УДК 517.9 DOI: 10.18698/2541-8009-2018-8-356

О ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ПРИВОДЯЩИХ К БЕСКОНЕЧНОМУ ДЕСЯТИЧНОМУ РАЗЛОЖЕНИЮ

А.А. Аскерова

iselaskerova@yandex.ru
SPIN-код: 5741-2000

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Представлено полное обоснование того факта, что последовательность чисел, характеризующую иррациональное число, можно заменить эквивалентной последовательностью, приводящей к бесконечному разложению. На основе развитой ранее теории действительных чисел обосновано, что каждому действительному числу можно поставить в соответствие фундаментальную последовательность, которая будет являться его десятичным разложением, и наоборот. Также приведены условия, которым должно соответствовать данное десятичное разложение. Дополнительно рассмотрен вопрос о влиянии рациональности и иррациональности числа на вид его десятичного разложения, а именно о том, что рациональные числа имеют периодическое разложение. Справедливо также и обратное утверждение.

Ключевые слова

Формула, десятичное разложение, последовательность чисел, принципы теории пределов, теория действительных чисел, пространство, бесконечность, признак сходимости

Поступила в редакцию 07.06.2018

Введение. Поскольку все сведения о действительном числе α, а также все необходимое для выполнения операций над α можно извлечь из рассмотрения одной какой-либо последовательности рациональных чисел, принадлежащей классу α, целесообразно уметь выделять из каждого класса одну определенную, возможно более простую последовательность, которая будет служить «полномочным представителем» всего класса, т. е. действительного числа, во всех вопросах, в которых это число встречается [1–3]. В случае рационального числа α такой последовательностью является, например,

$$\alpha, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \ldots$$

Но в случае иррационального числа c мы не имеем в составе класса такой простой последовательности. Ее легко заменить другой, которая приведет нас к бесконечному десятичному разложению α. Покажем сначала, что для любого действительного числа α и любого натурального числа N $(N = 1, 2, 3, \ldots)$ можно разыскать такое целое число M, что будут выполняться неравенства $\dfrac{M}{N} \le \alpha < \dfrac{M+1}{N}$. Рациональные числа M/N будут приближениями α соответственно по недостатку и по избытку с точностью до $1/N$.

Чтобы убедиться в существовании этих приближений к действительному числу $N\alpha$, используем соотношение вида

$$M \le N\alpha < M+1,$$

где M — целое число, следовательно, $\frac{M}{N} \le \alpha < \frac{M+1}{N}$.

Легко заметить, что при заданном N число M/N, дающее приближение α с точностью до $1/N$ по недостатку, определено единственным образом. В самом деле, если $M' \ne M$, то либо $M' < M$ и тогда $\frac{M'}{N} \le \frac{M-1}{N}$, либо $M' > M$ и тогда $\frac{M'}{N} \ge \frac{M+1}{N}$. В каждом из этих случаев неравенства $\frac{M'}{N} \le \alpha$ и $\frac{M'+1}{N} > \alpha$ не могут быть выполнены одновременно.

Заметим, что приближение по недостатку является наибольшим из чисел вида m/N (m — целое), не превосходящих α, а приближение по избытку — наименьшим из чисел того же вида, превышающих α.

Беря последовательно $N_0 = 1$, $N_1 = 10$, $N_2 = 10^2$, ..., $N_n = 10^n$, ..., будем получать приближения по недостатку вида $r_0 = M_0$, $r_1 = \frac{M_1}{10}$, $r_2 = \frac{M_2}{10^2}$, ..., $r_n = \frac{M_n}{10^n}$ и т. д. Очевидно, последовательность $\left\{ r_n = \frac{M_n}{10^n} \right\}$ является фундаментальной и притом сходящейся к α. В самом деле,

$$\left| r_n - \alpha \right| = \left| \frac{M_n}{10^n} - \alpha \right| = \alpha - \frac{M_n}{10^n} < \frac{M_n + 1}{10^n} - \frac{M_n}{10^n} = \frac{1}{10^n},$$

что может быть сделано менее любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших значениях ε. Таким образом, последовательность $\left\{ \frac{M_n}{10^n} \right\}$ входит в класс α.

