

## АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СПОСОБОВ РЕАЛИЗАЦИИ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА К МОДЕЛИРОВАНИЮ УГЛОВОЙ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

В.С. Лыскова

LysikovaViktoria@yandex.ru

SPIN-код: 8637-5918

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

### Аннотация

Рассмотрены способы реализации трехпараметрического подхода к моделированию угловой динамики движения летательного аппарата (ЛА). Проведено сравнение самолетной, ракетной и гироскопической схем перехода между стартовой и связанной системами координат. Выявлено, что матрицы направляющих косинусов независимо от выбора схемы перехода численно равны между собой на каждом шаге интегрирования при условии корректного пересчета начальных условий для каждой из схем; углы при этом не равны между собой. Показано влияние особых точек на результат моделирования углового движения ЛА. Сформированы рекомендации по использованию той или иной схемы перехода.

### Ключевые слова

Динамика летательного аппарата, системы координат, углы Эйлера, матрица направляющих косинусов, схемы перехода между стартовой и связанной системами координат, угловое движение летательного аппарата, трехпараметрический подход к моделированию, математическое описание полета

Поступила в редакцию 12.10.2018

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Основным инструментом баллистики служит математическое моделирование, поэтому одной из существенных сторон любого исследовательского процесса является адекватность выбранных и разработанных математических моделей.

Численное моделирование движения летательного аппарата (ЛА) отражает реальный полет с определенными допущениями. Математическое описание полета ЛА может быть основано на использовании законов теоретической механики. Для этого реальный ЛА должен быть представлен в виде твердого тела, перемещение которого складывается из поступательного движения центра масс (ЦМ) и вращательного движения вокруг ЦМ. Также необходимо задание системы отсчета, схемы действующих сил и моментов.

Существуют различные подходы к моделированию угловой динамики движения ЛА. В данной статье рассмотрен трехпараметрический подход: расчет углового движения ЛА осуществляется с использованием дифференциальных уравнений для расчета приращений углов Эйлера.

В соответствии с ГОСТ 20058–90 «Динамика летательных аппаратов в атмосфере» переход от нормальной\* системы координат  $Ox_g Y_g Z_g$  в связанную систе-

\* В данной работе нормальная система координат совпадает со стартовой системой координат, поэтому в дальнейшем будем использовать термин «стартовая система координат»  $Ox_{ст} Y_{ст} Z_{ст}$ .

му координат  $OXYZ$  осуществляется тремя последовательными поворотами — на угол рыскания  $\psi$ , угол тангажа  $\vartheta$  угол крена  $\gamma$  [1]:

– угол рыскания  $\psi$  — угол между осью  $OX_g$  нормальной системы координат и проекцией продольной оси  $OX$  на горизонтальную плоскость  $OX_gZ_g$  нормальной системы координат;

– угол тангажа  $\vartheta$  — угол между продольной осью  $OX$  летательного аппарата и горизонтальной плоскостью  $OX_gY_g$  нормальной системы координат;

– угол крена  $\gamma$  — угол между поперечной осью  $OZ$  и осью  $OZ_g$  нормальной системы координат, смещенной в положение, при котором угол рыскания равен нулю.

Матрица перехода из стартовой системы координат в связанную имеет следующий вид:

$$A_{\text{св-ст}} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \psi \\ -\cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi & \cos \gamma \cos \vartheta & \cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \\ \sin \gamma \sin \vartheta \cos \psi + \cos \gamma \sin \psi & -\sin \gamma \cos \vartheta & -\sin \gamma \sin \vartheta \sin \psi + \cos \gamma \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Кинематические соотношения (в соответствии с ГОСТ 20058–90), позволяющие связать угловые скорости вращения связанного базиса относительно инерциальных осей и производные изменения угловых величин, выбранных для описания угловой кинематики, следующие:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \omega_x \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma; \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma); \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma). \end{aligned} \quad (1)$$

В литературе указывается, что на практике применяют различные схемы введения последовательностей троек углов. Схему, представленную в ГОСТ 20058–90, принято называть самолетной. Это схема, при которой подразумевается, что наибольший поворот в процессе полета происходит по углу рыскания, а наименьший — по каналу крена. Такая схема характерна для ЛА самолетного типа. Другие распространенные последовательности поворотов ( $(\vartheta - \psi - \gamma)$  — ракетная схема,  $(\psi - \gamma - \vartheta)$  — гироскопическая схема) в ГОСТ 20058–90 не рассмотрены. Целесообразно исследовать их.

Чтобы получить матрицу перехода от исходной системы координат к конечной, необходимо составить элементарные матрицы последовательного поворота на один угол и перемножить их [2]. Покажем это на примере перехода из стартовой системы координат к связанной по тройке углов, указанной в ГОСТе.

Первый поворот осуществляем на угол  $\psi$ , как показано на рис. 1:

$$A_{\psi} = \begin{vmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{vmatrix}.$$

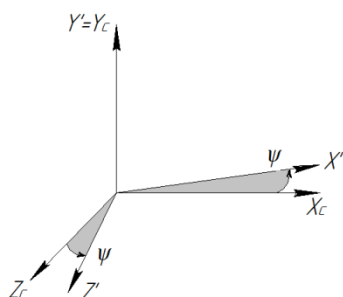


Рис. 1. Схема поворота осей стартовой системы координат на угол  $\psi$

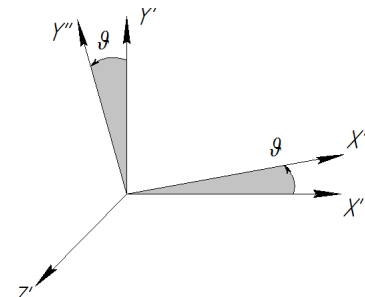


Рис. 2. Схема второго поворота осей стартовой системы координат на угол  $\theta$

Второй поворот осуществляем на угол  $\theta$  (рис. 2):

$$A_{\theta} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Третий поворот — на угол  $\gamma$  (рис. 3):

$$A_{\gamma} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix}.$$

В результате перемножения элементарных матриц получим матрицу перехода из стартовой системы координат в связанную:

