УДК 520 DOI: 10.18698/2541-8009-2018-10-388

ТОЧКИ ЛАГРАНЖА В СИСТЕМЕ МАРС — ФОБОС

А.А. Аскерова iselaskerova@yandex.ru
SPIN-код: 5741-2000

В.А. Столбова valeriestolbova@icloud.com
SPIN-код: 4563-5239

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Работа посвящена нахождению точек Лагранжа (точек либрации) как частного решения ограниченной задачи трех тел. В такой задаче масса одного из тел, составляющих систему, пренебрежимо мала по сравнению с двумя другими, при этом никакие силы, кроме гравитационных, не учитываются. Моделирование задачи осуществляется с помощью принципов классической механики. Исследовано и математически описано расположение данных точек в системе Марс — Фобос. Приведено доказательство расположения треугольных точек либрации с учетом законов гравитационного взаимодействия. Найдены численные значения координат точек либрации для рассматриваемой системы тел. Выполнен обзор вариантов практического применения данной задачи в космических исследованиях.

Ключевые слова

Точки либрации, задача трех тел, гравитационное взаимодействие, небесная механика, космос, Марс, стационарные положения, равновесие

Поступила в редакцию 17.09.2018

Введение. В ограниченной задаче трех тел, одной из основных в небесной механике, рассматривается взаимодействие трех тел (материальных точек), масса одного из которых пренебрежимо мала по сравнению с массой двух других. В такой системе не действуют никакие силы, кроме гравитационных, и существуют пять точек, в которых малое тело будет оставаться неподвижным относительно двух массивных. Это так называемые точки либрации, или точки Лагранжа. Они получили свое название в честь французского математика Жозефа Луи Лагранжа, который первым в 1772 г. привел решение математической задачи, из которой следовало существование этих особых точек.

Три такие точки (L_1, L_2, L_3) находятся на одной линии с притягивающими телами и носят название коллинеарных точек либрации. Еще две (L_4, L_5) образуют с ними равносторонние треугольники — это треугольные точки либрации (рис. 1).

В данной работе рассматриваются Марс и Фобос как массивные тела, гравитационные силы которых действуют на космический аппарат.

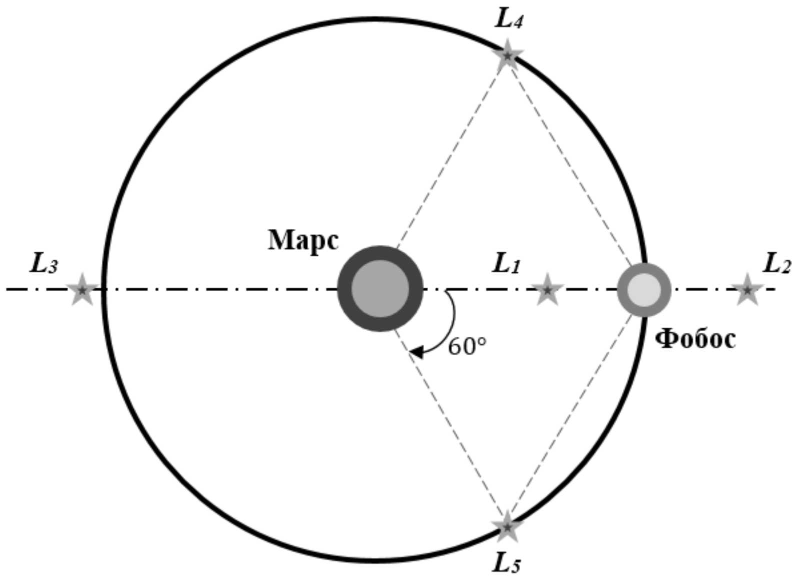

Рис. 1. Расположение точек Лагранжа в системе Марс — Фобос

Расчет координат коллинеарных точек либрации. Для начала найдем центр системы Марс — Фобос (рис. 2).