Будем теперь считать α положительным числом. Тогда и числа $M_k \ge 0$. Запишем число $M_k / 10^k$ в десятичной системе счисления:

$$r_k = \frac{M_k}{10^k} = \alpha_p \alpha_{p-1} \ldots \alpha_0,\ \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k,$$

где α_i и β_i — целые числа, заключающиеся между 0 и 9 (включительно), т. е. цифры, и вся запись обозначает, что

$$r_k = \alpha_p \cdot 10^p + \alpha_{p-1} \cdot 10^{p-1} + \ldots + \alpha_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\beta_k}{10^k}.$$

Покажем, что число r_{k+1} будет записываться с помощью тех же самых цифр с присоединением еще одной цифры, а именно β_{k+1} на $k+1$ месте после запятой:

$$r_{k+1} = \alpha_p \alpha_{p-1} \dots \alpha_0,\ \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \beta_{k+1} = r_k + \frac{\beta_k + 1}{10^k + 1}.$$

Действительно, с одной стороны,

$$r_k = \frac{M_k}{10^k} = \frac{10M_k}{10^{k+1}},$$

и так как $r_k \le \alpha$, а с другой стороны, $r_{k+1} = \dfrac{M_{k+1}}{10^{k+1}}$ — наибольшее из чисел вида $\dfrac{M}{10^{k+1}}$, не превосходящих α, поэтому

$$\frac{10M_k}{10^{k+1}} \le \frac{M_{k+1}}{10^{k+1}},\ r_k = \frac{M_k}{10^k} \le \frac{M_{k+1}}{10^{k+1}} = r_{k+1.}.$$

Но далее:

$$\frac{M_{k+1}}{10^k} = \frac{10(M_k + 1)}{10^{k+1}} > \alpha,$$

и так как $\dfrac{M_{k+1} + 1}{10^{k+1}}$ — наименьшее из чисел вида $\dfrac{M}{10^{k+1}}$, превосходящих α, то

$$r_{k+1} < \frac{M_{k+1} + 1}{10^{k+1}} \le \frac{10(M_k + 1)}{10^{k+1}} = \frac{M_k + 1}{10^k} = r_k + \frac{1}{10^k}.$$

Итак,

$$r_k \le r_{k+1} \le r_k + \frac{1}{10^k},$$

поэтому

$$0 \le r_{k+1} - r_k = \frac{M_{k+1}}{10^{k+1}} - \frac{M_k}{10^k} = \frac{M_{k+1} - 10M_k}{10^{k+1}} < \frac{1}{10^k} = \frac{10}{10^{k+1}}.$$

Но из того, что

$$0 \le \frac{M_{k+1} - 10M_k}{10^{k+1}} < \frac{10}{10^{k+1}},$$

следует, что целое число $M_{k+1} - 10M_k$ неотрицательно и не превосходит 9. Поэтому оно выражается некоторой цифрой β_{k+1}, т. е.

$$r_{k+1} - r_k = \frac{M_{k+1} - 10M_k}{10^{k+1}} = \frac{\beta_{k+1}}{10^{k+1}};$$

$$r_{k+1} = r_k + \frac{\beta_{k+1}}{10^{k+1}} = \alpha_p \cdot 10^p + \dots + \alpha_0 + \frac{\beta_1}{10} + \dots + \frac{\beta_k}{10^k} + \frac{\beta_{k+1}}{10^{k+1}} = \alpha_p \dots \alpha_0, \beta_1 \dots \beta_k \beta_{k+1},$$

что и требовалось доказать.

Итак, показано, что в классе, определяющем любое действительное число α (иррациональное или рациональное), существует последовательность $\{r_k\}$ вида

$$\alpha_p\ldots\alpha_0;\ \alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1;\ \alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\beta_2;\ \alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\beta_2\ldots\beta_k;\ \ldots$$

Таким образом, исходя из понятия действительного числа как класса эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей рациональных чисел, можно прийти к десятичному разложению α. Последнее полностью определяет собой α, поскольку представляет собой фундаментальную последовательность рациональных чисел, которая принадлежит классу α и только этому классу. И наоборот, по заданному α его десятичное разложение определяется указанным выше приемом единственным образом.

