УДК 532.322 DOI: 10.18698/2541-8009-2018-7-348

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В БАКЕ, ОДНА ИЗ СТЕНОК КОТОРОГО ПРЕДСТАВЛЕНА В ВИДЕ УПРУГОЙ БАЛКИ

Е.С. Шараборова lisaenergo@yandex.ru
SPIN-код: 9780-5995

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Исследованы малые колебания идеальной несжимаемой жидкости в жестком прямоугольном баке длиной l, одна из стенок которого при x = l рассматривается в виде упругой балки, которая совершает изгибные колебания вместе с заполняющей бак жидкостью. Материал балки подчиняется закону Гука. В статье рассмотрен случай прямого изгиба. Решение этой задачи относится к достаточно сложным краевым задачам гидроупругости. Предложен нестандартный метод приближенного решения. Результаты исследования могут быть использованы при анализе динамики гидросооружений и в кораблестроении при проектировании многотонных судов (нефтевозы, газовозы).

Ключевые слова

Малые колебания, идеальная несжимаемая жидкость, упругая балка, прямой изгиб, гидроупругость, закон Гука, метод Фурье, уравнение Лапласа, частота колебаний

Поступила в редакцию 17.05.2018

Будем исследовать малые колебания идеальной несжимаемой жидкости в жестком баке (рис. 1). Плотность жидкости равна ρ, ее объем τ. Жидкость находится в прямоугольном баке глубиной H и длиной l. При $x = l$ одна из стенок бака

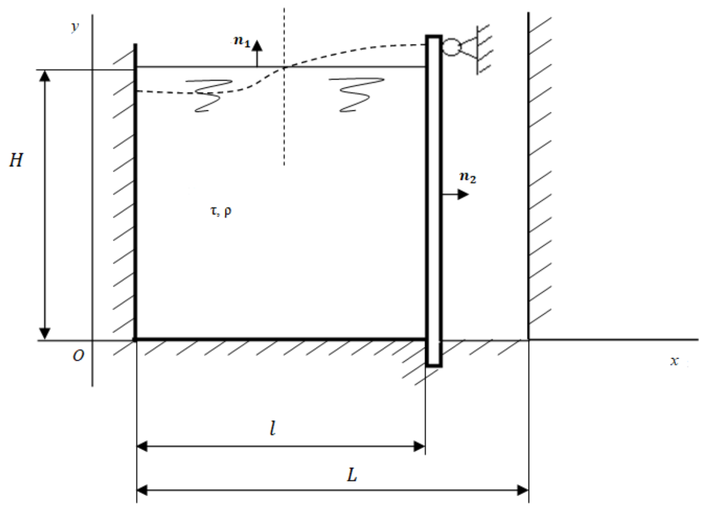

Рис. 1. Расчетная модель колебаний жидкости в прямоугольном баке, закрытом с одной стороны упругой балкой

рассматривается как упругая балка. Балка совершает изгибные колебания вместе с заполняющей бак жидкостью. Материал балки подчиняется закону Гука. Также примем следующие основные допущения:

1) колебания малые, жидкость идеальная, несжимаемая, потенциал скорости $\Phi(X, Y, q)$;

2) балка упругая, подчиняется закону Гука;

3) изгиб балки прямой.

Скорость фаз средней частицы равна

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\Phi.$$

В случае идеальной несжимаемой жидкости и потенциальности ее течения она должна удовлетворять уравнению Лапласа в объеме τ, занимаемом жидкостью [1–3]:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0. \qquad (1)$$

Решение для потенциала скорости по методу Фурье [4, 5] имеет вид

$$\Phi = X(x)Y(y)q(t). \qquad (2)$$

Кроме того, потенциал скорости Φ должен удовлетворять краевым условиям [4, 5]:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=l} = w, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \qquad (3)$$

где Oxy — неподвижная система координат (см. рис. 1); w — прогиб балки; l — ее длина.