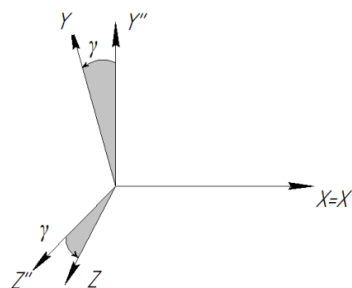


Рис. 3. Схема второго поворота осей стартовой системы координат на угол  $\gamma$

$$A_{\text{св-ст}} = A_{\gamma} A_{\theta} A_{\psi} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \theta & -\cos \theta \sin \psi \\ -\cos \gamma \sin \theta \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi & \cos \gamma \cos \theta & \cos \gamma \sin \theta \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \\ \sin \gamma \sin \theta \cos \psi + \cos \gamma \sin \psi & -\sin \gamma \cos \theta & -\sin \gamma \sin \theta \sin \psi + \cos \gamma \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Любой декартовой системе координат может быть сопоставлен базис, состоящий из векторов, каждый из которых направлен вдоль своей оси координат. Матрица перехода от базиса  $A$  к базису  $B$  — это векторы базиса  $A$ , записанные по столбцам в проекциях на оси базиса  $B$ . Разложение вектора по данному базису единственно [3]. Отсюда следует вывод, что при определении углового положения объекта с помощью различных комбинаций трех углов поворота матрица направляющих косинусов численно должна оставаться неизменной.

Получим матрицы перехода по другим схемам. При использовании различных последовательностей поворотов вид итоговой матрицы перехода изменяется, поскольку последовательность перемножения матриц элементарных поворотов другая. Однако, согласно выводам, полученным выше, матрицы перехода при различных схемах перехода должны быть численно одинаковыми. Поэтому очевидно, что значения углов, используемые в различных схемах перехода, различаются ( $\vartheta_{rkt} \neq \vartheta_{trk} \neq \vartheta_{rkt}$ ). Физический смысл (определение) углов также изменяется (наглядно покажем это ниже). Поэтому в дальнейшем будем обозначать в нижнем индексе у параметра (угла) порядок поворотов. Например,  $\vartheta_{rkt}, \psi_{rkt}, \gamma_{rkt}$  — соответственно углы тангажа, рыскания, крена, полученные тремя последовательными поворотами на угол рыскания ( $r$ ), угол тангажа ( $t$ ) и угол крена ( $k$ ). Отметим, что в обозначении матрицы направляющих косинусов верхний индекс показывает систему координат, из которой осуществляется переход; нижний индекс — систему координат, в которую осуществляется переход, а также тройку последовательностей углов, по которой осуществляется переход.

Для ракетной схемы ( $\vartheta_{trk} - \psi_{trk} - \gamma_{trk}$ ):

$$A_{cbtrk}^{ct} = A_{\gamma} A_{\psi} A_{\vartheta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_{trk} & \sin \gamma_{trk} \\ 0 & -\sin \gamma_{trk} & \cos \gamma_{trk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \psi_{trk} & 0 & -\sin \psi_{trk} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_{trk} & 0 & \cos \psi_{trk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \vartheta_{trk} & \sin \vartheta_{trk} & 0 \\ -\sin \vartheta_{trk} & \cos \vartheta_{trk} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \psi_{trk} \cos \vartheta_{trk} & \cos \psi_{trk} \sin \vartheta_{trk} & -\sin \psi_{trk} \\ \sin \gamma_{trk} \sin \psi_{trk} \cos \vartheta_{trk} - \sin \vartheta_{trk} \cos \gamma_{trk} & \sin \gamma_{trk} \sin \psi_{trk} \sin \vartheta_{trk} + \cos \gamma_{trk} \cos \vartheta_{trk} & \sin \gamma_{trk} \cos \psi_{trk} \\ \cos \gamma_{trk} \sin \psi_{trk} \cos \vartheta_{trk} + \sin \gamma_{trk} \sin \vartheta_{trk} & \cos \gamma_{trk} \sin \psi_{trk} \sin \vartheta_{trk} - \sin \gamma_{trk} \cos \vartheta_{trk} & \cos \gamma_{trk} \cos \psi_{trk} \end{bmatrix};$$

Для гироскопической схемы ( $\psi_{rkt} - \gamma_{rkt} - \vartheta_{rkt}$ ):

$$A_{cbtrkt}^{ct} = A_{\vartheta} A_{\gamma} A_{\psi} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta_{rkt} & \sin \vartheta_{rkt} & 0 \\ -\sin \vartheta_{rkt} & \cos \vartheta_{rkt} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_{rkt} & \sin \gamma_{rkt} \\ 0 & -\sin \gamma_{rkt} & \cos \gamma_{rkt} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \psi_{rkt} & 0 & -\sin \psi_{rkt} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_{rkt} & 0 & \cos \psi_{rkt} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \psi_{rkt} \cos \vartheta_{rkt} + \sin \vartheta_{rkt} \sin \gamma_{rkt} \sin \psi_{rkt} & \sin \vartheta_{rkt} \cos \gamma_{rkt} & -\cos \vartheta_{rkt} \sin \psi_{rkt} + \sin \vartheta_{rkt} \sin \gamma_{rkt} \cos \psi_{rkt} \\ -\sin \vartheta_{rkt} \cos \psi_{rkt} + \cos \vartheta_{rkt} \sin \gamma_{rkt} \sin \psi_{rkt} & \cos \vartheta_{rkt} \cos \gamma_{rkt} & \sin \vartheta_{rkt} \sin \psi_{rkt} + \cos \vartheta_{rkt} \sin \gamma_{rkt} \cos \psi_{rkt} \\ \sin \psi_{rkt} \cos \gamma_{rkt} & -\sin \gamma_{rkt} & \cos \psi_{rkt} \cos \gamma_{rkt} \end{bmatrix};$$

При моделировании движения ЛА с применением различных схем перехода необходимо проводить пересчет начальных условий, поскольку углы, соответствующие различным схемам перехода, не равны между собой.

Рассмотрим пересчет углов из ракетной схемы в самолетную. Пусть базис  $X_{ct}, Y_{ct}, Z_{ct}$  — инерциальный базис, стартовая система координат, а базис  $X, Y, Z$  — связанная с объектом система координат. Введем обозначения:

–  $X_{ctx}, X_{cty}, X_{ctz}$  — проекции стартовой оси  $OX_{ct}$  на связанные оси  $OX, OY, OZ$ ;

–  $X_x, X_y, X_z$  — проекции связанной оси  $OX$  (продольной оси объекта) на инерциальные оси  $OX_{ct}, OY_{ct}, OZ_{ct}$ .