Отметим, что десятичное разложение числа α должно удовлетворять следующему условию: цифры разложения не должны быть все девятками (начиная с некоторой из них). Действительно, пусть какая-либо из цифр $\beta_k = 9$, и соответствующее приближение к α с точностью до $1/10^k$ по избытку есть

$$r_k + \frac{1}{10^k} = \alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_k + \frac{1}{10^k} = r.$$

Если и следующая цифра $\beta_{k+1} = 9$, то приближение α с точностью до $1/10^{k+1}$ по избытку

$$r_{k+1} + \frac{1}{10^{k+1}} = \alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_k\beta_{k+1} + \frac{1}{10^{k+1}} =$$
$$= \alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_k + \frac{9}{10^{k+1}} + \frac{1}{10^{k+1}} = \alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_k + \frac{1}{10^k} = r.$$

Итак, в том случае, когда $\beta_k = \beta_{k+1} = 9,$ все приближения α по избытку с точностью до $1/10^k,\ 1/10^{k+1},\ \ldots$ равны одному и тому же числу

$$r = \alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_k + \frac{1}{10^k} = \frac{\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_k + 1}{10^k} = \frac{N}{10^k},$$

где N — целое число. Но тогда последовательность $r,\ r,\ r,\ \ldots$ входит в класс α и, следовательно, α совпадает с $r = N/10^k$. В этом случае приближение к α с точностью до $1/10^k$ по недостатку должно равняться $N/10^k = r$, т. е. самому числу α. Но это противоречит тому, что приближением числа α с точностью до 10^{-k} по недостатку является число $\alpha_p\ldots\alpha_0, \beta_1\ldots\beta_k = r - 10^{-k}$. Таким образом, видно, что десятичное разложение числа α не может иметь периодом цифру 9. Покажем, что всякое разложение вида $\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots,$ не имеющее цифру 9 периодом, является десятичным разложением определенного действительного числа α. В самом деле, последовательность

$$\alpha_p\ldots\alpha_0;\ \alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1;\ \alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\beta_2;\ \alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\beta_2\ldots\beta_k;\ \ldots$$

является фундаментальной, так как

$$\left|\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n\ldots\beta_m-\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n\right|=0,\ \underbrace{0\ldots0}_{n}\beta_{n+1}\ldots\beta_m\le$$

$$\le 0,\ \underbrace{0\ldots0}_{n}9\ldots9<0,\ \underbrace{0\ldots0}_{n}1=\frac{1}{10^n}$$

и, следовательно,

$$\left|\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n\ldots\beta_m-\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n\right|<\varepsilon,$$

если $m>n$ и $\frac{1}{10^n}<\varepsilon$ (т. е. $n>\lg\frac{1}{\varepsilon}$).

Предположим, что α — класс, содержащий данную последовательность. Так как

$$\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n\ldots\beta_m\ge\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n$$

при всех $m\ge n$, то и

$$\alpha\ge\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n.$$

Однако если $\beta_{n+1}\ne 9$, где $n_1>n$, то

$$\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n\ldots\beta_m<\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \underbrace{\beta_1\ldots\beta_n9\ldots9}_{m},$$

откуда

$$\alpha\le\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n9\ldots9<\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n+10^{-n}.$$

Мы видим таким образом, что при любом n

$$\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n\le\alpha<\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n+10^{-n}.$$

Но это и значит, что $\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n$ представляет приближение α с точностью до 10^{-n} по недостатку, т. е. $\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n\ldots$ является десятичным разложением числа α.

Для случая, когда цифра 9 является периодом десятичного разложения, заметим, что разложение такого рода, конечно, также представляет собой фундаментальную последовательность и, следовательно, определяет собой некоторое действительное число α. Добавляя к каждому из чисел $\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_n$ число 10^{-n} ($\beta_n=9$, при $n\ge k$), мы получим последовательность, эквивалентную исходной, и, следовательно, определяющую то же самое число α. Последовательность, полученная таким образом, имеет вид $r,\ r,\ r,\ \ldots$, где

$$r=\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_k+10^{-k},$$

поэтому

$$\alpha=r=\frac{N}{10^k}=\frac{\alpha_p\ldots\alpha_0,\ \beta_1\ldots\beta_k+1}{10^k}.$$

