УДК 532.5.031 DOI: 10.18698/2541-8009-2018-6-335

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В БАКЕ, ЗАКРЫТОМ ПОДВИЖНОЙ ЖЕСТКОЙ ПЛАСТИНОЙ

А.С. Полюхин polyukhinas@gmail.com
SPIN-код: 6626-1898

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрено линейное приближение плоской задачи о малых колебаниях идеальной жидкости в прямоугольном баке, боковая жесткая стенка которого может поворачиваться относительно горизонтальной оси. На основе выбранных допущений построена упрощенная линеаризованная модель исследуемой системы. Такую модель можно использовать в качестве простейшей модели речной плотины или танкера с упругой стенкой. Построено приближенное решение краевой задачи о малых колебаниях жидкости в жестком прямоугольном баке, закрытом с одной стороны жесткой подпружиненной стенкой. Получено уравнение, позволяющее в линейном приближении определить частоту собственных колебаний рассматриваемой системы.

Ключевые слова

Колебания, идеальная жидкость, потенциальное течение, интеграл Лагранжа — Коши, гидроупругость, потенциал скорости, метод Фурье, линейная модель, частота собственных колебаний

Поступила в редакцию 17.05.2018

В настоящее время задачи о колебаниях жидкости в ограниченном объеме очень актуальны при изучении различных прикладных проблем гидроупругости. В работах, посвященных анализу упругих тел [1, 2] и их взаимодействия с жидкостью [3–7], разработаны математические и физические модели, позволяющие с достаточной точностью описывать движение представленных объектов. В данной статье рассмотрена система с подвижной боковой пластиной. Такую механическую систему можно считать простейшей моделью плотины или моделью танкера с упругой стенкой.

Целью работы является нахождение характеристик заданного колебательного контура, которые позволят проанализировать динамические свойства конструкции и помогут сделать выводы о характере движения жидкости. Представленная задача представляет собой краевую задачу математической физики, в основу ее решения положены следующие допущения о характере движения и взаимодействия рассматриваемой системы:

1) колебания системы бак — жидкость малые;

2) жидкость идеальная, несжимаемая, ее движение потенциальное с потенциалом Ф;

3) трение в опоре пластины отсутствует.

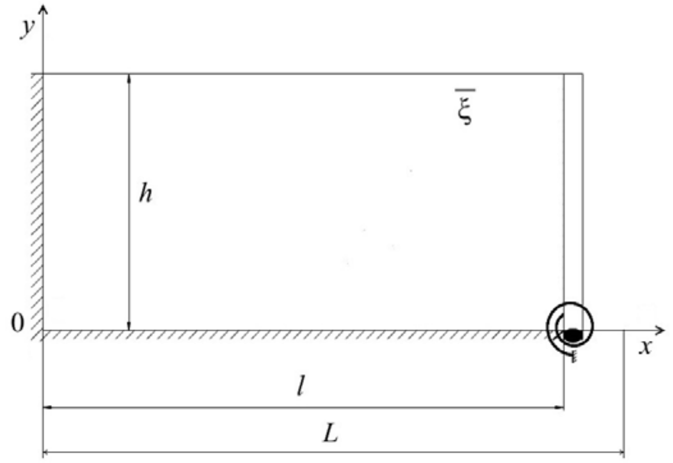

Рис. 1. Модель бака с жидкость и упругой боковой крышкой

Пусть h — высота бака; l — длина бака; L — некоторый размер, больший l, который позволяет определить функцию потенциала скорости.

В силу принятых допущений потенциал скорости жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа в области τ (где τ — объем жидкости в сосуде) [8]:

$$\nabla^2\Phi = 0, \tag{1}$$

или в другой форме записи,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Граничные условия для функции Φ имеют следующий вид (условия непроницаемости стенок бака):

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x=L} = 0; \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \tag{2}$$

Для решения воспользуемся методом разделения переменных, или методом Фурье. Ограничиваясь одним членом ряда, будем искать частное решение для потенциала в виде

$$\Phi = X(x)Y(y)S(t);$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = -\lambda^2. \tag{3}$$

Отсюда

$$X'' + \lambda^2 X = 0;$$

$$X = C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x),$$

где C_1, C_2 — константы интегрирования; λ — собственные значения.