Решение для функции $X(x)$ имеет вид

$$X(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x,$$

для функции $Y(y)$

$$Y(y) = A_1\operatorname{ch}\lambda y + A_2\operatorname{sh}\lambda y.$$

Тогда функция $\Phi(x, y)$ (временной множитель опущен):

$$\Phi = (C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x)(A_1\operatorname{ch}\lambda y + A_2\operatorname{sh}\lambda y),$$

где λ — искомое собственное значение задачи.

Подставим последнее выражение в уравнения для краевых условий (3):

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=0} = (A_1\operatorname{sh}\lambda y + A_2\operatorname{ch}\lambda y)(C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x);$$

$$A_1\cdot 0 + A_2\operatorname{ch}\lambda\cdot 0 = 0; \quad \lambda \neq 0;$$

$$A_2 = 0;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}_{x=0} = (-C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x)\,(A_1 \operatorname{ch}\lambda y + A_2 \operatorname{sh}\lambda y);$$

$$C_2 = 0.$$

Дифференциальное уравнение поперечных изгибных колебаний однородной балки будет [6, 7]:

$$\dot{w}^{\mathrm{IV}} - \beta^4 \dot{w} = \rho^* \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}_{x=l}; \quad \beta^4 = \frac{\mu\omega^2}{EJ_0}; \quad \rho^* = \frac{\rho}{EJ_0}, \tag{4}$$

где μ — погонная масса балки; EJ_0 — жесткость на изгиб; ω — искомая частота свободных колебаний системы; ρ — плотность жидкости.

Используя интеграл Лагранжа — Коши, запишем выражение для гидродинамического давления:

$$p = \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

при этом примем, что

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\Phi.$$

Решение уравнения (4) для прогиба w будем искать в виде

$$\dot{w} = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x + C_3 \operatorname{ch}\beta y + C_4 \operatorname{sh}\beta x + \dot{w}^*;$$

$$w''(x = L) = w'''(x = 0) = 0, \tag{5}$$

где изгибающий момент и перерезывающая сила на границе балки приняты равными нулю.

Окончательно получим:

$$\Phi = SA\cos\lambda_1 x \operatorname{ch}\lambda_1 y; \tag{6}$$

$$\dot{w}^{\mathrm{IV}} - \beta^4 \dot{w} = \frac{\rho^2\omega^2}{EJ_0} A\cos\lambda_1 l(\operatorname{ch}\lambda_1 y);$$

$$\dot{w}^{\mathrm{IV}} = \beta^4 C_1 \cos\beta x + \beta^4 C_2 \sin\beta x + \beta^4 C_3 \operatorname{ch}\beta y + \beta^4 C_4 \operatorname{sh}\beta y;$$

$$\beta^4 C_2 \sin\beta x + \beta^4 C_3 \operatorname{ch}\beta y + \beta^4 C_4 \operatorname{sh}\beta y - \beta^4 \dot{w} = \frac{\rho^2\omega^2}{EJ_0} A\cos\lambda_1 l(\operatorname{ch}\lambda_1 y).$$

В рассматриваемом приближенном решении учтем только один член ряда в потенциале скорости Φ, на основании [4] с учетом граничных условий (3) получим:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{L};$$

при этом скорость прогиба

$$\dot{w}^* = \frac{\rho^2}{\mu} A\cos\lambda_1 l\ (\operatorname{ch}\lambda_1 y).$$

Подставим в выражение для $\dot{w}$ частное решение (4) для учета действия гидродинамического давления жидкости:

$$\dot{w} = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x + C_3\,\mathrm{ch}\,\beta y + C_4\,\mathrm{sh}\,\beta y + \frac{\rho^2}{\mu}A\cos\frac{\pi}{L}l\left(\mathrm{ch}\frac{\pi}{L}y\right).$$