Итак, в этом случае имеем последовательность:

$$\alpha_p...\alpha_0;\ \alpha_p...\alpha_0,\ \beta_1;\ ...;\ \alpha_p...\alpha_0,\ \beta_1...\beta_{k-1};\ \alpha_p...\alpha_0,\ \beta_1...\beta_{k-1}9;\ \alpha_p...\alpha_0,\ \beta_1...\beta_{k-1}99;...$$

которую можно символически записать так: $\alpha_p...\alpha_0,\ \beta_1...\beta_{k-1}999...9...$. Она представляет собой число α, так как принадлежит классу α. Однако она не совпадает с той последовательностью, которую мы называли десятичным разложением числа α и которая имеет здесь вид

$$\alpha_p...\alpha_0,\ \beta_1...(\beta_{k-1}+1)00...$$

В самом деле,

$$\alpha = r = \frac{\alpha_p...\alpha_0,\ \beta_1...\beta_{k-1}9+1}{10^k} = \frac{\alpha_p...\alpha_0,\ \beta_1...(\beta_{k-1}+1)0}{10^k} = \frac{\alpha_p...\alpha_0,\ \beta_1...(\beta_{k-1}+1)}{10^{k-1}}.$$

Остановимся на вопросе о том, как сказывается рациональность или иррациональность числа α на виде его десятичного разложения.

1. Если r — рациональное число, то его десятичное разложение необходимо периодическое, т. е. оно имеет вид

$$a_p...a_0, b_1...b_{k-1}c_1...c_q c_1...c_q...$$

2. Каждое α, заданное периодическое десятичное разложение есть разложение некоторого рационального числа, а именно

$$a_p...a_0,\ b_1...b_{k-1}c_1...c_q c_1...c_q... =$$
$$= \frac{a_p...a_0,\ b_1...b_{k-1}c_1...c_q - a_p...a_0,\ b_1...b_{k-1}}{\underbrace{9...9}_{q}\underbrace{0...0}_{k-1}}.$$

Отсюда следует, что десятичное разложение действительного числа α будет периодическим или непериодическим, в зависимости от того, будет ли α рациональным или иррациональным. Первая половина этого утверждения следует из факта 1; вторая половина — из факта 2.

3. Последовательность вида $\alpha_p...\alpha_0, \beta_1\beta_2...\beta_k$ полностью характеризуется тем, что ее члены

$$\alpha_p...\alpha_0;\ \alpha_p...\alpha_0, \beta_1;\ \alpha_p...\alpha_0, \beta_1\beta_2;\ \alpha_p...\alpha_0, \beta_1\beta_2...\beta_k;\ ...$$

представляют приближения числа α по недостатку с точностью до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, ..., $\frac{1}{10^k}$, ... Иными словами, $\alpha_p...\alpha_0, \beta_1...\beta_k \le \alpha < \alpha_p...\alpha_0, \beta_1...\beta_k + 10^{-k}$.

Эта специальная последовательность и есть десятичное разложение числа α.

Все сведения о действительном числе α можно получить из рассмотрения любой последовательности, принадлежащей классу α, в частности, из рассмотрения десятичного разложения. Вот почему десятичное разложение числа α может заменять собой весь класс и даже лежать в основе определения действительного числа.

Здесь, обрывая бесконечное десятичное разложение на том или ином знаке, получаем числа меньшие, чем заданное, но все более и более близкие к заданному. Это выясняется, разумеется, на примерах. Например, если

$$\frac{1}{3} = 0,333...,$$

то получаем

$$0,3 = \frac{3}{10},\ \ 0,33 = \frac{33}{100},\ \ 0,333 = \frac{333}{1000},...,$$

причем

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30},\ \ \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300},\ \ \frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1}{3000},\ \ ...,$$

и т. д.

Отметим, что в некоторых случаях не существует числа (рационального), представляющего квадратный корень из данного положительного числа, во второй — с тем, что в некоторых случаях не существует числа, представляющего длину данного отрезка, если другой данный отрезок принят за единицу длины. Способы решения той и другой задачи обладают, однако, столь большой степенью общности, что позволяют, с присущим математическим операциям автоматизмом, получать одну за другой цифры десятичного разложения искомого результата, совершенно независимо от того, выражается ли он (т. е. квадратный корень или длина отрезка) рациональным числом или не выражается.