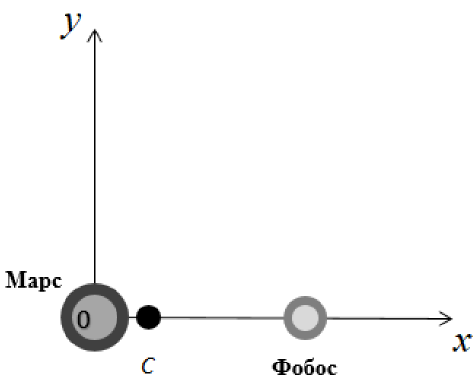

Рис. 2. Система координат

Положение центра масс (центра инерции) системы тел в классической механике определяется следующим образом:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i},$$

где $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра масс; $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор i-го тела системы; m_i — масса i-го тела.

Положим начало координат в центре Марса, тогда уравнение центра масс примет вид

$$\mathbf{r}_c = \frac{M_2\mathbf{R}}{M_1 + M_2},$$

где $\mathbf{R}$ — расстояние от Фобоса до Марса, $R = 1,4d$ (d — диаметр Марса, $d = 6779 \pm 0,4$ км); M_1 — масса Марса, $M_1 = 6,4171 \cdot 10^{23}$ кг; M_2 — масса Фобоса, $M_2 = 1,072 \cdot 10^{16}$ кг.

При подстановке вышеуказанных значений получим

$$R = 9490,6 \pm 0,56 \text{ км}.$$

Подставим в уравнение центра масс:

$$\mathbf{r}_c = \frac{1,072 \cdot 10^{16} \cdot (9490,6 \pm 0,56)}{6,4171 \cdot 10^{23} + 1,072 \cdot 10^{16}} = 1,5858 \cdot 10^{-4} \pm 9,3550 \cdot 10^{-9}.$$

Следовательно, координата центра масс C: $(1,5858 \cdot 10^{-4} \pm 9,3550 \cdot 10^{-9}; 0)$.

В системе координат с началом отсчета в центре масс системы и с осью, направленной от центра масс к менее массивному телу, координаты точек рассчитывают по следующим формулам.

Для L_1, L_2, L_3:

$$r_1 = \left(R\left[1 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}\right]; 0 \right);$$

$$r_2 = \left(R\left[1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}\right]; 0 \right);$$

$$r_3 = \left(-R\left[1 + \frac{5}{12}\alpha\right]; 0 \right);$$

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2}.$$

При подстановке вышеуказанных значений получим

$$\alpha = 1,6705 \cdot 10^{-8}.$$

Следовательно:

$$r_1 = 9473,7783 \pm 0,5590 \text{ км};$$

$$r_2 = 9507,4216 \pm 0,5609 \text{ км};$$

$$r_3 = -9490,6000 \mp 0,5600 \text{ км}.$$

координаты точек либрации L_1, L_2, L_3 на оси Ox.

Исследование расположения треугольных точек либрации. Наличие этих точек и их высокая стабильность расположения обусловливается тем, что силы притяжения со стороны двух массивных тел соотносятся в той же пропорции, что их массы, и таким образом результирующая сила направлена на центр масс системы. Кроме того, геометрия треугольника сил подтверждает, что результирующее ускорение связано с расстоянием до центра масс той же пропорцией, что и для двух массивных тел. Поскольку центр масс является одновременно и центром вращения системы, результирующая сила точно соответствует той, которая нужна для удержания тела в точке Лагранжа в орбитальном равновесии с остальной системой. Данная треугольная конфигурация была обнаружена Лагранжем во время работы над задачей трех тел.

В Солнечной системе устойчивые треугольные точки либрации образованы совместным действием сил тяготения Солнца и наиболее массивной планеты — Юпитера. По наблюдениям астрономов, две группы астероидов (получившие названия «Греки» и «Троянцы») захвачены в окрестностях этих точек и движутся по орбите Юпитера, соответственно опережая его и отставая на 60°. Поэтому треугольные точки либрации также называют троянскими.