Согласно граничным условиям, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0,$ тогда $-C_1\lambda\sin 0 + C_2\lambda\cos 0 = 0,$ откуда $C_2 = 0.$ Поскольку $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x=L} = 0,$ то $-C_1\lambda\sin(\lambda L) = 0.$ Учитывая, что $C_1 \neq 0,$ $\lambda \neq 0,$ получаем $\sin(\lambda L) = 0,$ тогда справедливо выражение $\lambda L = \pi,$ откуда

$$\lambda = \frac{\pi}{L}.$$

Уравнение для $Y(y)$ получим из (3):

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0;$$

$$Y = A_1\sinh(\lambda y) + A_2\cosh(\lambda y)$$

В силу граничных условий (2) при $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ можно записать

$$\lambda A_1\cosh 0 + \lambda A_2\sinh 0 = 0;$$

$$A_1\lambda_1 = 0 \text{ ,откуда } A_1 = 0.$$

Окончательно функция Φ примет вид

$$\Phi = C\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{L}y\right)S(t). \tag{4}$$

где C — произвольная константа интегрирования, $S(t)$ — некоторая периодическая функция времени.

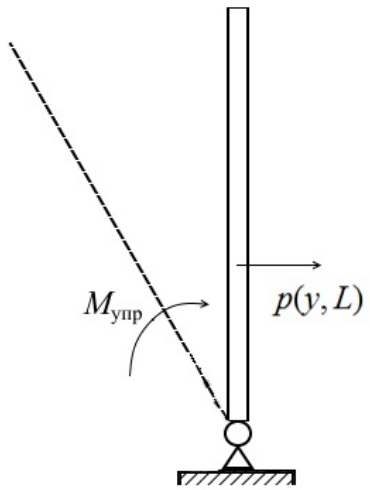

Рис. 2. Упрощенная схема пластины с упругим основанием

Для определения характеристик колебательного контура потребуются дополнительные уравнения связи. Рассмотрим вынужденные движения боковой пластины под действием колебаний жидкости. Пусть $p(y, L)$ — полное давление, действующее на боковую стенку, $M_{\text{упр}}$ — момент, возникающий вследствие упругости пластины, жесткость которой равна k, J_0 — момент инерции пластины относительно оси вращения. Гидродинамическое давление жидкости определим с помощью интеграла Лагранжа — Коши [8]:

$$p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где ρ — плотность жидкости.

Вычислим равнодействующую сил давления с помощью (4):

$$\int_0^h p y dy = \int_0^h \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} y dy = \int_0^h \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} y dy = \rho C \int_0^h y \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \cosh\left(\frac{\pi}{L} y\right) \dot{S}(t) dy.$$

Тогда дифференциальное уравнение вращательного движения пластины [9] будет иметь вид

$$J_0 \ddot{\varphi} + k\varphi = -\rho C \cos\left(\frac{\pi}{L} l\right) \dot{S}(t) \int_0^h y \cosh\left(\frac{\pi}{L} y\right) dy. \tag{5}$$

Продифференцировав выражение (5) по времени, получим

$$J_0 \dddot{\varphi} + k\dot{\varphi} = -\rho C \cos\left(\frac{\pi}{L} l\right) \ddot{S}(t) \int_0^h y \cosh\left(\frac{\pi}{L} y\right) dy.$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^h y \cosh\left(\frac{\pi}{L} y\right) dy = y \frac{L}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi}{L} y\right)\Big|_0^h - \frac{L}{\pi} \int_0^h \sinh\left(\frac{\pi}{L} y\right) dy =$$

$$= h \frac{L}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi}{L} h\right) - \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \left[\cosh\left(\frac{\pi}{L} h\right) - 1\right].$$

