УДК 519.213.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ОШИБКИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА НА ПРИМЕРЕ КОНТРОЛЯ ПАРТИИ КРОНШТЕЙНОВ

К.И. Короткова korotkova_kapitolina@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Исследовано влияние разных законов распределения вероятности контролируемой величины на значение величин ошибок контроля. В качестве моделей распределения плотности вероятностей значения измеряемого параметра рассмотрены нормальный закон распределения, закон распределения Коши и закон распределения Лапласа

Ключевые слова

Ошибки первого рода, ошибки второго рода, нормальный закон распределения, закон распределения Коши, закон распределения Лапласа

Поступила в редакцию 20.06.2016

При проведении метрологической экспертизы сложных технических изделий одним из основных показателей качества контроля параметров является достоверность результатов контроля, которая зависит от многих факторов. В процессе метрологической экспертизы параметры изделий подвергают контролю указанными в технической документации средствами измерительной техники. При этом могут возникать ошибки первого и второго рода, влияющие на достоверность результатов. В качестве оценки ошибок используют вероятность, поэтому задача приобретает смысл тогда, когда контролируется множество одинаковых параметров [1–3].

При планировании производственных процессов модель закона распределения погрешности обработки контролируемой величины заранее не известна. Как правило, принимают модель нормального закона. Однако следует помнить, что истинный закон распределения (если он, конечно, существует), описывающий погрешности конкретной измерительной системы, остается неизвестным, не смотря на попытки к нему приблизиться. На основании измерений можно лишь подобрать вероятностную модель, которая (в некотором смысле) наилучшим образом отражает истинный закон. В практическом распределении диапазон всегда ограничен. Учитывая данные замечания в качестве модели распределения плотности вероятностей погрешности измерения во всех случаях принят усеченный нормальный закон распределения.

Задача определения закона контролируемой величины заключается оценке двух параметров (среднеквадратического отклонения σx и математического ожидания σx) и величины усечения, которую целесообразно выразить в значениях σx, как и диапазон рассеивания [4, 5]. В отличие от неусеченного нормального закона, вероятность появления погрешности изготовления в диапазоне рассеивания равна 1.

Для изучения влияния законов распределения на плотность вероятностей значения измеряемого параметра рассмотрим нормальный закон распределения, закон распределения Коши и закон распределения Лапласа.

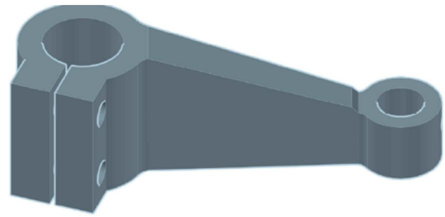

Рис. 1. Объект контроля — кронштейн

Ошибки первого и второго рода для выбранных законов распределения исследованы в системе *Mathcad*.

Объект контроля — кронштейн — представлен на рис. 1. В качестве контролируемой величины принимаем Ø30H7 (рис. 2).

Исходные данные для модели распределения плотности вероятности погрешности измерения:

$$\mu = X + \frac{T}{2}; \quad \sigma = \frac{\delta}{3},$$

где μ — математическое ожидание; σ — среднее квадратическое отклонение.

Плотность вероятности нормального закона распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (1)$$

После подстановки в (1) заданных параметров получаем

$$\Delta(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Условия нормировки для усеченного нормального закона распределения таковы:

$$F = \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} \Delta(x)dx = 0{,}997.$$

Определим плотность вероятности нормального усеченного закона распределения:

$$y(x) = \left| c\Delta(x) if\ 30 + \frac{T}{2} - \delta \le x \le 30 + \delta + \frac{T}{2} \right|,$$

где X — контролируемая величина; T — допуск на контролируемую величину; δ — погрешность измерения; c — константа.

