + b^2(h_7-h_8)^2}{ab} + \frac{ah_8^2}{b} + \frac{b^2(h_7-h_8)^2 + a^2h_8^2}{ab} + \frac{b^2(h_5-h_6)^2 + a^2(h_6-h_9)^2}{ab} + \frac{a^2(h_5-h_8)^2 + b^2(h_8-h_9)^2}{ab} + \frac{ah_9^2}{4b} + \frac{bh_9^2}{a} + \frac{b^2(h_8-h_9)^2 + a^2h_9^2}{ab} + \frac{a^2(h_6-h_9)^2 + b^2h_9^2}{ab} \right) - p \frac{ab}{54} (2h_1 + 3h_2 + 3h_3 + 3h_4 + 6h_5 + 6h_6 + 3h_7 + 6h_8 + 6h_9).$$

Процедурой минимизации данной функции определим перемещения, по которым вычислим объем прогиба и жесткость сечения стержня:

$$\begin{aligned}
 V &= a^3 b^3 p \times \left(\frac{816a_2^1 + 19225a_0^1 b^2 + 126238a^8 b^4 + 236178a^6 b^6}{2916(a^2 + b^2)(4a^4 + 8a^2 b^2 + b^4)(a^4 + 14a^2 b^2 + b^4)(a^4 + 8a^2 b^2 + 4b^4)q} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{126238a^4 b^8 + 19225a^2 b_0^1 816b_2^1}{2916(a^2 + b^2)(4a^4 + 8a^2 b^2 + b^4)(a^4 + 14a^2 b^2 + b^4)(a^4 + 8a^2 b^2 + 4b^4)q} \right); \\
 I_k &= a^3 b^3 \left(\frac{816a_2^1 + 19225a_0^1 b^2 + 126238a^8 b^4 + 236178a^6 b^6}{729(a^2 + b^2)(4a^4 + 8a^2 b^2 + b^4)(a^4 + 14a^2 b^2 + b^4)(a^4 + 8a^2 b^2 + 4b^4)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{126238a^4 b^8 + 19225a^2 b_0^1 + 816b_2^1}{729(a^2 + b^2)(4a^4 + 8a^2 b^2 + b^4)(a^4 + 14a^2 b^2 + b^4)(a^4 + 8a^2 b^2 + 4b^4)} \right) \quad (5)
 \end{aligned}$$

При $a = 2b$ геометрическая жесткость сечения на кручение $I_k = 0,43249b^4$, что составляет 94,4 % табличного значения и считается достоверным результатом.

Таким образом, используя метод мембранной аналогии и принцип прямой минимизации полного механического потенциала системы, можно определить значение параметра крутильной жесткости для стержня с прямоугольным поперечным сечением:

$$\begin{aligned}
 C &= GI_k = \\
 &= Ga^3 b^3 \left(\frac{816a^{12} + 19225a^{10} b^2 + 126238a^8 b^4 + 236178a^6 b^6}{729(a^2 + b^2)(4a^4 + 8a^2 b^2 + b^4)(a^4 + 14a^2 b^2 + b^4)(a^4 + 8a^2 b^2 + 4b^4)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{126238a^4 b^8 + 19225a^2 b^{10} + 816b^{12}}{729(a^2 + b^2)(4a^4 + 8a^2 b^2 + b^4)(a^4 + 14a^2 b^2 + b^4)(a^4 + 8a^2 b^2 + 4b^4)} \right) \quad (6)
 \end{aligned}$$

где G — модуль сдвига, зависящий только от материала стержня.

Этот алгоритм можно применять для расчета крутильной жесткости стержня любого поперечного сечения; результат расчета становится более точным при увеличении числа точек разбиения.

В справочниках [3, 4] приведены значения крутильной жесткости всего для нескольких простых фигур. Поэтому при решении задач о кручении стержней с более сложным поперечным сечением метод пленочной аналогии становится одним из наиболее эффективных средств нахождения неизвестных параметров жесткости. Рассчитаем значение крутильной жесткости для ненормированного справочниками сечения — симметричного креста, все стороны которого равны a (рис. 6, а).

Разобьем крест таким образом, чтобы внутри каждого квадрата находилось три ряда по три точки, все точки ряды точек равноудалены друг от друга. В силу симметрии можно рассматривать лишь одну восьмую часть всего сечения (на рис. 6, а выделенную серым и представленную отдельно на рис. 6, б). При таком разбиении следствием прогиба пленки становятся 11 различных ненулевых перемещений сечения (на рис. 6 обозначенных как h_i , где i — целое число от 1 до 11).

