УДК 004.925.86 DOI: 10.18698/2541-8009-2018-9-371

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КРИВЫХ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

М.Р. Гусев

M1chaelG@mail.ru
SPIN-код: 5201-6915

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Поскольку развитие технологии изготовления поверхностей требует более детального развития вопросов конструирования кривых линий, перед современным инженером встает задача точного построения моделей технических объектов произвольной формы. В статье рассмотрен способ решения этой задачи с помощью освоения систем автоматизированного проектирования и предлагаемых ими инструментов для построения математических кривых. В качестве примеров рассмотрены одни из наиболее часто встречающихся в технике линий, такие как циклоидальные кривые, спираль Архимеда и синусоида. Для каждой линии указана сфера ее применения и приведен способ моделирования детали, содержащей эту кривую, в системе автоматизированного проектирования.

Ключевые слова

Кривые линии, системы автоматизированного проектирования, моделирование, трансцендентные кривые, синусоида, спираль Архимеда, циклоидальные кривые, моделирование деталей сложной формы

Поступила в редакцию 08.06.2018

Введение. Наблюдая за историей развития науки, можно заметить постоянное усложнение зависимостей и форм, которые человек использует в технике. В этом нет ничего удивительного, поскольку в процессе эволюции научного познания человеком открывалось все большее количество законов, описывающих окружающий мир. В большинстве своем эти законы имеют сложный, нелинейный характер. Представляя математическое описание многих из них графически, мы получаем множества точек, образующих кривые линии, которые повсеместно используются в технике.

Определение и классификация кривых. Кривой линией называют траекторию движущейся в пространстве точки. Кривые, все точки которых принадлежат одной плоскости, называют плоскими, остальные — пространственными [1]. Способы образования линий могут быть различными: они могут быть заданы графически и аналитически, т. е. уравнением [2]. Это определяет разделение кривых на графические и математические. Однако в инженерной практике важна задача точного построения линий, поэтому интерес представляют математические кривые, определяемые уравнениями. Алгебраические кривые описываются многочленами вида $f(x, y) = 0$. Примером алгебраической кривой является парабола: $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. Трансцендентные кривые описываются уравнениями с трансцендентными функциями $\sin x$, e^x, $\ln x$ и т. д. Примером трансцендентной кривой служит астроида: $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$.

Замечательные свойства кривых широко применяют в разнообразных механизмах, строительных конструкциях, оптике, судо-, авто- и авиастроении, архитектуре, при проектировании путей сообщения, в радиоэлектронике [4]. Их также используют в моделировании и разметочном деле, в теории машин и механизмов, при построении многокомпонентных систем и т. д.

Для построения точных кривых линий можно применять различные системы автоматизированного проектирования. Практически во всех современных системах автоматизированного проектирования есть возможность задания кривой по уравнению. Благодаря этой функции конструктор, обладающий достаточным опытом работы в сфере 3D-моделирования, может использовать любые математические кривые при проектировании объектов произвольной формы. Рассмотрим некоторые из наиболее примечательных примеров построения и использования кривых в технике.

Синусоида. Одной из самых известных кривых является синусоида — плоская кривая, изображающая изменение тригонометрической функции синуса в зависимости от изменения угла [5]. По закону синуса изменяется значение электрического напряжения в сети, по синусоиде происходят гармонические колебания, к которым относятся электромагнитные колебания любой частоты. В повседневной жизни можно встретить синусоиду в таких технических объектах, как, например, шнек или сверло, профиль которых очерчен по этой кривой. При этом форма синусоиды может видоизменяться в зависимости от соотношения длины волны L и размера $2\pi r$: синусоида является сжатой, когда $L < 2\pi r$, и вытянутой в обратном случае.