Проверим соблюдение граничных условий закрепления балки:

$$\left.\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial y^2}\right|_{y=H} = 0; \quad \left.\frac{\partial\dot{w}}{\partial y}\right|_{y=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}\right|_{\substack{x=l\\y=0}} = 0; \quad \left.\dot{w}\right|_{\substack{x=l\\y=0}} = 0;$$

$$C_4 = 0;$$

$$C_3 = -\frac{\rho^2 A\cos\frac{\pi l}{L}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi H}{L}\right)}{\mu\,\mathrm{ch}\,\beta H};$$

$$C_2 = C_1\,\mathrm{tg}\,\beta l;$$

$$C_1 = \frac{2\rho^2 A\cos\frac{\pi l}{L}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi H}{L} - \mathrm{ch}\,\beta H\right)}{\mu\,\mathrm{ch}\,\beta H\left(\cos\beta l + \mathrm{tg}\,\beta l(\sin\beta l)\right)}; \quad C_2 = \frac{2\rho^2 A\cos\frac{\pi l}{L}(\mathrm{tg}\,\beta l)\left(\mathrm{ch}\frac{\pi H}{L} + \mathrm{ch}\,\beta H\right)}{\mu\,\mathrm{ch}\,\beta H\left(\cos\beta l + \mathrm{tg}\,\beta l(\sin\beta l)\right)}.$$

Поскольку потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\Phi = 0$, умножим последнее равенство на выражение (6) и проинтегрируем по всему объему, занятому жидкостью: $\tau\int_0^\tau \nabla^2\Phi\Phi\,d\tau = 0$. Перейдем от интеграла по объему τ к интегралу по поверхности S, используя вторую формулу Грина [8], где S — смоченная поверхность балки [9, 10]:

$$\oint\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\Phi_1 dS - \oint\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{n}}\Phi dS = 0$$

$$\ddot{q}\int_0^H \dot{w}\cos\frac{\pi l}{L}\,\mathrm{ch}\frac{\pi}{L}y\,dy + \ddot{q}\int_l^0 \cos^2\frac{\pi}{L}x\,\mathrm{ch}^2\frac{\pi H}{L} - q\int_0^H \Phi_{x=l}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{x=l} dy - q\int_l^0 \cos\frac{\pi}{L}x\,\mathrm{ch}\frac{\pi}{L}H\,dx = 0;$$

$$\ddot{q}\left[C_1\cos\beta l\,\mathrm{sh}\frac{\pi}{L}H + \frac{\left(\frac{L}{\pi}\mathrm{sh}\frac{2\pi H}{L} + 2H\right)}{4}\left(C_3 + \frac{\rho^2 A\cos\frac{\pi l}{L}}{\mu}\right) - \mathrm{ch}^2\frac{\pi H}{L}\frac{L\sin\frac{2\pi l}{L} + 2\pi l}{4\pi}\right] +$$

$$+q\left[\frac{L\,\mathrm{ch}\frac{\pi H}{L}\sin\frac{\pi l}{L}}{\pi} - A^2\cos^2\frac{\pi l}{L}\frac{L\,\mathrm{sh}^2\frac{\pi H}{L}}{2\pi}\right] = 0.$$

В результате решения данной краевой задачи получено трансцендентное уравнение для определения частоты первого тона собственных колебаний системы. Кроме этого определена форма собственных колебаний системы. Используя эти результаты, можно решить задачу о вынужденных колебаниях системы. Ее решение позволяет проектировщику приближенно определить напряжения возникающее при возможных вынужденных колебаниях конструкции. Полученные формулы можно использовать также при динамических расчетах перегородных судов, нефтевозов, газовозов и колебаниях плотин.

Литература

[1] Колесников К.С., Дубинин В.В., ред. *Курс теоретической механики*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 580 с.

[2] Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. *Курс теоретической механики*. В 2 т. Москва, Наука, 1983, 352 с., 640 с.

[3] Никитин Н.Н. *Курс теоретической механики*. Санкт-Петербург, Лань, 2016, 719 с.

[4] Петров А.А., Моисеев Н.Н. *Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости*. Москва, ВЦ АН СССР, 1966, 269 с.

[5] Лейбензон Л.С. *О натуральных периодах колебания плотины, подпирающей реку*. Сб. Трудов АН СССР. Т.1. Москва, Изд-во АН СССР, 1951, с. 157–161.

[6] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016, 543 с.

[7] Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. *Колебания в инженерном деле*. Москва, Машиностроение, 1985, 472 с.