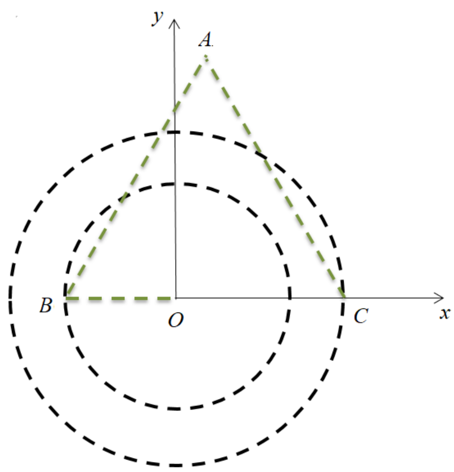

Рис. 3. Схема расположения треугольных точек Лагранжа

Если на основе линии, соединяющей оба тела системы, построить два равносторонних треугольника, две вершины которых соответствуют центрам тел, то точки L_4 и L_5 будут соответствовать положению третьих вершин этих треугольников, расположенных в плоскости орбиты второго тела в 60° впереди и позади него.

Приведем математическое обоснование данного факта.

Есть два небесных тела B и C (в данном примере — Марс и Фобос соответственно), которые движутся вокруг общего центра инерции O по окружности. Радиусы окружности известны — это r_1, расстояние BO, и r_2, расстояние OC (рис. 3). Массы тел B и C — m_1 и m_2 соответственно. Есть третье тело (в данном примере — космический аппарат), не влияющее на движение первых двух, которое попадает с нулевой относительной скоростью в точку A на плоскости орбит, которая находится на одинаковом расстоянии от точки B и от точки C, то есть треугольник ABC — равносторонний. Необходимо доказать, что тело навсегда останется в точке A в таком случае.

Для начала запишем закон всемирного тяготения (закон Ньютона), причем для этого перейдем в подвижную систему координат. Система координат Oxy вращается таким образом, что точки B и C все время остаются на оси Ox. Найдем угловую скорость, с которой в этом случае происходит вращение точек B и C по окружности.

Угловую скорость вращения этой системы координат можно найти исходя из того, что сила, действующая на первую массу (точку B), вычисляется по формуле

$$F=\frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

и сила равна произведению ускорения на массу (по второму закону Ньютона), то

$$F=m_1\omega^2r_1.$$

Точно такая же сила F действует на точку C, поэтому

$$F=m_2\omega^2r_2.$$

Отсюда можно определить угловую скорость:

$$\omega^2=\frac{Gm_2}{r^2r_1},$$

либо

$$\omega^2=\frac{Gm_1}{r^2r_2},$$

где $r=r_1+r_2=BC$.

Теперь выразим r_1 и r_2 через r. Длина r — это сумма r_1+r_2. Известно, что O — это центр инерции, т. е. центр масс для системы B и C, и поэтому r_1 через r можно выразить, как $r_1=\dfrac{m_2r}{m_1+m_2}$, а r_2, таким же образом, $r_2=\dfrac{m_1r}{m_1+m_2}$.

Запишем закон Ньютона во вращающейся системе координат для точки O:

$$m\overline{OA}''=-\frac{Gm_1m}{r^3}\overline{BA}-\frac{Gm_2m}{r^3}\overline{CA}+m\omega^2\overline{OA},$$

где $m\omega^2\overline{OA}$ — переносное ускорение.

Выразим все величины через ω:

$$\frac{Gm_1}{r^2}=\omega^2r_2;\qquad \frac{Gm_2}{r^2}=\omega^2r_1;\qquad \overline{BA}=\overline{BO}+\overline{OA};\qquad \overline{CA}=\overline{CO}+\overline{OA}.$$

Подставим эти выражения в уравнение для ускорения точки A, получим

$$-\frac{m\omega^2r_2}{r}\overline{BO}-\frac{m\omega^2r_2}{r}\overline{OA}-\frac{m\omega^2r_1}{r}\overline{CO}-\frac{m\omega^2r_1}{r}\overline{OA}+m\omega^2\overline{OA}=0,$$

поскольку при сложении $\dfrac{m\omega^2r_2}{r}\overline{OA}$, $\dfrac{m\omega^2r_1}{r}\overline{OA}$ и $m\omega^2\overline{OA}$ взаимно уничтожатся так же, как и $\dfrac{m\omega^2r_2}{r}\overline{BO}$ с $\dfrac{m\omega^2r_1}{r}\overline{CO}$.

То есть, ускорение тела массы m, помещенного в точку A, вершину равностороннего треугольника, равно нулю.