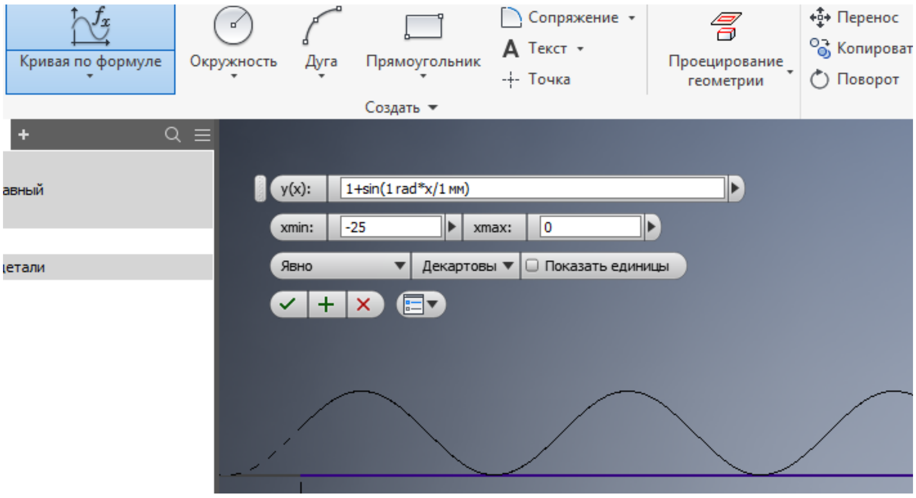
В качестве примера построим в Autodesk Inventor 2018 элементарную деталь, профильный разрез которой выполнен в форме синусоиды (рис. 1) [6]. Весь процесс построения можно свести к трем ключевым шагам:

1) создание на одной из главных плоскостей эскиза синусоиды. Это реализуется выбором команды «Кривая по формуле» и последующим введением уравнения самой кривой: в данном случае в роли уравнения выступает синусоида, сдвинутая наверх относительно оси OX на единицу. Параметр синусоиды пробегает значения от –25 до 0 (рис. 1, *а*);

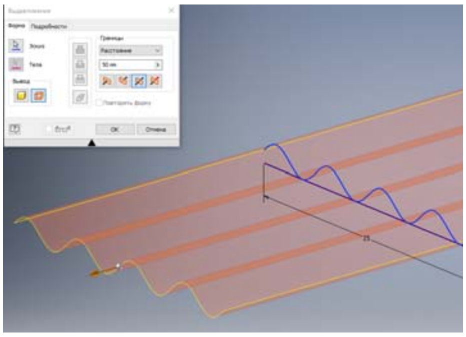
2) выдавливание эскиза на заданное расстояние (рис. 1, *б*);

3) придание полученной поверхности толщины (рис. 1, *в*).

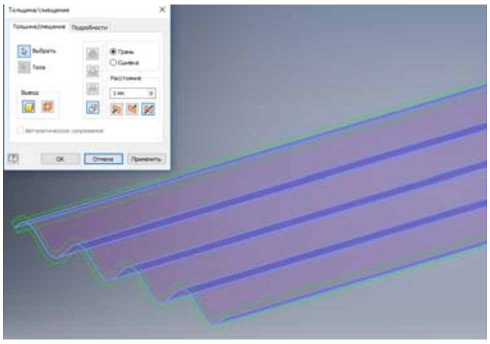
Спираль Архимеда. Еще одной часто применяемой кривой является спираль Архимеда — плоская кривая, которую описывает точка, движущаяся равномерно от центра по равномерно вращающемуся радиусу. В машиностроении спираль Архимеда применяется, например, для сообщения движения в радиальном направлении кулачкам зажимного патрона токарного станка. На тыльной стороне большой конической шестерни нарезаны канавки по спирали Архимеда. В канавки входят выступы кулачков, которые также выполнены по спирали. При вращении шестерни кулачки будут перемещаться в радиальном направлении [7].