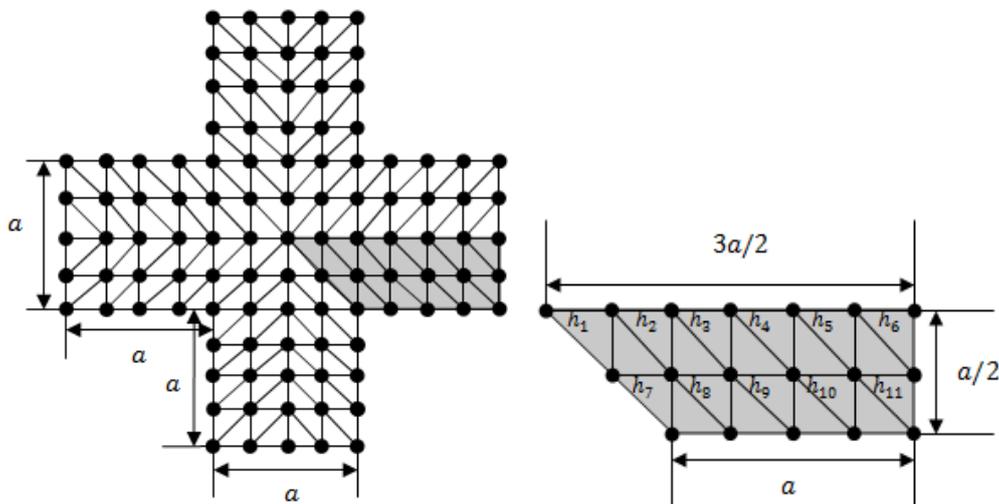


Рис. 6. Расчетная схема для крестовидного сечения

Алгоритм действий для нахождения объема прогиба и площади его поверхности аналогичен описанному выше для прямоугольного сечения. Рассматриваемый участок сечения разбит на прямоугольные треугольники, прогиб состоит из фигур, подобных показанной на рис 5. Объем фигуры можно найти суммированием объемов простых многогранников, а площади координатным способом по формуле Герона. Функция Π не должна включать переменные перемещения в степенях больше 2 и радикалы, содержащие сумму с переменными перемещениями. Поэтому в конечном выражении эти радикалы опускаются, а зависимость полного потенциала механической системы приводится к виду

$$\begin{aligned} \Pi = & -\frac{1}{12}a^2 \{h_1 + 3[2h_{10} + 2h_{11} + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + h_7 + 2(h_8 + h_9)]\}p + \\ & + 2\{h_1^2 - 2h_1h_2 + 2[4h_{10}^2 + 4h_{11}^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 - h_3h_4 + 2h_4^2 - (h_4 - 2h_5)h_5 - \\ & - (2h_{11} + h_5)h_6 + 2h_6^2 + 2h_7^2 - h_2(h_3 + 2h_7) - 2(h_3 + h_7)h_8 + 4h_8^2 - \\ & - 2(h_4 + h_8)h_9 + 4h_9^2 - 2h_{10}(h_{11} + h_5 + h_9)]\}q. \end{aligned}$$

Находим значения h_i , при которых потенциал принимает минимальные значения, и подставляем их в выражения для объема и крутильной жесткости для стержня с поперечным сечением в форме креста:

$$V = \frac{19111283a^4 p}{46397952q}; \quad I_k = \frac{4q/p}{V} \approx 1,6476a^4; \quad C = GI_k \approx 1,6476Ga^4. \quad (7)$$

Выводы. На основе алгоритма минимизации полного механического потенциала пленочного аналога деформируемого сечения определены параметры крутильной жесткости для стержней произвольных прямоугольных и симметричных крестовидных поперечных сечений. Поверочный расчет показал,

что для наиболее распространенного квадратного сечения точность определения крутильной жесткости методом пленочной аналогии составляет свыше 95 % значения, определенного аналитическими методами теории упругости. Показано, что повышение точности расчета крутильной жесткости стержней достигается увеличением числа точек разбиения, задающих перемещение поверхности пленочного аналога при прогибе. Универсальность предложенного расчетного алгоритма свидетельствует о перспективности использования метода пленочной (мембранной) аналогии при установлении параметров крутильной жесткости для стержневых конструкций различных поперечных сечений.