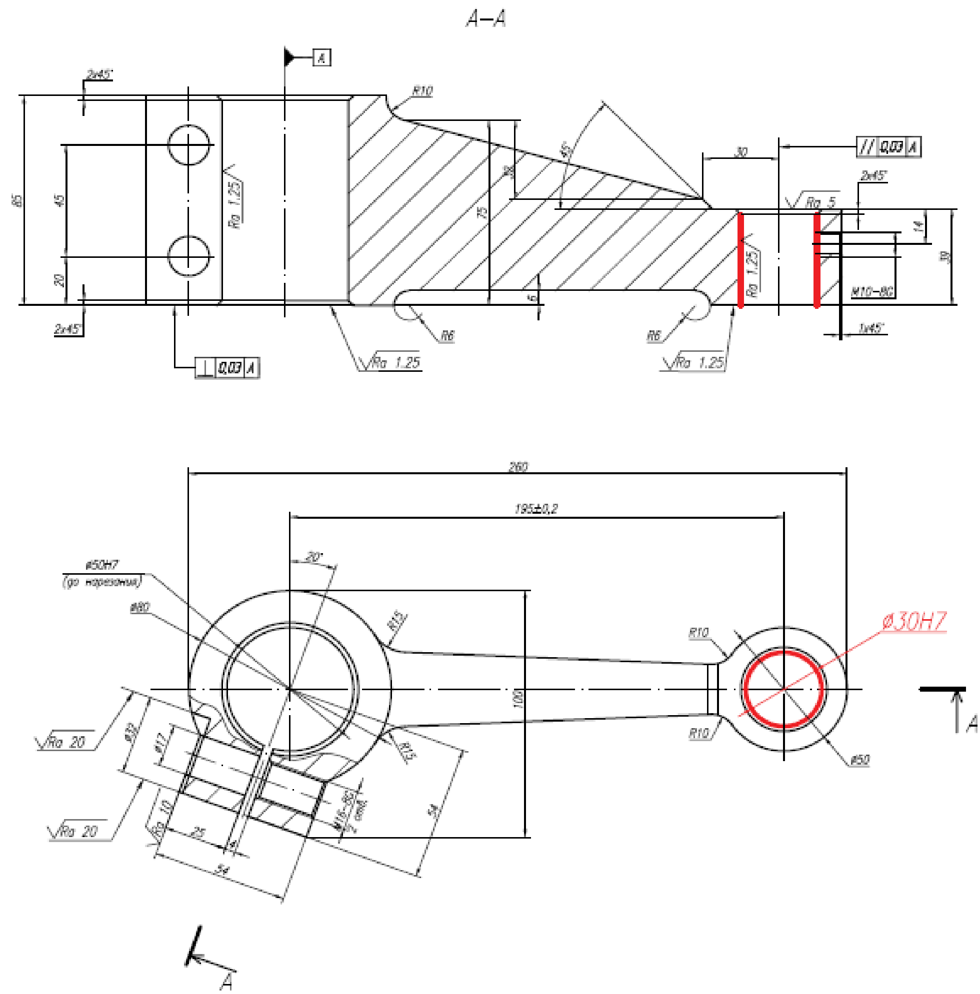

Рис. 2. Чертеж контролируемой детали с выделенной контролируемой величиной: в разрезе и вид сверху

Исходные данные для модели нормального закона распределения плотности вероятности измеряемого параметра: $X = 30$; $T = 0{,}021$; $\delta = 0{,}006$.

После подстановки в (1) заданных параметров получаем

$$f(x) = \frac{1}{\frac{T}{6}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-30)^2}{2\left(\frac{T}{6}\right)^2}}.$$

Результаты применения нормального закона распределения плотности вероятности значения измеряемого параметра представлены в виде графиков на рис. 3.

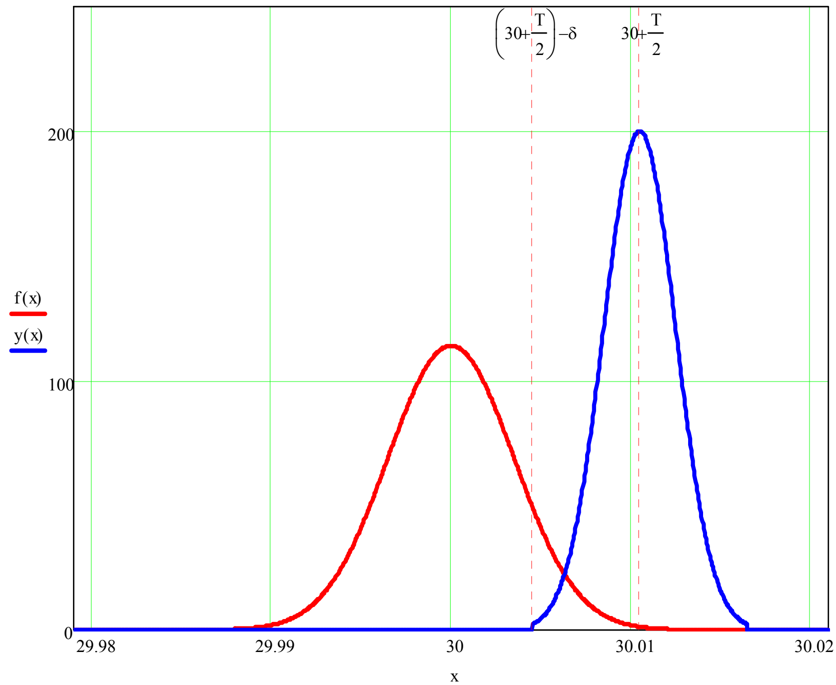

Рис. 3. Нормальный закон распределения плотности вероятности значения измеряемого параметра