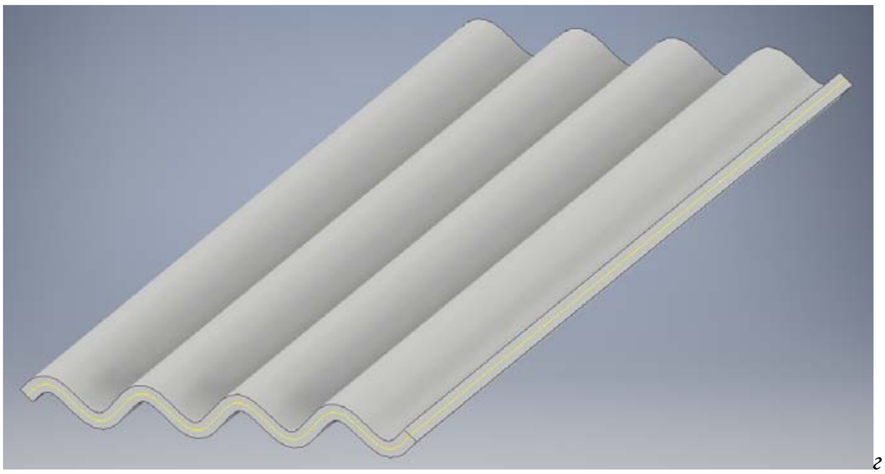
а



б



в

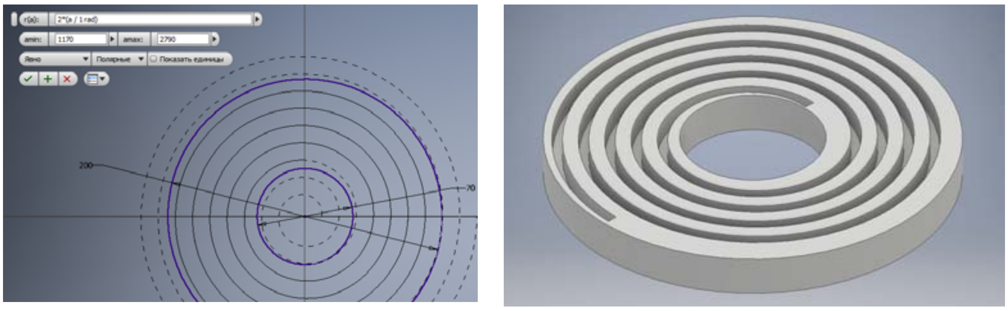


г

Рис. 1. Построение детали с синусоидальным профилем в Autodesk Inventor 2018:

а — создание эскиза кривой по ее уравнению; *б* — выдавливание эскиза; *в* — придание эскизу толщины; *г* — полученная модель

Построим в Autodesk Inventor деталь, схожую с диском, по канавкам которого двигаются кулачки токарного станка (рис. 2). Уравнение спирали Архимеда проще всего записать в полярных координатах, в таком случае оно принимает элементарный вид: $\rho = k\varphi$. Это выражение отражает суть данной спирали — повороту кривой на 2π соответствует смещение $2k\pi$, где k — параметр спирали. Этим уравнением воспользуемся при создании модели. Алгоритм построения в целом остается аналогичным рассмотренному ранее примеру с синусоидальной кривой. Принципиальным отличием является задание уравнения в полярной системе координат и выбор соответствующих желаемому углу поворота значений параметра функции (рис. 2, *а*). После проведения таких операций, как выдавливание контура диска и контура спирали с последующим приданием ей толщины, получаем готовую модель (рис. 2, *б*).



а *б*

Рис. 2. Построение модели диска с нарезанной на нем в форме спирали Архимеда канавкой:

а — задание кривой в полярных координатах; *б* — полученная модель

Помимо токарного станка эту кривую можно встретить, например, на CD- или DVD-дисках, дорожки на которых нанесены именно в форме Архимедовой спирали, или же в обыкновенной ручной мясорубке. Однако применять спираль Архимеда в технике стали задолго до наших дней: еще в III веке до н. э. Архимед на основе этой спирали изобрел винт, который использовался для упрощения трудоемкого процесса подъема воды с одного уровня на другой (рис. 3). В наше время винт Архимеда находит применение в шнекороторных вездеходах, обладающих благодаря своему движителю исключительной проходимостью в условиях бездорожья (рис. 4).