Заметим так же, что есть еще одна точка в вершине равностороннего треугольника, в которой тело с нулевой относительной скоростью будет оставаться в этой точке бесконечно долго. Эта точка находится симметрично данной относительно оси Ox в вершине равностороннего треугольника.

Исходя из геометрического расположения точек L_4, L_5 в вершинах равностороннего треугольника, получим координаты:

$$r_4 = \left(\frac{R}{2}\beta, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right); \; r_5 = \left(\frac{R}{2}\beta, -\frac{R\sqrt{3}}{2}\right),$$

где $\beta = \dfrac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} = 0,99.$

С учетом численных значений для системы Марс — Фобос получим:

$$r_4 = (4697,847 \pm 0,2772; 8219,1007 \pm 0,4849) \text{ км};$$

$$r_5 = (4697,847 \pm 0,2772; -8219,1007 \mp 0,4849) \text{ км}.$$

Точки Лагранжа в космических исследованиях. Лагранжевы точные решения задачи трех тел представляют практический интерес для космической динамики благодаря возможности запуска стационарного спутника в треугольные точки либрации. Наиболее широкие возможности для наблюдений предоставляют точки L_1, L_2 систем Солнце — Земля и Земля — Луна. В системе Солнце — Земля точка L_1 может быть идеальным местом для размещения космической обсерватории для наблюдения Солнца, которое в этом месте никогда не перекрывается ни Землей, ни Луной. Первым аппаратом, работавшим вблизи этой точки, был запущенный в августе 1978 г. аппарат ISEE-3. На такой же орбите с мая 1996 года работает аппарат SOHO. В системе Земля — Луна точка L_1 может стать идеальным местом для строительства космической пилотируемой орбитальной станции, которая позволила бы добраться до Луны с минимальными затратами топлива и стать ключевым узлом грузового потока между Землёй и её спутником.

Точка L_2 в системе Солнце — Земля является идеальным местом для строительства орбитальных космических обсерваторий и телескопов. Поскольку объект в точке L_2 способен длительное время сохранять свою ориентацию относительно Солнца и Земли, производить его экранирование и калибровку становится гораздо проще. В окрестностях этой точки уже находятся аппараты американского и европейского космических агентств: WMAP, «Планк», «Гершель» и Gaia, а в 2019 г. к ним присоединятся «Джеймс Уэбб» и «Спектр-РГ». Точка L_2 в системе Земля — Луна может быть использована для обеспечения спутниковой связи с объектами на обратной стороне Луны, а также быть удобным местом для размещения заправочной станции для обеспечения грузопотока между

Землей и Луной. Кроме того, обнаружены троянские астероиды Сатурна, Венеры, Нептуна, Марса и Урана.

Заключение. Таким образом, в данной работе получены координаты для точек Лагранжа как частные решения ограниченной задачи трех тел на примере системы Марс-Фобос. Особый интерес для астрономических исследований представляют треугольные точки либрации, так как космический аппарат, помещенный в одну из этих точек, будет находиться в устойчивом положении равновесия, поэтому отдельного внимания заслуживает метод математического моделирования расположения этих точек с учетом физических законов взаимодействия тел системы. Именно эти точки либрации предоставляют потенциальную возможность для получения новых сведений о планете Марс и ее спутниках, аналогично существующим исследованиям для околоземных областей.

Литература

[1] Белецкий В.В. *Очерки о движении космических тел.* Москва, Наука, 1977, 432 с.

[2] Маркеев А.П. *Точки либраций в небесной механике и космодинамике.* Москва, Наука, 1978, 312 с.

[3] Дубошин Н.Г. *Небесная механика. Аналитические и качественные методы.* Москва, Наука, 1978, 456 с.

[4] Малявкин Г.П. О влиянии гравитационного поля планеты на характеристическую скорость межорбитального перелета. *Вестник СПБГУ. Прикладная математика. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2015, № 4, с. 88–98.

[5] Шиманчук Д.В. Моделирование управляемого поступательно-вращательного движения небесного тела в окрестности коллинеарной точки либрации L_1. *Вестник СПБГУ. Прикладная математика. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2017, т. 13, № 2, с. 147–166.