Вычислим ошибки первого рода:

$$\alpha=\left[\int\limits_{X+\left(\frac{T}{2}-\delta\right)}^{X+\frac{T}{2}} f(x)dx \int\limits_{X+\frac{T}{2}}^{X+\left(\frac{T}{2}+\delta\right)} y(x)dx\right]100=4{,}896\ \%.$$

Теперь вычисленим ошибки второго рода:

$$\beta=\ {}_{X+\frac{T}{2}}^{X+\ \frac{T}{2}+\delta} f(x)dx \qquad {}_{X+\ \frac{T}{2}-\delta}^{X+\frac{T}{2}} y(x)dx\ \ 100=0{,}067\ \%.$$

Исходные данные для определения распределения плотности вероятности измеряемого параметра по закону Коши: l = 30; T = 0,021; s = T/6.

Далее определим плотность вероятности закона распределения Коши:

$$f(x)=\frac{1}{\pi s\ \ 1+\ \ \frac{x-l}{s}\ ^{2}},$$

где l — контролируемая величина.

Модель распределения плотности вероятности значения измеряемого параметра по закону Коши представлена на рис. 4 в виде графиков.

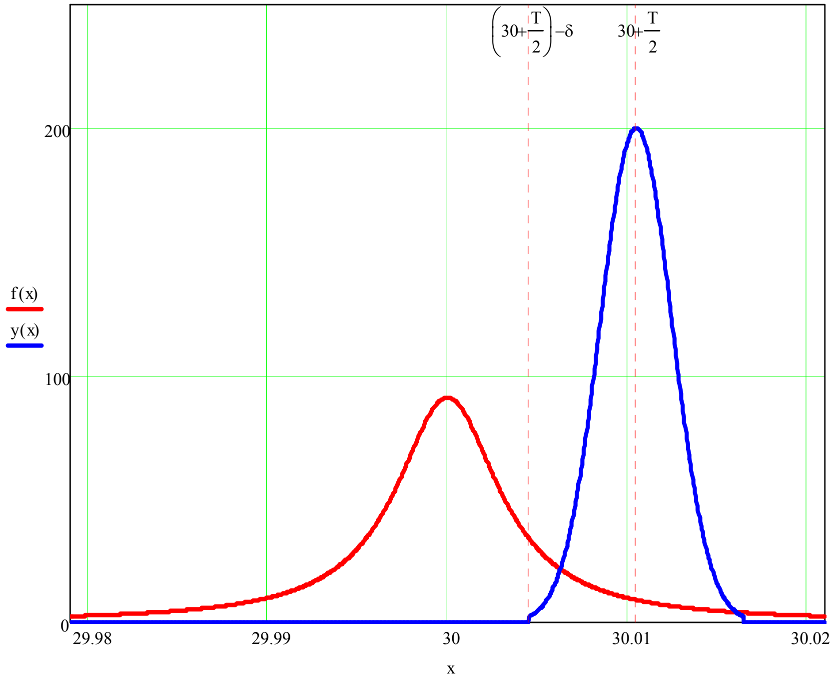

Рис. 4. Распределение плотности вероятности значения измеряемого параметра, согласно закону Коши

При вычислении ошибки первого рода получим:

$$\alpha = \left[\int_{X+\left(\frac{T}{2}-\delta\right)}^{X+\frac{T}{2}} f(x)dx \int_{X+\frac{T}{2}}^{X+\left(\frac{T}{2}+\delta\right)} y(x)dx \right] 100 = 5{,}4\ \%.$$

При вычислении ошибок второго рода запишем:

$$\beta = \left[\int_{X+\frac{T}{2}}^{X+\left(\frac{T}{2}+\delta\right)} f(x)dx \right] \left[\int_{X+\left(\frac{T}{2}-\delta\right)}^{X+\frac{T}{2}} y(x)dx \right] 100 = 1{,}794\ \%.$$

Исходные данные для модели нормального плотности вероятности измеряемого параметра по закону Лапласа принимаем такие же, как и для модели нормального закона распределения.