Рис. 3. Винт Архимеда

Циклоидальные кривые. В технике также нередко можно встретить еще один класс кривых — циклоидальные кривые. К ним относятся три типа линий: циклоида, эпициклоида и гипоциклоида.

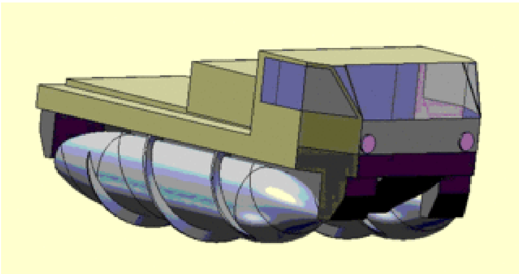


Рис. 4. Шнекороторный вездеход

Циклоидой называют кривую, которую описывает точка, лежащая на окружности, которая катится по прямой без проскальзывания. При этом точка может лежать не только на радиусе окружности: внутренняя точка катящегося круга описывает траекторию, называемую «укороченной циклоидой», подобно этому точка вне круга описывает «удлиненную циклоиду» (рис. 5) [8].

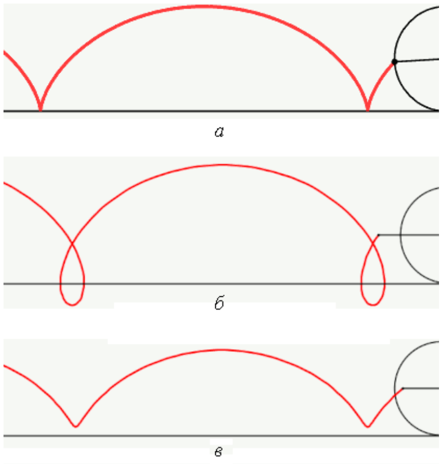


Рис. 5. Виды циклоиды:

а — циклоида; *б* — удлиненная циклоида; *в* — укороченная циклоида

Эпициклоида — это кривая, описываемая точкой, лежащей на окружности, которая катится по направляющей окружности снаружи без проскальзывания. Гипоциклоида — это кривая, описываемая точкой, лежащей на окружности, которая катится по направляющей окружности внутри без проскальзывания.

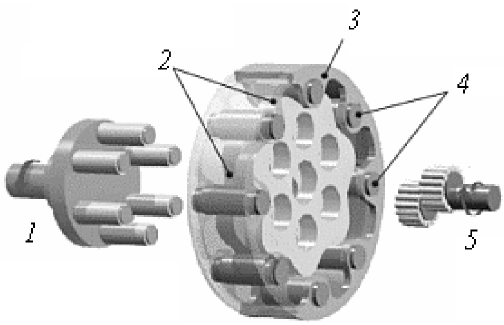


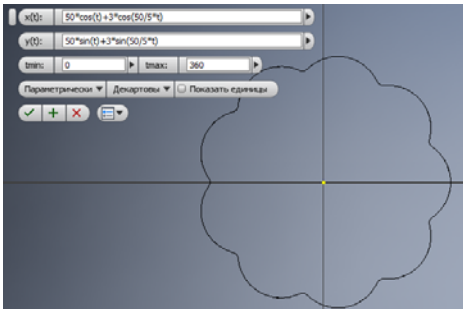
Рис. 6. Редуктор с циклоидальным зацеплением:

1 — выходной вал с пальцами и втулками; *2* — два оппозитно расположенных сателлита; *3* — обойма (цевочное колесо); *4* — цевки; *5* — входной эксцентрический вал с роликами