Некоторую аналогию с этим обстоятельством обнаруживает операция получения десятичной дроби, равной данному рациональному числу $r = m/n$ (m и n — целые числа). Деля m на n и снося к остатку каждый раз по нулю (после того как исчерпались все цифры делимого), получаем одну за другой цифры десятичного разложения, совершенно независимо от того, существует ли десятичная дробь конечная, равная m/n, или же такой дроби не существует. Именно эта операция и дает первый повод для введения бесконечного десятичного разложения рационального числа r как выражения, заменяющего собой конечную десятичную дробь в том случае, когда такой дроби (равной r) не существует. Но указав на сходство прежней арифметической и новых — алгебраической и геометрической — задач, необходимо ясно осознать и их различие. В арифметической задаче речь шла о том, чтобы дать иное выражение, иную запись для вполне определенного, заранее известного объекта $r = m/n$. В поставленной задаче речь идет о том, чтобы на основании постепенно развертывающейся записи решения задачи, записи, внешне не отличимой от уже допущенных ранее бесконечных десятичных разложений (периодических), прийти к представлению об этом решении, заранее неизвестном и не определявшемся.

Чтобы извлечь из десятичных разложений все, что они могут дать для введения иррациональных чисел, примем во внимание следующие факты.

1. Все арифметические операции над рациональными числами и сравнение рациональных чисел между собой по величине можно осуществлять, пользуясь одними только десятичными разложениями этих чисел. Эти десятичные разложения можно считать во всех случаях бесконечными, что, однако, не мешает при фактических выкладках пользоваться лишь конечным числом цифр каждого разложения, отбрасывая все цифры, начиная с некоторого места и, таким образом, оперировать лишь над конечными десятичными дробями, представляющими приближения к данным числам. Такой образ действий приводит к взгляду на десятичное разложение числа как на своего рода склад, где в величайшем порядке хранятся приближения этого числа по недостатку, с точностью до 1, $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots$

2. То обстоятельство, что бесконечное разложение числа (рационального) является всегда периодическим, не играет существенной роли в использовании этих разложений. Это значит, прежде всего, что сами правила арифметических операций над десятичными разложениями не требуют знания периода и не используют факта периодичности разложений. Значение этого обстоятельства вытекает из того, что если среди рациональных чисел встречаются числа, разложения которых обладают малой длиной периода $\left[\frac{1}{3} = 0,(3),\ \frac{1}{9} = 0,(1),\ \frac{1}{11} = 0,(09), \ldots\right]$, то среди них же встречаются и такие, для которых длина периода десятичного разложения может быть сколь угодно большой:

$$\left[\frac{1}{7} = 0,(142857),\ \frac{1}{13} = 0,(076923),\ \frac{1}{17} = 0,(0588235294117647), \ldots\right].$$

Существуют рациональные числа, периоды которых содержат сотни, тысячи и миллионы цифр.

Заключение. Изученные основные принципы теории пределов характеризуют, каждый в отдельности, одно и то же свойство множества действительных чисел, а именно свойство *непрерывности*. Присоединяя к рациональным числам иррациональные числа, определяемые им посредством сечений, производимых на множестве рациональных чисел, доказано, что расширенное таким образом множество чисел — множество действительных чисел — уже обладает свойством, вполне аналогичным свойству непрерывности прямой.

Литература

[1] Сидняев Н.И., Крылов Д.А. *Непрерывность. Бесконечно малые и бесконечно большие функции*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 38 с.

[2] Сидняев Н.И., Невский Ю.А., Садыхов Г.С. *Бесконечно малые и бесконечно большие: теория и практика*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, 24 с.

[3] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*. Москва, Ленинград, Изд-во технико-теоретической литературы, 1950, 399 с.
[4] Сидняев Н.И., Гордеева Н.М., Попушина Е.С., Рыбдалова О.Д. *Руководство к решению задач по векторному анализу*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, 51 с.
[5] Сидняев Н.И., Соболев С.К. Механизмы совершенствования математического образования в техническом вузе. *AlmaMater (Вестник высшей школы)*, 2015, № 6, с. 5–14.
[6] Сидняев Н.И., Томашпольский В.Я. О математике, математиках и кафедре «Высшая математика». Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 258 с.
[7] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1. Москва, Физмалит, 2006, 660 с.
[8] Аскерова А.А. О принципах теории пределов в классическом изложении. *Политехнический молодёжный журнал*, 2018, № 3(20). URL: http://ptsj.ru/catalog/math/compmath/275.html.
[9] Смирнов В.И. *Курс высшей математики*. Т. 1. Санкт-Петербург, БХВ-Петербург, 2008, 624 с.
[10] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. *Сборник задач по математическому анализу*. Т. 1. Москва, Физматлит, 2003, 362 с.
[11] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа*. Ч. 1. Москва, Физматлит, 2005, 648 с.