[6] Федоренко Ю.В., Аксенов С.А. Описание движения космического аппарата с помощью дифференциальных уравнений. *Новые информационные методы в автоматизированных системах*, 2014, № 17, с. 258–271.

[7] Белецкий В.В. *Движение искусственного спутника относительно центра масс.* Москва, Наука, 1965, 416 с.

[8] Белецкий В.В. *Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле.* Москва, Изд-во МГУ, 1975, 308 с.

[9] Маршал К., ред. *Задача трех тел.* Москва-Ижевск, ИКИ, 2004, 640 с.

[10] Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. *Основы механики космического полета.* Москва, Наука, 1990. 445 с.

Аскерова Айсель Агасафовна — студентка кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Столбова Валерия Артуровна — студентка кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Баркин Михаил Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

LAGRANGIAN POINTS IN MARS-PHOBOS SYSTEM

A.A. Askerova iselaskerova@yandex.ru
SPIN-code: 5741-2000

V.A. Stolbova valeriestolbova@icloud.com
SPIN-code: 4563-5239

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper is devoted to identification of Lagrange points (libration points) as a particular solution of restricted three-body problem. In such a problem, mass of one of the bodies, composing the system, is negligible in comparison to the other two, while no forces other than gravitational forces are taken into account. Problem simulation is carried out with the use of the principles of classical mechanics. Location of these points in the Mars-Phobos system is analyzed and mathematically described. Proof of location of triangular libration points, taking into account the laws of gravitational interaction, is presented. Numerical values of coordinates of libration points for the considered system of bodies are found. Review of practical applications of this problem in aerospace research is performed.

Keywords

Libration points, three-body problem, gravitational interaction, gravitational astronomy, aerospace, Mars, stationary position, balance state

Received 17.09.2018

References

[1] Beletskiy V.V. Ocherki o dvizhenii kosmicheskikh tel [Review about movement of space bodies]. Moscow, Nauka publ., 1977, 432 p.

[2] Markeev A.P. Tochki libratsiy v nebesnoy mekhanike i kosmodinamike [Libration points in celestial mechanics and space dynamics]. Moscow, Nauka publ., 1978, 312 p.

[3] Duboshin N.G. Nebesnaya mekhanika. Analiticheskie i kachestvennye metody [Celestial mechanics. Analytical and qualitative methods]. Moscow, Nauka publ., 1978, 456 p.

[4] Malyavkin G.P. On the influence of the planet's gravitational field on the characteristic velocity of an interorbital transfer. *Vestnik SPBGU. Prikladnaya matematika, Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya* [Vestnik of Saint-Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes], 2015, no. 4, pp. 88–98.

[5] Shimanchuk D.V. Modeling of controlled coupled attitude-orbit motion in the neighborhood of collinear libration point L1. *Vestnik SPBGU. Prikladnaya matematika, Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya* [Vestnik of Saint-Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes], 2017, vol. 13, no. 2, pp. 147–166.

[6] Fedorenko Yu.V., Aksenov S.A. Description of the spacecraft movement by means of differential equations. *Novye informatsionnye metody v avtomatizirovannykh sistemakh*, 2014, no. 17, pp. 258–271.

[7] Beletskiy V.V. Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no tsentra mass [Movement of artificial satellite relative to its center of mass]. Moscow, Nauka publ., 1965, 416 p.

[8] Beletskiy V.V. Dvizhenie sputnika otnositel’no tsentra mass v gravitatsionnom pole [Satellite movement relative to its center of mass in gravity field]. Moscow, MSU publ., 1975, 308 p.
[9] Marchal Ch., ed. The three-body problem. Elsevier Science, 1990. 583 p. (Russ. ed.: Zadacha trekh tel. Moscow-Izhevsk, IKI publ., 2004, 640 p.)
[10] Okhotsimskiy D.E., Sikharulidze Yu.G. Osnovy mekhaniki kosmicheskogo poleta [Fundamentals of space flight mechanics]. Moscow, Nauka publ., 1990. 445 p.

Askerova A.A. — student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Stolbova V.A. — student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — M.Yu. Barkin, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.