Тогда по результатам сравнения выражений для матриц перехода справедливо будет записать:

$$\begin{aligned}
 X_{ct\ x} &= A_{cbtrk}^{ct}(1,1) = A_{cbtrk}^{ct}(1,1) = \cos \vartheta_{trk} \cos \psi_{trk} = \cos \vartheta_{trk} \cos \psi_{trk}; \\
 X_{ct\ y} &= A_{cbtrk}^{ct}(1,2) = A_{cbtrk}^{ct}(1,2) = \sin \vartheta_{trk} \cos \psi_{trk} = \sin \vartheta_{trk}; \\
 X_{ct\ z} &= A_{cbtrk}^{ct}(1,3) = A_{cbtrk}^{ct}(1,3) = -\sin \psi_{trk} = -\cos \vartheta_{trk} \sin \psi_{trk}; \\
 Y_{ct\ x} &= A_{cbtrk}^{ct}(2,1) = A_{cbtrk}^{ct}(2,1) = \sin \gamma_{trk} \sin \psi_{trk} \cos \vartheta_{trk} - \sin \vartheta_{trk} \cos \gamma_{trk} = \\
 &= -\cos \gamma_{trk} \sin \vartheta_{trk} \cos \psi_{trk} + \sin \gamma_{trk} \sin \psi_{trk}; \\
 Y_{ct\ y} &= A_{cbtrk}^{ct}(2,2) = A_{cbtrk}^{ct}(2,2) = \sin \gamma_{trk} \sin \psi_{trk} \sin \vartheta_{trk} + \cos \gamma_{trk} \cos \vartheta_{trk} = \cos \gamma_{trk} \cos \vartheta_{trk}; \\
 Y_{ct\ z} &= A_{cbtrk}^{ct}(2,3) = A_{cbtrk}^{ct}(2,3) = \sin \gamma_{trk} \cos \psi_{trk} = \cos \gamma_{trk} \sin \vartheta_{trk} \sin \psi_{trk} + \sin \gamma_{trk} \cos \psi_{trk}; \\
 Z_{ct\ x} &= A_{cbtrk}^{ct}(3,1) = A_{cbtrk}^{ct}(3,1) = \cos \gamma_{trk} \sin \psi_{trk} \cos \vartheta_{trk} + \sin \gamma_{trk} \sin \vartheta_{trk} = \\
 &= \sin \gamma_{trk} \sin \vartheta_{trk} \cos \psi_{trk} + \cos \gamma_{trk} \sin \psi_{trk}; \\
 Z_{ct\ y} &= A_{cbtrk}^{ct}(3,2) = A_{cbtrk}^{ct}(3,2) = \cos \gamma_{trk} \sin \psi_{trk} \sin \vartheta_{trk} - \sin \gamma_{trk} \cos \vartheta_{trk} = -\sin \gamma_{trk} \cos \vartheta_{trk}; \\
 Z_{ct\ z} &= A_{cbtrk}^{ct}(3,3) = A_{cbtrk}^{ct}(3,3) = \cos \gamma_{trk} \cos \psi_{trk} = -\sin \gamma_{trk} \sin \vartheta_{trk} \sin \psi_{trk} + \cos \gamma_{trk} \cos \psi_{trk}.
 \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что в общем случае

$$\vartheta_{trk} \neq \vartheta_{trk}, \quad \psi_{trk} \neq \psi_{trk}, \quad \gamma_{trk} \neq \gamma_{trk}$$

Соотношения между ними можно найти из приведенных выше выражений для элементов матрицы перехода.

Из выражения для  $X_{ct\ y}$ , например, получаем:

$$\vartheta_{trk} = \arcsin A_{cbtrk}^{ct}(1,2) = \arcsin(\sin \vartheta_{trk} \cos \psi_{trk}), \quad -90^\circ \leq \vartheta_{trk} \leq 90^\circ$$

Из выражений для  $Y_{ct\ y}$  и  $Z_{ct\ y}$  выводим при уже известном  $\vartheta_{trk}$ :

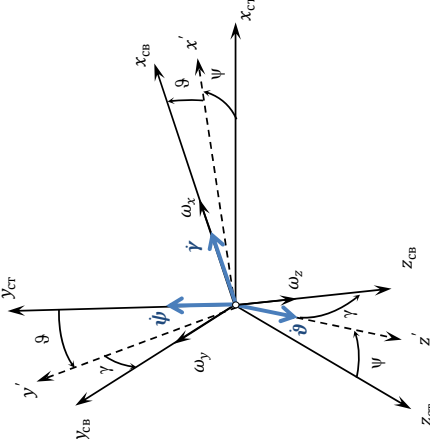
$$\begin{aligned}
 \gamma_{trk} &= -\text{sign}[A_{cbtrk}^{ct}(3,2)] \cdot \arccos\left(\frac{A_{cbtrk}^{ct}(2,2)}{\cos \vartheta_{trk}}\right) = \\
 &= -\text{sign}(\cos \gamma_{trk} \sin \psi_{trk} \sin \vartheta_{trk} - \sin \gamma_{trk} \cos \vartheta_{trk}) \times \\
 &\times \arccos\left(\frac{\sin \gamma_{trk} \sin \psi_{trk} \sin \vartheta_{trk} + \cos \gamma_{trk} \cos \vartheta_{trk}}{\cos \vartheta_{trk}}\right), \quad -180^\circ \leq \gamma_{trk} \leq 180^\circ.
 \end{aligned}$$

Из выражений для  $X_{ct\ x}$  и  $X_{ct\ z}$  получаем:

$$\begin{aligned}
 \psi_{trk} &= -\text{sign}[A_{cbtrk}^{ct}(1,3)] \cdot \arccos\left(\frac{A_{cbtrk}^{ct}(1,1)}{\cos \vartheta_{trk}}\right) = -\text{sign}(-\sin \psi_{trk}) \times \\
 &\times \arccos\left(\frac{\cos \vartheta_{trk} \cos \psi_{trk}}{\cos \vartheta_{trk}}\right), \quad -180^\circ \leq \psi_{trk} \leq 180^\circ.
 \end{aligned}$$

Аналогично и для других схем перехода. Формулы перехода указаны в табл. 1.