[8] Кочин Н.Е. *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления*. Москва, Наука, 1965, 427 с.

[9] Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями. *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*, 2015, № 1, с. 31–34.

[10] Балабух Л.И. Некоторые точные решения задачи о колебаниях жидкости в упругих оболочках. V Всесоюзная конф. по теории пластин и оболочек. Москва, Наука, 1965, с. 68–72.

Шараборова Елизавета Сергеевна — студентка кафедры «Газотурбинные и нетрадиционные энергоустановки», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Пожалостин Алексей Алексеевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

THE DYNAMICS OF THE ROTARY VANE PUMPS STARTING FROM THE ASYNCHRONOUS MOTOR WITH THE BALL-BEARINGS

E.S. Sharaborova
lisaenergo@yandex.ru
SPIN-code: 9780-5995

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper investigates small oscillations of the ideal incompressible fluid in the rigid rectangular tank of the length l, where one of the walls under x = l is viewed as the flexible beam, which executes bending oscillations together with the liquid filling the tank. The material of the beam follows Hooke's law. The article considers the case of symmetrical bending. The solution of this problem refers to quite complicated boundary-value problems of fluid elasticity. We suggest an unconventional method of the approximate solution. The results of the investigation can be applied while analyzing the dynamics of the hydraulic facilities and designing the multi-ton vessels (oil-tankers, gas tankers) in the field of shipbuilding.

Keywords

Small oscillations, ideal incompressible fluid, flexible beam, symmetrical bending, fluid elasticity, Hooke's law, Fourier method, Laplace equation, oscillation frequency

Received 17.05.2018

References

[1] Kolesnikov K.S., Dubinin V.V., ed. Kurs teoreticheskoy mekhaniki [Theoretical mechanics course]. Moscow, Bauman Press, 2017, 580 p.

[2] Loytsyanskiy L.G., Lur'ye A.I. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. V 2 t. [Theoretical mechanics course. In 2 vols.]. Moscow, Nauka publ., 1983, 352 p., 640 p.

[3] Nikitin N.N. Kurs teoreticheskoy mekhaniki [Theoretical mechanics course]. Sankt-Petersburg, Lan' publ., 2016, 719 p.

[4] Petrov A.A., Moiseev N.N. Chislennye metody rascheta sobstvennykh chastot kolebaniy ogranichennogo ob"ema zhidkosti [Numerical calculation method for natural oscillation frequency of limited liquid volume]. Moscow, VTs AN SSSR publ., 1966, 269 p.

[5] Leybenzon L.S. O natural'nykh periodakh kolebaniy plotiny, podpirayushchey reku [On natural periods of the river dam oscillations]. *Sb. trudov AN SSSR. T.1* [Proc. USSR Academy of Science. Vol. 1]. Moscow, AN SSSR publ., 1951, pp. 157–161.

[6] Feodos'yev V.I. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. Moscow, Bauman Press, 2016, 543 p.

[7] Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W. Vibration problems in engineering. Wiley, 1974, 521 p. (Russ. ed.: Kolebaniya v inzhenernom dele. Moscow, Mashinostroenie publ., 1985, 472 p.)

[8] Kochin N.E. Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniya [Vector calculus and tensor analysis principles]. Moscow, Nauka publ., 1965, 427 p.

[9] Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. Free axisymmetric oscillations of a two-layer liquid with an elastic separator between layers. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Aviatsionnaya tekhnika*, 2015, no. 1, pp. 31–34. (Eng. version: *Russian Aeronautics*, 2015, vol. 58, no. 1, pp. 37–41.)

[10] Balabukh L.I. Nekotorye tochnye resheniya zadachi o kolebaniyakh zhidkosti v uprugikh obolochkakh [Some accurate solutions of the problem of liquid oscillations in elastic shells]. Tr. V Vses. konf. po teorii plastin i obolochek [Proc. V Russ. Conf. on Plates and Shells Theory]. Moscow, 1965, pp. 68–72.

Sharaborova E.S. — student, Department of Gas Turbine Power Plants and Renewable Energy, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — A.A. Pozhalostin, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.