Введя обозначения

$$B = -\frac{\rho}{J_0} \left[h \frac{L}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi}{L} h\right) - \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \cosh\left(\frac{\pi}{L} h\right) - 1 \right];$$

$$z = \dot{\varphi}; \quad {\omega_0}^2 = \frac{k}{J_0}; \quad \ddot{S} = -\omega^2 S,$$

преобразуем дифференциальное уравнение вращательного движения (5) к каноническому виду следующим образом [10]:

$$\ddot{z}+\omega_0^2 z=-C\omega^2 BS.$$

Частное решение для $Z(t)$ будем искать в виде $Z = DS(t)$:

$$D(\omega_0^2-\omega^2)S(t)=-\omega^2 BCS(t);$$

$$D=\frac{C\omega^2 B}{\omega^2-\omega_0^2},$$

где ω_0 — собственная частота колебаний пластины; ω — собственная частота колебаний рассматриваемой системы; B и D — некоторые константы.

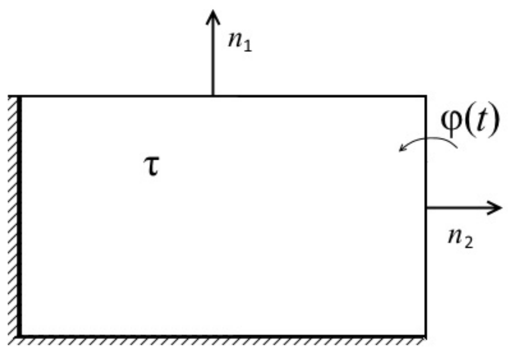

Рис. 3. Краевые условия для бака с жидкостью

Сформулируем дополнительные граничные условия для колебательной системы, определение которых позволит решить полученное в дальнейшем вариационное уравнение. Линеаризованное граничное условие на свободной поверхности жидкости [2, 4]:

$$g\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=h}+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)_{y=h}=0, \qquad (6)$$

где g — ускорение свободного падения.

Из уравнения (6) следует, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n_1}=\left(\frac{\omega^2\Phi}{g}\right)_{y=h}.$$

Поскольку $\mathbf{u}=-\operatorname{grad}\Phi,$ из решения уравнения (5) следует, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n_2}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\dot{\varphi}y=DS(t)y.$$

Наконец, для определения частоты собственных колебаний системы построим вариационное уравнение, используя свойства потенциала Φ [11]:

Умножим выражение (1) на Φ_1:

$$\nabla^2 \Phi \Phi_1 = 0$$

Далее проинтегрируем равенство по всему объему τ:

$$\oint_{\tau} \nabla^2 \Phi \Phi_1 d\tau = 0. \tag{7}$$

Согласно второй формуле Грина для (7)

$$\oint_S \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \Phi \right] ds = 0,$$

где S — площадь смоченной поверхности жидкости; n — внешняя нормаль.

$$\int_0^l \frac{\omega^2}{g} \Phi_{y=h} \Phi_{1y=h} - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)_{y=h} \Phi_{y=h} dx + \int_h^0 y \dot{\varphi}_{x=l} \Phi_{1x=l} - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)_{x=l} \Phi_{x=l} dy = 0.$$

Тогда

$$\int_0^l \frac{\omega^2}{g} \Phi_{y=h} \Phi_{1y=h} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}_{y=h} \Phi_{y=h} dx =$$

$$= \int_0^l \frac{\omega^2}{g} \left(C \cos\left(\frac{\pi}{L} x \right) \cosh(\frac{\pi}{L} h) S(t) \right)^2 - C^2 \frac{\pi}{L} \cos^2\left(\frac{\pi}{L} x \right) \sinh\left(\frac{\pi}{L} h \right) \cosh\left(\frac{\pi}{L} h \right) S(t)^2 dx =$$

$$= \left(S(t) C \right)^2 \left[\frac{\omega^2}{g} \cosh^2\left(\frac{\pi}{L} h \right) - \frac{\pi}{2L} \sinh\left(\frac{2\pi}{L} h \right) \right] \int_0^l \cos^2\left(\frac{\pi}{L} x \right) dx =$$