Сводная таблица по схемам перехода их стартовой системы координат в связанную

Рисунок	Определение углов	
	<p><math>(\Psi_{rtk} \rightarrow \vartheta_{rtk} \rightarrow \gamma_{rtk})</math> — самолетная схема</p> <p><math>\Psi_{rtk}</math> — угол между осью <math>OX_{ст}</math> нормальной системы координат и проекцией продольной оси <math>OX</math> на горизонтальную плоскость <math>OX_{ст}Z_{ст}</math> нормальной системы координат;</p> <p><math>\vartheta_{rtk}</math> — угол между продольной осью <math>OX</math> летательного аппарата и горизонтальной плоскостью нормальной системы координат;</p> <p><math>\gamma_{rtk}</math> — угол между поперечной осью <math>OZ</math> и осью <math>OZ_{ст}</math> нормальной системы координат, смещенной в положение, при котором угол рыскания равен нулю</p> <p>МНК</p>	$A_{св,rtk}^{ст} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{rtk} \cos \Psi_{rtk} & \sin \vartheta_{rtk} & -\cos \vartheta_{rtk} \sin \Psi_{rtk} \\ -\cos \gamma_{rtk} \sin \vartheta_{rtk} \cos \Psi_{rtk} + \sin \gamma_{rtk} \sin \Psi_{rtk} & \cos \gamma_{rtk} \cos \vartheta_{rtk} & \cos \gamma_{rtk} \sin \vartheta_{rtk} \sin \Psi_{rtk} + \sin \gamma_{rtk} \cos \Psi_{rtk} \\ \sin \gamma_{rtk} \sin \vartheta_{rtk} \cos \Psi_{rtk} + \cos \gamma_{rtk} \sin \Psi_{rtk} & -\sin \gamma_{rtk} \cos \vartheta_{rtk} & -\sin \gamma_{rtk} \sin \vartheta_{rtk} \sin \Psi_{rtk} + \cos \gamma_{rtk} \cos \Psi_{rtk} \end{bmatrix}$
<p><b>Угловые скорости</b></p> $\omega_x = \dot{\gamma}_{rtk} + \dot{\Psi}_{rtk} \sin \vartheta_{rtk};$ $\omega_y = \dot{\vartheta}_{rtk} \sin \gamma_{rtk} + \dot{\Psi}_{rtk} \cos \vartheta_{rtk} \cos \gamma_{rtk};$ $\omega_z = \dot{\vartheta}_{rtk} \cos \gamma_{rtk} - \dot{\Psi}_{rtk} \cos \vartheta_{rtk} \sin \gamma_{rtk}$	<p><b>Кинематические уравнения (6)</b></p> $\dot{\Psi}_{rtk} = \frac{1}{\cos \vartheta_{rtk}} (\omega_y \cos \gamma_{rtk} - \omega_z \sin \gamma_{rtk});$ $\dot{\vartheta}_{rtk} = \omega_y \sin \gamma_{rtk} + \omega_z \cos \gamma_{rtk};$ $\dot{\gamma}_{rtk} = \omega_x + fg \vartheta_{rtk} (\omega_z \sin \gamma_{rtk} - \omega_y \cos \gamma_{rtk})$	<p><b>Пересчет углов</b></p> $\vartheta_{rtk} = \arcsin A_{св}^{ст}(1,2), \quad -90^\circ \leq \vartheta_{rtk} \leq 90^\circ;$ $\Psi_{rtk} = -\text{sign}[A_{св}^{ст}(1,3)] \arccos \left( \frac{A_{св}^{ст}(1,1)}{\cos \vartheta_{rtk}} \right),$ $\gamma_{rtk} = -\text{sign}[A_{св}^{ст}(3,2)] \arccos \left( \frac{A_{св}^{ст}(2,2)}{\cos \vartheta_{rtk}} \right),$ $-180^\circ \leq \gamma_{rtk} \leq 180^\circ$

$(\vartheta_{trk} - \Psi_{trk} - \gamma_{trk})$ — ракетная схема	
	<p><math>\vartheta_{trk}</math> — угол между проекцией продольной оси <math>OX</math> на вертикальную плоскость <math>OX_{ct}Y_{ct}</math> и горизонтальной плоскостью <math>OX_{ct}Z_{ct}</math>;</p> <p><math>\Psi_{trk}</math> — угол между продольной осью <math>OX</math> и проекцией продольной оси <math>OX</math> на вертикальную плоскость <math>OX_{ct}Y_{ct}</math>;</p> <p><math>\gamma_{trk}</math> — угол между поперечной осью <math>OZ</math> и проекцией поперечной оси <math>OZ</math> на плоскость <math>OX_{ct}Z_{ct}</math></p>
МНН	
$A_{cbtrk}^{ct} = \begin{bmatrix} \cos \Psi_{trk} \cos \vartheta_{trk} & \cos \Psi_{trk} \sin \vartheta_{trk} & -\sin \Psi_{trk} \\ \sin \gamma_{trk} \sin \Psi_{trk} \cos \vartheta_{trk} - \sin \vartheta_{trk} \cos \gamma_{trk} & \sin \gamma_{trk} \sin \Psi_{trk} \sin \vartheta_{trk} + \cos \gamma_{trk} \cos \vartheta_{trk} & \sin \gamma_{trk} \cos \Psi_{trk} \\ \cos \gamma_{trk} \sin \Psi_{trk} \cos \vartheta_{trk} + \sin \gamma_{trk} \sin \vartheta_{trk} & \cos \gamma_{trk} \sin \Psi_{trk} \sin \vartheta_{trk} - \sin \gamma_{trk} \cos \vartheta_{trk} & \cos \gamma_{trk} \cos \Psi_{trk} \end{bmatrix}$	
Угловые скорости	Кинематические уравнения (7)
$\omega_x = \dot{\gamma}_{trk} - \dot{\vartheta}_{trk} \sin \Psi_{trk};$ $\omega_y = \dot{\Psi}_{trk} \cos \gamma_{trk} + \dot{\vartheta}_{trk} \cos \Psi_{trk} \sin \gamma_{trk};$ $\omega_z = -\dot{\Psi}_{trk} \sin \gamma_{trk} + \dot{\vartheta}_{trk} \cos \Psi_{trk} \cos \gamma_{trk}$	$\dot{\vartheta}_{trk} = \frac{1}{\cos \Psi_{trk}} (\omega_y \sin \gamma_{trk} + \omega_z \cos \gamma_{trk});$ $\dot{\Psi}_{trk} = \omega_y \cos \gamma_{trk} - \omega_z \sin \gamma_{trk};$ $\dot{\gamma}_{trk} = \omega_x + f g \Psi_{trk} (\omega_y \sin \gamma_{trk} + \omega_z \cos \gamma_{trk})$
Пересчет углов	
$\Psi_{trk} = -\arcsin A_{cb}^{ct}(1,3), \quad -90^\circ \leq \Psi_{trk} \leq 90^\circ;$ $\vartheta_{trk} = \text{sign}[A_{cb}^{ct}(1,2)] \arccos \left( \frac{A_{cb}^{ct}(1,1)}{\cos \Psi_{trk}} \right),$ $-180^\circ \leq \vartheta_{trk} \leq 180^\circ;$ $\gamma_{trk} = \text{sign}[A_{cb}^{ct}(2,3)] \arccos \left( \frac{A_{cb}^{ct}(3,3)}{\cos \Psi_{trk}} \right),$ $-180^\circ \leq \gamma_{trk} \leq 180^\circ$	