Получим плотность вероятности, согласно закону распределения Лапласа:

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\left(\frac{|x-X|}{\sigma}\right)}.$$

Модель распределения плотности вероятности значения измеряемого параметра по закону Лапласа представлена в виде графиков на рис. 5.

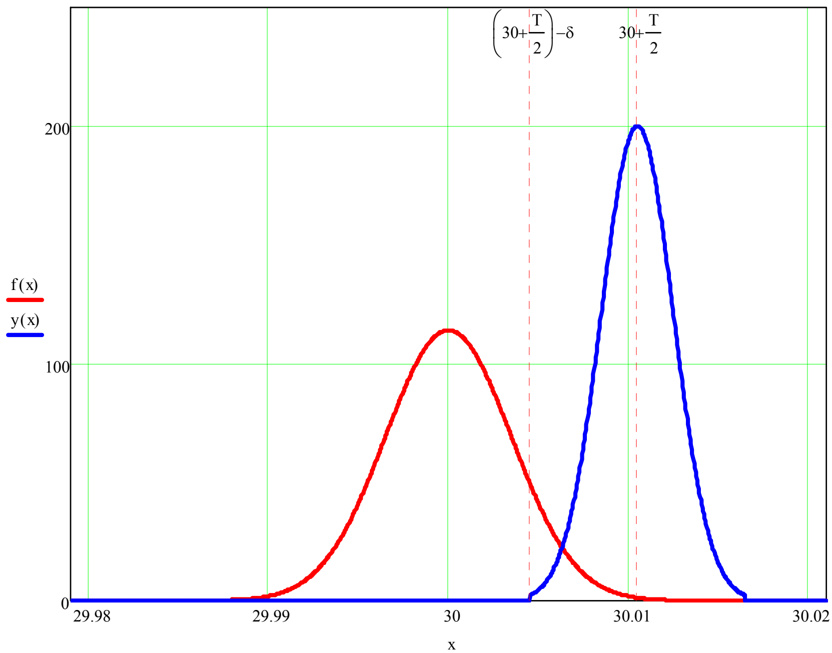

Рис. 5. Распределение плотности вероятности значения измеряемого параметра, согласно закону Лапласа

Вычисляя ошибки первого и второго рода, запишем:

$$\alpha = \left[\int_{X+\left(\frac{T}{2}-\delta\right)}^{X+\frac{T}{2}} f(x)dx \int_{X+\frac{T}{2}}^{X+\left(\frac{T}{2}+\delta\right)} y(x)dx \right] 100 = 5{,}667\ \%.$$

$$\beta = \left[\int_{X+\frac{T}{2}}^{X+\left(\frac{T}{2}+\delta\right)} f(x)dx \right] \left[\int_{X+\left(\frac{T}{2}-\delta\right)}^{X+\frac{T}{2}} y(x)dx \right] 100 = 1{,}021\ \%.$$

На рис. 6. представлены значения ошибок первого и второго рода в виде диаграммы.

Полученные результаты показали, что модель закона распределения плотности вероятности измеряемого параметра существенно влияет на величину ошибок первого и второго рода. Рассмотрение различных моделей является обязательным при проведении метрологической экспертизы для получения близких к реальным значений ошибок контроля.