$$= \left(S(t) C \right)^2 \frac{1}{2} \left[\frac{\omega^2}{g} \cosh^2\left(\frac{\pi}{L} h \right) - \frac{\pi}{2L} \sinh\left(\frac{2\pi}{L} h \right) \right] \left[l + \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi l}{L} \right) \right];$$

$$\int_h^0 y \dot{\varphi}_{x=l} \Phi_{1x=l} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}_{x=l} \Phi_{x=l} dy =$$

$$= \int_h^0 y DC \cos\left(\frac{\pi}{L} l \right) \cosh\left(\frac{\pi}{L} y \right) S(t)^2 + \frac{\pi}{L} C^2 \sin\left(\frac{\pi}{L} l \right) \cos\left(\frac{\pi}{L} l \right) \cosh^2\left(\frac{\pi}{L} y \right) S(t)^2 dy =$$

$$= -DS(t)^2 C \cos\left(\frac{\pi}{L} l \right) \int_0^h y \cosh\left(\frac{\pi}{L} y \right) dy - \frac{\pi}{2L} \left(S(t) C \right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{L} l \right) \int_0^h \cosh^2\left(\frac{\pi}{L} y \right) dy =$$

$$= -DS(t)^2 C \cos\left(\frac{\pi}{L} l \right) \left[h \frac{L}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi}{L} h \right) - \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \cosh\left(\frac{\pi}{L} h \right) - 1 \right] -$$

$$- \frac{\pi}{4L} \left(S(t) C \right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{L} l \right) \left[h + \frac{L}{2\pi} \sinh\left(\frac{2\pi h}{L} \right) \right].$$

Отсюда получим биквадратное уравнение для определения собственной частоты ω колебаний рассматриваемой системы:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\omega^2}{g}\cosh^2\left(\frac{\pi}{L}h\right)-\frac{\pi}{2L}\sinh\left(\frac{2\pi}{L}h\right)\right]\left[l+\frac{L}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right)\right]-$$
$$-\frac{\omega^2 B}{\omega^2-\omega_0^2}\cos\left(\frac{\pi}{L}l\right)\left[h\frac{L}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{L}h\right)-\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\cosh\left(\frac{\pi}{L}h\right)-1\right]- \qquad (8)$$
$$-\frac{\pi}{4L}\sin\left(\frac{2\pi}{L}l\right)\left[h+\frac{L}{2\pi}\sinh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)\right]=0.$$

Заключение. Получено линейное приближение решения краевой задачи о малых колебаниях жидкости в жестком прямоугольном баке, закрытом с одной стороны жесткой подпружиненной стенкой. Решение уравнения (8) с начальными параметрами конкретной системы дает возможность рассчитать частоту собственных колебаний этой системы. Полученный результат позволяет проектировщику правильно проанализировать динамику конструкции, элементом которой является бак с жидкостью.

Литература

[1] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016, с. 440–445.

[2] Тимошенко С.П. *Колебания в инженерном деле*. Москва, Машиностроение, 1985, с. 444–455.

[3] Балабух Л.И. Некоторые точные решения задачи о колебаниях жидкости в упругих оболочках. *Тр. V Всес. конф. по теории пластин и оболочек*. Москва, 1965, с. 68–72.

[4] Лейбензон Л.С. *О натуральных периодах колебаний плотины, подпирающей реку*. Сб. трудов АН СССР. Т.1. Москва, Изд-во АН СССР, 1951, с. 157–161.

[5] Пожалостин А.А. Осесимметричные колебания упругих баков с жидкостью. *Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок*. Москва, Наука, 1970, с. 483–487.

[6] Пожалостин А.А. *Построение системы гармонических функций для расчета осесимметричных колебаний жидкости в упругом цилиндрическом баке с жидкостью*. Москва, ВИМИ, 1987, с. 71–74.

[7] Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 12(24). URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1147.html.

[8] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика*. Ч. 1. Москва, Альянс, 2016, с. 31–34.

[9] Никитин Н.Н. *Курс теоретической механики*. Санкт-Петербург, Лань, 2016, с. 356–363.

[10] Колесников К.С., Дубинин В.В. *Курс теоретической механики*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, с. 582–583.