$(\Psi_{rkt} - \gamma_{rkt} - \vartheta_{rkt})$ — гироскопическая схема	
$\vartheta_{rkt}$ — угол между продольной осью $OX_{cr}$ и горизонтальной плоскостью $OX_{cr}Z_{cr}$ ; $\Psi_{rkt}$ — угол между проекцией продольной оси $OX$ на горизонтальную плоскость $OX_{cr}Y_{cr}$ и осью $OX_{cr}$ ; $\gamma_{rkt}$ — угол между поперечной осью $OZ$ и проекцией поперечной оси $OZ$ на плоскость $OX_{cr}Z_{cr}$	
МНК	
$A_{cb\ rkt}^{cm} = \begin{bmatrix} \cos \Psi_{rkt} \cos \vartheta_{rkt} + \sin \vartheta_{rkt} \sin \gamma_{rkt} \sin \Psi_{rkt} & \sin \vartheta_{rkt} \cos \gamma_{rkt} & -\cos \vartheta_{rkt} \sin \Psi_{rkt} + \sin \vartheta_{rkt} \sin \gamma_{rkt} \cos \Psi_{rkt} \\ -\sin \vartheta_{rkt} \cos \Psi_{rkt} + \cos \vartheta_{rkt} \sin \gamma_{rkt} \sin \Psi_{rkt} & \cos \vartheta_{rkt} \cos \gamma_{rkt} & \sin \vartheta_{rkt} \sin \Psi_{rkt} + \cos \vartheta_{rkt} \sin \gamma_{rkt} \cos \Psi_{rkt} \\ \sin \Psi_{rkt} \cos \gamma_{rkt} & -\sin \gamma_{rkt} & \cos \Psi_{rkt} \cos \gamma_{rkt} \end{bmatrix}$	
Угловые скорости	Кинематические уравнения (8)
$\omega_x = \dot{\gamma}_{rkt} \cos \vartheta_{rkt} + \dot{\Psi}_{rkt} \cos \gamma_{rkt} \sin \vartheta_{rkt};$ $\omega_y = -\dot{\gamma}_{rkt} \sin \vartheta_{rkt} + \dot{\Psi}_{rkt} \cos \gamma_{rkt} \cos \vartheta_{rkt};$ $\omega_z = \dot{\vartheta}_{rkt} - \dot{\Psi}_{rkt} \sin \gamma_{rkt}$	$\dot{\vartheta}_{rkt} = \omega_z + tg \gamma_{rkt} (\omega_x \sin \vartheta_{rkt} + \omega_y \cos \vartheta_{rkt});$ $\dot{\Psi}_{rkt} = \frac{1}{\cos \gamma_{rkt}} (\omega_x \sin \vartheta_{rkt} + \omega_y \cos \vartheta_{rkt});$ $\dot{\gamma}_{rkt} = \omega_x \cos \vartheta_{rkt} - \omega_y \sin \vartheta_{rkt}$
Пересчет углов	
$\gamma_{rkt} = -\arcsin A_{cb}^{ct}(3,2), \quad -90^\circ \leq \gamma_{rkt} \leq 90^\circ;$ $\vartheta_{rkt} = \text{sign}[A_{cb}^{ct}(1,2)] \arccos \left( \frac{A_{cb}^{ct}(2,2)}{\cos \gamma_{rkt}} \right),$ $\quad -180^\circ \leq \vartheta_{rkt} \leq 180^\circ;$ $\Psi_{rkt} = \text{sign}[A_{cb}^{ct}(2,3)] \arccos \left( \frac{A_{cb}^{ct}(3,3)}{\cos \gamma_{rkt}} \right),$ $\quad -180^\circ \leq \Psi_{rkt} \leq 180^\circ$	



Разберемся с выводом кинематических соотношений (1). Для этого установим связь между производными углов  $\dot{\Psi}_{rtk}, \dot{\Theta}_{rtk}, \dot{\gamma}_{rtk}$  по времени и проекциями вектора угловой скорости ЛА на связанные оси  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ .

Вектор угловой скорости ракеты  $\omega$  можно представить как сумму [4]:

$$\omega = \dot{\Theta}_{rtk} + \dot{\Psi}_{rtk} + \dot{\gamma}_{rtk}. \quad (2)$$

В соответствии с рис. 4 (для удобства индексы углов на рисунках, представленных в данной работе, опустим):

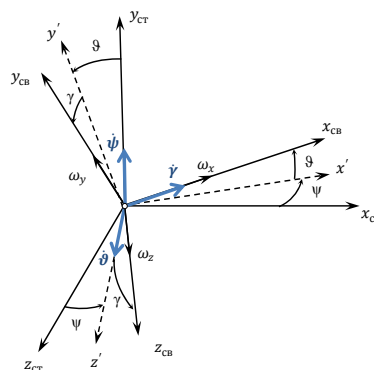


Рис. 4. Самолетная схема поворотов стартовой СК относительно связанной СК

$$\omega_x = \dot{\gamma}_{rtk} + \dot{\Psi}_{rtk} \sin \Theta_{rtk}; \quad (3)$$

$$\omega_y = \dot{\Theta}_{rtk} \sin \gamma_{rtk} + \dot{\Psi}_{rtk} \cos \Theta_{rtk} \cos \gamma_{rtk}; \quad (4)$$

$$\omega_z = \dot{\Theta}_{rtk} \cos \gamma_{rtk} - \dot{\Psi}_{rtk} \cos \Theta_{rtk} \sin \gamma_{rtk}. \quad (5)$$