Литература

- [1] Рычков С.П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. Москва, ДМК Пресс, 2013, 784 с.
- [2] Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. Москва, ДМК Пресс, 2014, 640 с.
- [3] Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 1. Элементарная теория и задачи. Москва, Наука, 1965, 365 с.
- [4] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016, 543 с.
- [5] Валишвили Н.В., Гаврюшин С.С. Сопротивление материалов и конструкций. Москва, Юрайт, 2017, 429 с.
- [6] Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. Москва, Наука, 1986, 560 с.
- [7] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва, Наука, 1975, 576 с.
- [8] Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций: статика. Москва, URSS, 2017, 496 с.
- [9] Дьяконов В.П. Mathematica 5.2/6. Программирование и математические вычисления. Москва, ДМК Пресс, 2008, 574 с.
- [10] Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 2. Москва, МЦНМО, 2012, 833 с.

Кирюхин Артем Александрович — бакалавр кафедры «Прикладная механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва Российская Федерация.

Сульдин Богдан Никитович — магистр кафедры «Прикладная механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва Российская Федерация.

Научный руководитель — Сорокин Федор Дмитриевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва Российская Федерация.

THE COMPUTATION OF THE BAR'S TORSIONAL STIFFNESS BASED ON THE FILM-TYPE ANALOGY

A.A. Kiryukhin

arkiryukhin1999@gmail.com

SPIN-code: 1800-0060

B.N. Suldin

suldin.bogdan@gmail.com

SPIN-code: 9859-5703

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article suggests a torsional stiffness estimation algorithm for the bars of the arbitrary cross-sections based on the minimization of the full mechanical potential of the deformed cross-section film-type analogy. We have calculated the bar's stress-strain state with due consideration of the rectangular and cruciform cross-sections warpage under torsion. The calculation shows that for the most commonly encountered square section the accuracy of torsional stiffness estimate by means of the film-type analogy method exceeds 95 % of the parameter value defined by the analytical method of the elasticity theory. For the cruciform cross-section bar, which is not described in the elasticity theory reference-books, we have discovered the connection between the torsional stiffness and the film deflection shape parameter along the axis perpendicular to the cross section's plane. The article provides the recommendations on establishing the number of points of the discrete film-type analogy and the composition of variables by which the displacements of these points are set.

Keywords

Twist of bar, stress-strain state, the method of membranous (film-type) analogy, rectangular and cruciform cross-sections, Lagrange principle, the stiffness of the bar

© Bauman Moscow State Technical University, 2018

References

- [1] Rychkov S.P. Modelirovanie konstruktivnykh v sredy Femap with NX Nastran [Programming in Femap with NX Nastran]. Moscow, DMK Press publ., 2013, 784 p.
- [2] Basov K.A. ANSYS: spravochnik pol'zovatelya [Ansys: a user's handbook]. Moscow, DMK Press publ., 2014, 640 p.
- [3] Timoshenko S. Strength of materials. P. I. Elementary theory and problems. Van Nostrand Reinhold, 1955, 442 p. (Russ. ed.: Soprotivlenie materialov. T. 1. Elementarnaya teoriya i zadachi. Moscow, Nauka publ., 1965, 365 p.)
- [4] Feodos'yev V.I. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. Moscow, Bauman Press, 2016, 543 p.
- [5] Valishvili N.V., Gavryushin S.S. Soprotivlenie materialov i konstruktivnykh [Strength of materials and constructions]. Moscow, Yurayt publ., 2017, 429 p.
- [6] Birger I.A., Mavlyutov R.R. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. Moscow, Nauka publ., 1986, 560 p.
- [7] Goodier J.N., Timoshenko S.P. Theory of elasticity. McGraw-Hill, 1970, 608 p. (Russ. ed.: Teoriya uprugosti. Moscow, Nauka publ., 1975, 576 p.)

- [8] Biderman V.L. Mekhanika tonkostennykh konstruksiy: statika [Mechanics of thin-walled constructions: statics]. Moscow, URSS publ., 2017, 496 p.
- [9] D'yakov V.P. Mathematica 5.2/6. Programirovanie i matematicheskie vychisleniya [Programming and mathematical calculations]. Moscow, DMK Press publ., 2008, 574 p.
- [10] Zorich V.A. Matematicheskiy analiz. Ch. 2 [Mathematical analysis. P. 2]. Moscow, MTsNMO publ., 2012, 833 p.

Kiryukhin A.A. — Bachelor's Degree student, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Suldin B.N. — Master's Degree student, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — F.D. Sorokin, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.