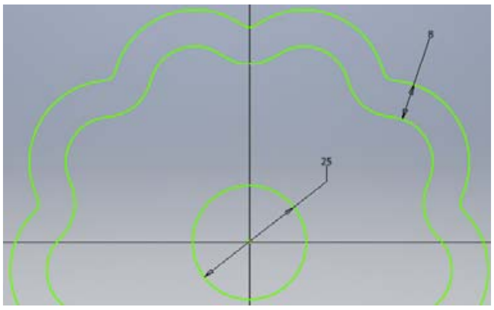
Циклоидальные кривые широко применимы в строительстве и производстве. Так, часто можно встретить детали с циклоидальным зацеплением, при котором профили зубьев колес очерчены по участкам циклоид, эпи- и гипоциклоид. При таком зацеплении зубья изнашиваются меньше, чем, например, при эвольвентном зацеплении, так как выпуклая головка зуба касается вогнутой ножки, что создает более благоприятное распределение удельного давления на площадке касания, чем при эвольвентном зацеплении, когда и головка, и ножка — выпуклые [9]. Этим определяется широкое применение редукторов с циклоидальным зацеплением (рис. 6).

Рассмотрим построение в Autodesk Inventor модели заготовки сателлита редуктора (рис. 7), подобного изображенному на рис. 6. Его внешний контур очертим по эпициклоиде, для чего воспользуемся ее уравнениями:

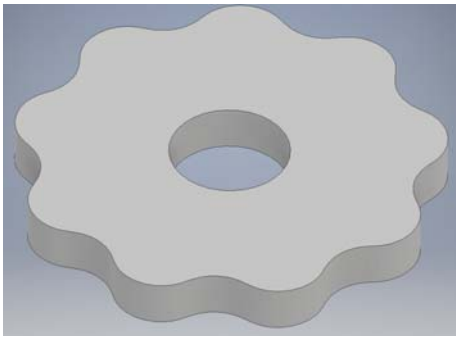
$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\varphi + r\cos\left(\alpha + \dfrac{R+r}{r}\varphi\right); \\ y = (R+r)\sin\varphi + r\sin\left(\alpha + \dfrac{R+r}{r}\varphi\right). \end{cases}$$



а



б



в

Рис. 7. Построение модели сателлита редуктора с циклоидальным зацеплением:

а — задание кривой параметрическим уравнением; *б* — смещение контура эпициклоиды; *в* — полученная модель

В отличие от разобранных выше примеров, на этот раз уравнение кривой необходимо задать не явно, а параметрически (рис. 7, *а*). Чтобы получить желаемую форму сателлита, воспользуемся командой «Смещение» (рис. 7, *б*). После проведения этих операций остается выдавить эскиз на нужное расстояние соответствующей командой и получить готовую модель (рис. 7, *в*).

Использование сателлитов именно такой формы обусловлено целым рядом преимуществ, которые обеспечивает циклоидальное зацепление:

– эффективная передача мощности;

– широкий диапазон преобразования частоты вращения;

– высокая нагрузочная способность;

– большое передаточное отношение;

– меньшие в сравнении с редукторами с эвольвентным зацеплением габариты и вес [10].

Заключение. В современной технике повсеместно применяются детали непростой конфигурации, поэтому с инженерной точки зрения особое значение приобретает задача создания точных моделей деталей сложной формы. В данной работе была на примерах показана роль математических кривых линий и содержащих их объектов в технике, а также рассмотрены способы моделирования таких объектов при помощи систем автоматизированного проектирования.