Из (3) получим:

$$\dot{\gamma}_{rtk} = \dot{\Psi}_{rtk} \sin \Theta_{rtk} - \omega_x.$$

Домножим (4) на  $\sin \gamma_{rtk}$ , а (5) — на  $\cos \gamma_{rtk}$  и сложим первое выражение со вторым:

$$\omega_y \sin \gamma_{rtk} + \omega_z \cos \gamma_{rtk} = \dot{\Theta}_{rtk} (\cos^2 \gamma_{rtk} + \sin^2 \gamma_{rtk}).$$

Домножим (4) на  $\cos \gamma_{rtk}$  а (5) — на  $\sin \gamma_{rtk}$  и сложим первое выражение со вторым:

$$\omega_y \cos \gamma_{rtk} - \omega_z \sin \gamma_{rtk} = \dot{\Psi}_{rtk} \cos \Theta_{rtk}.$$

Окончательно получим:

$$\dot{\Psi}_{rtk} = \frac{1}{\cos \Theta_{rtk}} (\omega_y \cos \gamma_{rtk} - \omega_z \sin \gamma_{rtk}); \quad (6)$$

$$\dot{\Theta}_{rtk} = \omega_y \sin \gamma_{rtk} + \omega_z \cos \gamma_{rtk}; \quad (7)$$

$$\dot{\gamma}_{rtk} = \omega_x + \operatorname{tg} \Theta_{rtk} (\omega_z \sin \gamma_{rtk} - \omega_y \cos \gamma_{rtk}). \quad (8)$$

Кинематические соотношения для других схем перехода записаны в табл. 1.

Из анализа системы уравнений (6)–(8) следует вывод, что уравнения имеют особые точки. Так, для самолетной схемы перехода система уравнений (6) содержит множители  $1/\cos \Theta_{rtk}$  и  $\operatorname{tg} \Theta_{rtk}$ , которые влекут за собой появление осо-

бых точек при  $\vartheta_{rtk} \rightarrow \pi/2 \pm \pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . При таких значениях углов производные  $\dot{\Psi}_{rtk}$  и  $\dot{\gamma}_{rtk}$  терпят разрыв второго рода, а их значения близки к бесконечным. Аналогичное справедливо и для других схем перехода. Заметим, что особая точка наблюдается во вращении по второму углу в последовательности поворотов.

На практике подобные вырождения могут быть опасны, поскольку использование бесконечных производных углов при интегрировании угловой кинематики объекта неминуемо приведет к разрывам и скачкам величин, которые нельзя объяснить физически. Любая система углов, по существу, моделирует некоторый карданов подвес. При определенных значениях углов происходит вырождение кинематических уравнений, отражающее эффект складывания рамок этого подвеса [5].

Рассмотрим тривиальную математическую модель пространственного пассивного неуправляемого движения ЛА, представленного на рис. 5. На ЛА действует следующая система сил и моментов: аэродинамическая сила  $\mathbf{R}_a$ , момент  $\mathbf{M}$  и сила притяжения  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ . Атмосфера стандартная по ГОСТ 4401–81 [6]. Гравитационное поле Земли — однородное плоскопараллельное. Все аэродинамические функции заданы таблично. Интегрирование уравнений движения осуществляется методом Эйлера с шагом  $\Delta = 0,01$  с.

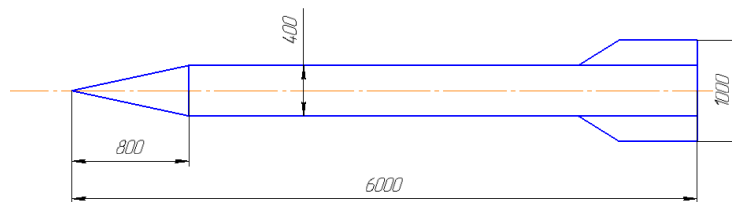


Рис. 5. Схема ЛА

Характеристики ЛА следующие:

$$\begin{aligned} m &= 550 \text{ кг}; & J_x &= 700 \text{ кг/м}^2; \\ d_m &= 0,4 \text{ м}; & J_y &= 1400 \text{ кг/м}^2; \\ l &= 6 \text{ м}; & J_z &= 1400 \text{ кг/м}^2; \\ V &= 400 \text{ м/с}; \end{aligned}$$

Уравнение поступательного движения:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} X_{ст} \\ Y_{ст} \\ Z_{ст} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix},$$

где  $A$  — матрица перехода из связанной системы координат к стартовой;  $X_{ст}$ ,  $Y_{ст}$ ,  $Z_{ст}$  — аэродинамическая сила в проекциях на стартовую систему координат;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — аэродинамическая сила в проекциях на связанную систему

координат;  $\dot{V}_{ctx} = \frac{X_{ct}}{m}$  — производная функции проекции скорости на ось

$OX_{ct}$ ;  $\dot{V}_{cty} = \frac{(Y_{ct} + G)}{m}$  — производная функции проекции скорости на ось

$OY_{ct}$ ;  $\dot{V}_{ctz} = \frac{Z_{ct}}{m}$  — производная функции проекции скорости на ось  $OZ_{ct}$ .

Уравнения вращательного движения:

производная функции угловой скорости вокруг оси  $OX$

$$\dot{\omega}_x = \frac{M_x}{J_x} + \frac{(J_y - J_z)\omega_x\omega_y}{J_x}$$

производная функции угловой скорости вокруг оси  $OY$ ;

$$\dot{\omega}_y = \frac{M_y}{J_y} + \frac{(J_z - J_x)\omega_x\omega_z}{J_y}$$

производная функции угловой скорости вокруг оси  $OZ$ ,

$$\dot{\omega}_z = \frac{M_z}{J_z} + \frac{(J_x - J_y)\omega_x\omega_y}{J_z}$$

где  $M_x, M_y, M_z$  — аэродинамические моменты;  $J_x, J_y, J_z$  — осевые моменты инерции ЛА;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — угловые скорости ЛА.

Прежде чем провести исследование влияния особых точек, отметим, что важно соблюдать соответствие кинематических уравнений Эйлера (6)–(8) выбранной схеме перехода. В противном случае результат моделирования будет некорректным. Покажем это на примере использования уравнений Эйлера самолетной схемы для расчета движения ЛА по самолетной, ракетной и гироскопической схемам перехода (рис. 6).