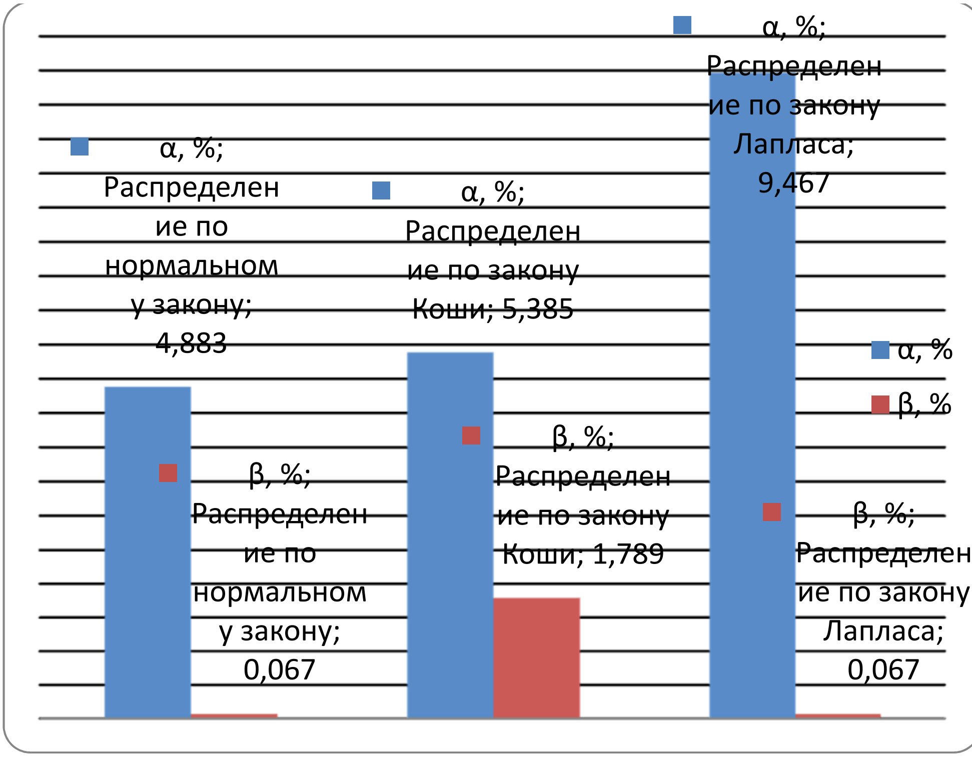

Рис. 6. Зависимость значений ошибок первого и второго рода от закона распределения

При решении задач контроля в качестве моделей закона распределения принято использовать нормальный закон. Для получения более точной оценки ошибок контроля рекомендовано рассматривать и другие законы распределения, тогда для любого эмпирического распределения можно построить более достоверную и статистически более обоснованную математическую модель.

Задачу выбора модели законов распределения при любой форме регистрируемых наблюдений (измерений), включая методы статистического анализа, можно решить с помощью современных компьютерных программных средств ЭВМ, например программной среды *Mathcad*.

Литература

1. *Фролов В.Я., Стадник В.В.* Экспериментальное определение оценки достоверности контроля изделий // Вестник ХНАДУ. 2011. № 53. 119 с.

2. *Лемешко Б.Ю.* О задаче идентификации закона распределения случайной составляющей погрешности измерений // Метрология. 2004. № 7. С. 8–12.

3. *Яшин А.В., Храпов Ф.И.* Выбор критерия согласия для определения закона распределения измеряемой величины // Измерительная техника. 2002. № 1. С. 16–20.

4. *Новицкий П.В., Зограф И.А.* Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1991. С. 169–180.

5. *Шачнев Ю.А.* Вычисление ошибок 1-го и 2-го рода. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. С. 5–19.

Короткова Капитолина Игоревна — студентка кафедры «Метрология и взаимозаменяемость», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — К.Г. Потапов, ассистент кафедры «Метрология и взаимозаменяемость», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

STUDYING THE INFLUENCE OF DISTRIBUTION LAWS ON TYPE I AND II ERRORS ON THE EXAMPLE OF BRACKET BATCH CONTROL

K.I. Korotkova korotkova_kapitolina@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The study tested the effect of different distribution laws of controlled values probability on the control error values. As the models of value probability density distribution of the measured parameter we considered the normal law of error, Cauchy distribution law and Laplace distribution law

Keywords

Type I errors, type II errors, normal law of error, Cauchy distribution law, Laplace distribution law

References

[1] Frolov V.Ya., Stadnik V.V. Experimental determination estimations of authenticity of control of wares. *Vestnik KhNADU* [Bulletin of Kharkov National Automobile and Highway University], 2011, no. 53, 119 p. (in Russ.).
[2] Lemeshko B.Yu. On distributive law identification of measurement uncertainty random component. *Metrologiya*, 2004, no. 7, pp. 8–12 (in Russ.).
[3] Yashin A.V., Khrapov F.I. Fitting criterion selection for distributive law definition of measured quantity. *Izmeritel'naya tekhnika*, 2002, no. 1, pp. 16–20 (in Russ.).
[4] Novitskiy P.V., Zograf I.A. Otsenka pogreshnostey rezul'tatov izmereniy [Measured data accuracy assessment]. Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1991. Pp. 169–180 (in Russ.).
[5] Shachnev Yu.A. Vychislenie oshibok 1-go i 2-go roda [Error of the first and second kind calculation]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. Pp. 5–19 (in Russ.).

Korotkova K.I. — student of the Department of Metrology and interchangeability, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — K.G. Potapov, Assistant of the Department of Metrology and interchangeability, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.