Литература

[1] Бубенников А.В. *Начертательная геометрия*. Москва, Высшая школа, 1985, 288 с.
[2] Жирных Б.Г., Серегин В.И., Шарикян Ю.Э. *Начертательная геометрия*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, 168 с.
[3] Фролов С.А. *Начертательная геометрия*. Москва, ИНФРА-М, 2010, 285 с.
[4] Левицкий В.С. *Машиностроительное черчение и автоматизация выполнения чертежей*. Москва, Высшая школа, 2000, 422 с.
[5] Баранова Л.А., Панкевич А.П. *Основы черчения*. Москва, Высшая школа, 1982, 351 с.
[6] Трембли Т. *Autodesk Inventor 2012 и Inventor LT 2012. Официальный учебный курс*. Москва, ДМК Пресс, 2012, 352 с.
[7] Боголюбов С.К. *Черчение*. Москва, Машиностроение, 1989, 336 с.
[8] Берман Г.Н. *Циклоида*. Москва, Наука, 1980, 112 с.
[9] Введенский Б.А., ред. *Большая советская энциклопедия*. Т. 46. Москва, Большая Советская Энциклопедия, 1953, 672 с.
[10] Циклоидальный мотор редуктор. URL: http://www.weidepower.com/ru/products/2/19.html (дата обращения 17.05.2018).

Гусев Михаил Рубенович — студент кафедры «Проектирование и технология производства электронной аппаратуры», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Бочарова Ирина Николаевна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Инженерная графика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Куропаткина Ольга Васильевна, старший преподаватель кафедры «Инженерная графика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

MODELLING THE MATHEMATICAL CURVES IN COMPUTER-AIDED DESIGN SYSTEMS

M.R. Gusev

M1chaelG@mail.ru
SPIN-code: 5201-6915

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

Since the development of surface manufacturing technology requires more detailed research of designing the curved lines, the modern engineer faces the problem of the free-form technical objects models precise construction. The article considers the way to solve this problem by means of utilizing the computer-aided design systems and tools to construct the mathematical curves. As an example we examine some of the most frequently encountered lines in engineering, such as the cycloidal curves, the Archimedes' spiral and the sinusoid. For each line, we specify its application area and present a technique of modelling the detail containing this curve in the CAD system.

Keywords

Curved lines, computer-aided design systems, modelling, transcendental curves, sinusoid, Archimedes' spiral, cycloidal curves, modelling complex parts

Received 08.06.2018

References

[1] Bubennikov A.V. Nachertatel'naya geometriya [Descriptive geometry]. Moscow, Vysshaya shkola publ., 1985, 288 p.
[2] Zhirnykh B.G., Seregin V.I., Sharikyan Yu.E. Nachertatel'naya geometriya [Descriptive geometry]. Moscow, Bauman Press, 2015, 168 p.
[3] Frolov S.A. Nachertatel'naya geometriya [Descriptive geometry]. Moscow, INFRA-M publ., 2010, 285 p.
[4] Levitskiy V.S. Mashinostroitel'noe cherchenie i avtomatizatsiya vypolneniya chertezhey [Machine drawing and automation of drawing works]. Moscow, Vysshaya shkola publ., 2000, 422 p.
[5] Baranova L.A., Pankevich A.P. Osnovy chercheniya [Fundamentals of technical drawing]. Moscow, Vysshaya shkola publ., 1982, 351 p.
[6] Tremblay T. Autodesk Inventor 2012 and Inventor LT 2012 Essentials. Sybex, 2011, 400 p. (Russ. ed.: Autodesk Inventor 2012 i Inventor LT 2012. Ofitsial'nyy uchebnyy kurs. Moscow, DMK Press publ., 2012, 352 p.)
[7] Bogolyubov S.K. Cherchenie [Technical drawing]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1989, 336 p.
[8] Berman G.N. Tsikloida [Cycloid]. Moscow, Nauka publ., 1980, 112 p.
[9] Vvedenskiy B.A., ed. Bol'shaya sovetskaya entsiklopediya. T. 46 [Big soviet encyclopedia. Vol. 46]. Moscow, Bol'shaya Sovetskaya Entsiklopediya publ., 1953, 672 p.
[10] Tsikloidal'nyy motor reduktor. Available at: http://www.weidepower.com/ru/products/2/19.html (accessed 17 May 2018).

Gusev M.R. — student, Department of Electronic Equipment Design and Technology, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — I.N. Bocharova, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Engineering Graphics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — O.V. Kuropatkina, Assist. Professor, Department of Engineering Graphics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.