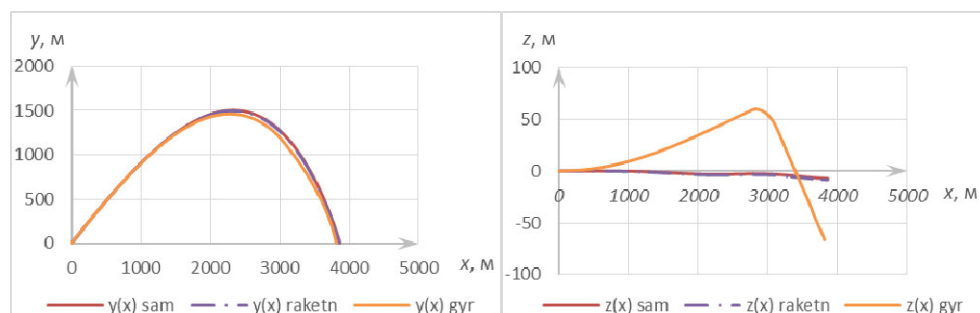


Рис. 6. Изменение траектории движения без учета изменений уравнений Эйлера

На рис. 6 видно, что траектории движения, рассчитанные по трем схемам перехода при использовании «самолетных» уравнений Эйлера (1), не совпадают

между собой. Поэтому при моделировании движения ЛА следует помнить, что уравнения Эйлера должны соответствовать тройке углов, по которым ведется расчет.

Для качественного анализа и визуализации влияния особых точек на результаты моделирования необходимо подобрать такие начальные условия движения ЛА, чтобы в процессе полета возникали особые точки. Рассмотрим поведение самолетной, ракетной и гироскопической схем при следующих начальных условиях полета ЛА:  $\vartheta_{rtk} = 80^\circ$ ,  $\psi_{rtk} = 0^\circ$ ,  $\gamma_{rtk} = 80^\circ$ ,  $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0$  град/с (рис. 7–12). Пересчет начальных условий из самолетной схемы в ракетную и гироскопическую показан в табл. 2.

Таблица 2

Пересчет начальных условий

$\vartheta_{rtk}$	$\psi_{rtk}$	$\gamma_{rtk}$
<i>Самолетная схема</i>		
80,0	0,0	80,0
<i>Ракетная схема</i>		
80,0	0,0	80,0
<i>Гироскопическая схема</i>		
88,2	79,8	9,8

При корректном использовании уравнений Эйлера и правильном пересчете начальных условий (см. табл. 2) движение ЦМ, рассчитанное по различным схемам перехода, будет совпадать (см. рис. 7).

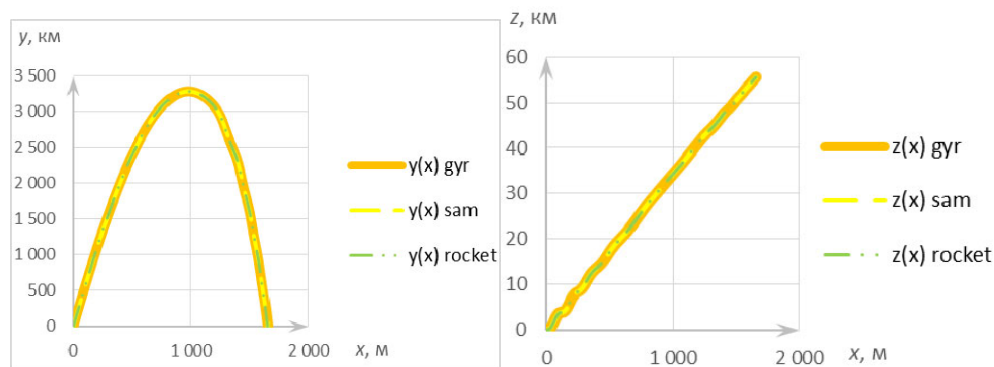
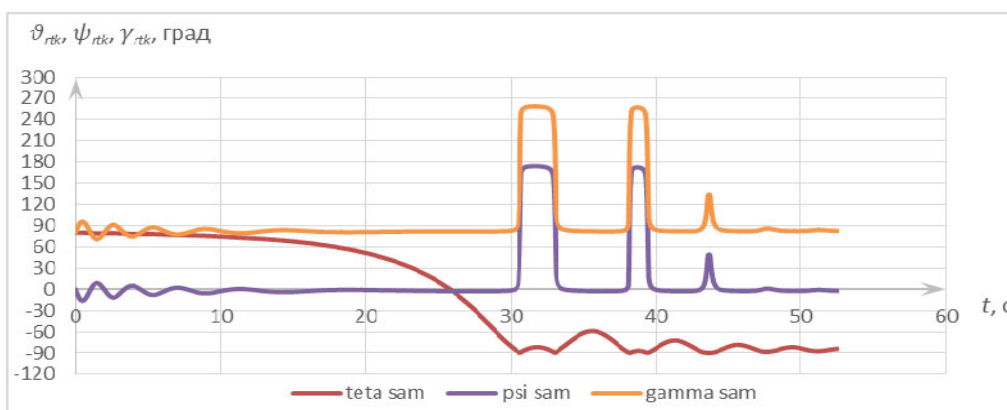


Рис. 7. Изменение траектории движения

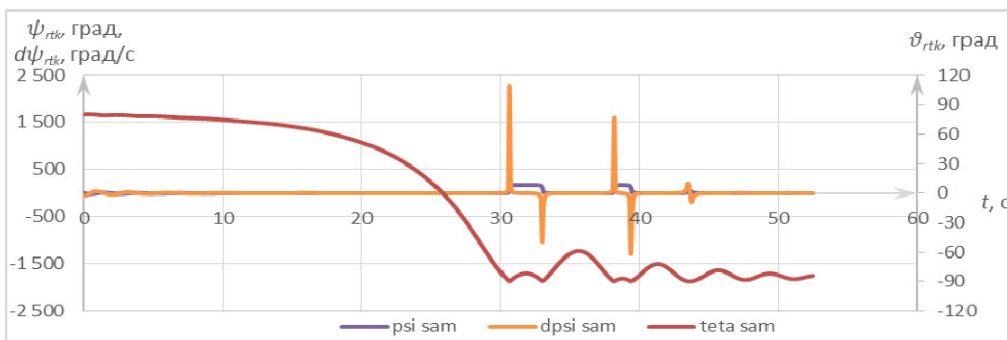
Графики углов, рассчитанных по различным схемам перехода, различаются (рис. 8, 11, 12). Причины несовпадения углов, рассчитанных по различным последовательностям троек углов, были описаны выше.