Аскерова Айсель Агасафовна — студентка кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Сидняев Николай Иванович, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация.

ON THE INTERCHANGEABILITY OF SEQUENCES LEADING TO AN INFINITE DECIMAL DECOMPOSITION

A.A. Askerova

iselaskerova@yandex.ru
SPIN-code: 5741-2000

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article presents a complete justification for the fact that a sequence of numbers characterizing an irrational number can be replaced by an equivalent sequence leading to infinite decomposition. Based on the previously developed theory of real numbers, it is justified that to each real number can be associated with a fundamental sequence that will be its decimal decomposition, and vice versa. The conditions that a given decimal decomposition must meet are also given. In addition, the question of the influence of the rationality and irrationality of a number on the form of its decimal decomposition is considered, namely, that rational numbers have a periodic decomposition. The converse is also true.

Keywords

Formula, decimal decomposition, sequence of numbers, principles of the theory of limits, theory of real numbers, space, infinity, test of convergence

Received 07.06.2018

References

[1] Sidnyaev N.I., Krylov D.A. Nepreryvnost'. Beskonechno malye i beskonechno bol'shie funktsii [Continuity. Infinitely large and infinitely small functions]. Moscow, Bauman Press, 2014, 38 p.

[2] Sidnyaev N.I., Nevskiy Yu.A., Sadykhov G.S. Beskonechno malye i beskonechno bol'shie: teoriya i praktika [Infinitely small and infinitely large: theory and practice]. Moscow, Bauman Press, 2015, 24 p.

[3] Natanson I.P. Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy [Theory of function of real variable]. Moscow, Leningrad, Izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury publ., 1950, 399 p.

[4] Sidnyaev N.I., Gordeeva N.M., Popushina E.S., Rybdalova O.D. Rukovodstvo k resheniyu zadach po vektornomu analizu [Guidance to solving problems of vector analysis]. Moscow, Bauman Press, 2015, 51 p.

[5] Sidnyaev N.I., Sobolev S.K. Mechanisms for improvement of mathematical education in technical university. *AlmaMater (Vestnik vysshey shkoly)* [Alma Mater (High School Herald)], 2015, no. 6, pp. 5–14.

[6] Sidnyaev N.I., Tomashpol'skiy V.Ya. O matematike, matematikakh i kafedre "Vysshaya matematika" [On mathematics, mathematicians and "Advances mathematics" academic chair]. Moscow, Bauman Press, 2014, 258 p.

[7] Fikhtengol'ts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 1 [Course of differential and integral calculus. Vol. 1]. Moscow, Fizmalit publ., 2006, 660 p.

[8] Askerova A.A. Classical ideas about principles of the theory of limits. *Politekhnicheskiy molodezhnyy zhurnal* [Politechnical student journal], 2018, no. 3(20). Available at: http://ptsj.ru/catalog/math/compmath/275.html.

[9] Smirnov V.I. Kurs vysshey matematiki. T. 1 [Advanced mathematics course. Vol. 1]. Sankt-Petersburg, BKhV-Peterburg publ., 2008, 624 p.
[10] Kudryavtsev L.D., Kutasov A.D., Chekhlov V.I., Shabunin M.I. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu. T. 1 [Problem book on mathematical analysis. Vol. 1]. Moscow, 2003, 362 p.
[11] Il'in V.A., Poznyak E.G. Osnovy matematicheskogo analiza. Ch. 1 [Fundamentals of mathematical analysis. P. 1]. Moscow, Fizmatlit publ., 2005, 648 p.

Askerova A.A. — Bachelor's Degree student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — N.I. Sidnyaev, Doctor Sc. (Eng.), Professor, Head of Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.