[11] Кочин Н.Е. *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления*. Москва, URSS, 2017, с. 177–178.

Полюхин Александр Сергеевич — студент кафедры «Теплофизика», МГТУ им. Н.Э Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Пожалостин Алексей Алексеевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

INVESTIGATION OF LIQUID SLOSHING IN THE TANK CLOSED WITH THE MOVABLE RIGID PLATE

A.S. Polyukhin

polyukhinas@gmail.com
SPIN-code: 6626-1898

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article considers the linear approximation of the plane problem of the ideal fluid small oscillation in the rectangular tank, whose lateral rigid wall can turn about the horizontal axis. Because of the selected assumptions we have constructed a simplified linearized model of the examined system. Such model can be used as the simplest form of the river dam or tanker with a flexible wall. The authors have constructed an approximate solution of the boundary value problem of fluid small oscillation in the rigid rectangular tank closed on one side with the rigid spring-loaded wall. We have obtained an equation allowing us to determine the natural oscillation frequency of the considered system in linear approximation.

Keywords

Oscillation, ideal fluid, potential flow, Lagrange-Cauchy integral, hydroelasticity, velocity potential, Fourier method, linear model, natural oscillation frequency

Received 17.05.2018

References

[1] Feodos'yev V.I. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. Moscow, Bauman Press, 2016, pp. 440–445.

[2] Timoshenko S.P. Kolebaniya v inzhenernom dele [Oscillations in engineering]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1985, pp. 444–455.

[3] Balabukh L.I. Nekotorye tochnye resheniya zadachi o kolebaniyakh zhidkosti v uprugikh obolochkakh [Some accurate solutions of the problem of liquid oscillations in elastic shells]. *Tr. V Vses. konf. po teorii plastin i obolochek* [Proc. V Russ. Conf. on Plates and Shells Theory]. Moscow, 1965, pp. 68–72.

[4] Leybenzon L.S. O natural'nykh periodakh kolebaniy plotiny, podpirayushchey reku [On natural periods of the river dam oscillations]. *Sb. trudov AN SSSR. T.1* [Proc. USSR Academy of Science. Vol. 1]. Moscow, AN SSSR publ., 1951, pp. 157–161.

[5] Pozhalostin A.A. Osesimmetrichnye kolebaniya uprugikh bakov s zhidkost'yu [Axial-symmetrical oscillations of flexible tank with liquid]. *Tr. VII Vses. konf. po teorii obolochek i plastinok* [Proc. VII Russ. Conf. on Shells and Plates Theory]. Moscow, Nauka publ., 1970, pp. 483–487.

[6] Pozhalostin A.A. Postroenie sistemy garmonicheskikh funktsiy dlya rascheta osesimmetrichnykh kolebaniy zhidkosti v uprugom tsilindricheskom bake s zhidkost'yu [Solution of harmonic functions system for calculating liquid oscillations in flexible cylindrical tank]. Moscow, VIMI publ., 1987, pp. 71–74.

[7] Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. Free axisymmetric oscillations of two-layered liquid with the elastic separator between layers in the presence of surface tension forces. *Inzhe-*

nernyy zhurnal: nauka i innovatsii [Engineering Journal: Science and Innovation], 2013, no. 12(24). Available at: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1147.html.
[8] Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. Teoreticheskaya gidromekhanika. Ch. 1 [Theoretical hydromechanics. P. 1]. Moscow, Al'yans publ., 2016, pp. 31–34.
[9] Nikitin N.N. Kurs teoreticheskoy mekhaniki [Theoretical mechanics course]. Sankt-Petersburg, Lan' publ., 2016, pp. 356–363.
[10] Kolesnikov K.S., Dubinin V.V. Kurs teoreticheskoy mekhaniki [Theoretical mechanics course]. Moscow, Bauman Press, 2017, pp. 582–583.
[11] Kochin N.E. Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniya [Vector calculus and elements of tensor analysis]. Moscow, URSS publ., 2017, pp. 177–178.

Polyukhin A.S. — student, Department of Thermal Physics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — A.A. Pozhalostin, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.