На рис. 8 видно, что после 30-й секунды полета возникает резкий скачок углов  $\psi_{rtk}$  и  $\gamma_{rtk}$ , что можно легко объяснить, проанализировав уравнения (6). Множители  $1/\cos\vartheta_{rtk}$  и  $\operatorname{tg}\vartheta_{rtk}$  влекут за собой появление особых точек при  $\vartheta_{rtk} \rightarrow \pi/2 \pm \pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . При таких значениях углов производные  $\dot{\psi}_{rtk}$  и  $\dot{\gamma}_{rtk}$  име-

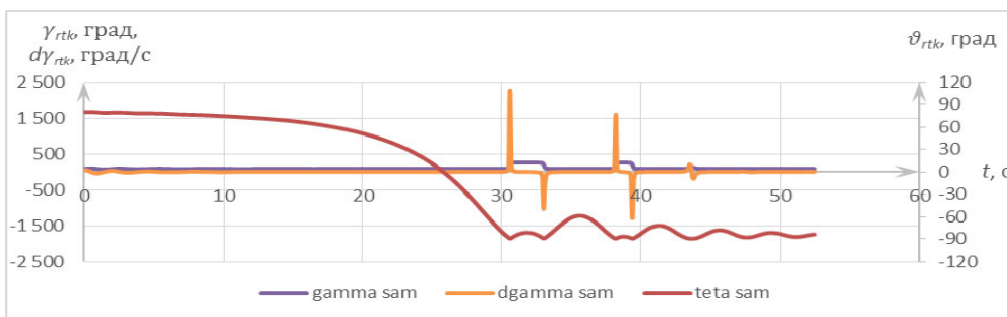
ют скачкообразный характер (рис. 9, 10). При использовании ракетной схемы перехода таких эффектов не наблюдается (рис. 11, 12). При использовании гироскопической схемы (см. рис. 12) на 25-й секунде полета возникает резкое изменение углов  $\psi_{rkt}$ ,  $\vartheta_{rkt}$ , причиной этого служит попадание в особую точку по гироскопическому углу крена  $\gamma_{rkt}$ .



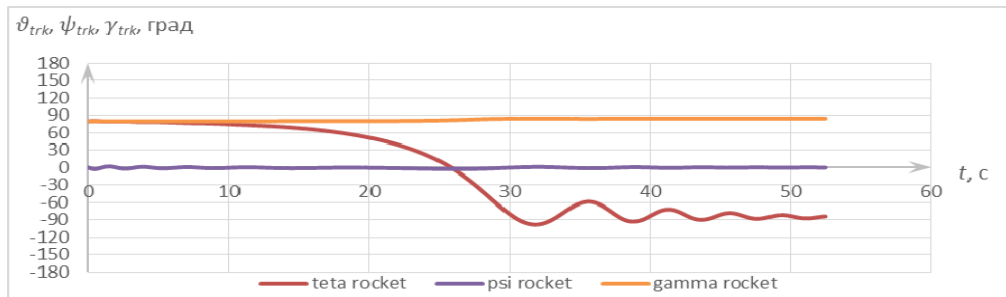
**Рис. 8.** Изменение углов с течением времени, рассчитанных по самолетной ( $\psi_{rkt} \rightarrow \vartheta_{rkt} \rightarrow \gamma_{rkt}$ ) схеме



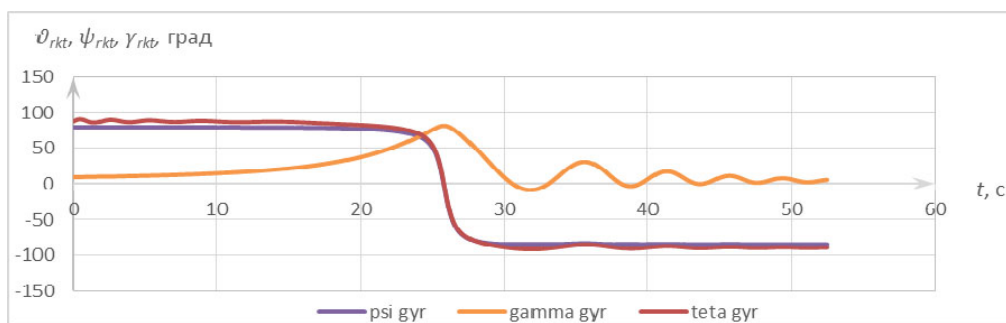
**Рис. 9.** Изменение углов  $\psi_{rkt}$ ,  $\vartheta_{rkt}$  и производной угла  $\psi_{rkt}$  с течением времени, рассчитанных по самолетной ( $\psi_{rkt} \rightarrow \vartheta_{rkt} \rightarrow \gamma_{rkt}$ ) схеме



**Рис. 10.** Изменение углов  $\gamma_{rkt}$ ,  $\vartheta_{rkt}$  и производной угла  $\gamma_{rkt}$  с течением времени, рассчитанных по самолетной ( $\psi_{rkt} \rightarrow \vartheta_{rkt} \rightarrow \gamma_{rkt}$ ) схеме



**Рис. 11.** Изменение углов с течением времени, рассчитанных по ракетной ( $\vartheta_{trk} - \psi_{trk} - \gamma_{trk}$ ) схеме



**Рис. 12.** Изменение углов с течением времени, рассчитанных по гироскопической ( $\psi_{rkt} - \gamma_{rkt} - \vartheta_{rkt}$ ) схеме

Несмотря на различное поведение углов, определенных по самолетной, ракетной, гироскопической схемам, ориентации связанных осей, рассчитанных по этим схемам, совпадают между собой.

По результатам анализа различий зависимостей самолетных, ракетных, гироскопических углов от времени можно сделать несколько выводов. В силу того что изменение самолетных углов имеет скачкообразный характер, а их производные терпят разрыв в окрестности особых точек, использование данной тройки углов в качестве параметров при создании системы управления представляется бесполезным. Поясним это.

Типовые схемы управления угловым положением объекта построены на базе так называемого автомата угловой стабилизации. Сигнал на органы управления формируется, как совокупность сигналов, пропорциональных угловому рассогласованию, скорости изменения угла и, в некоторых случаях, интегралу углового рассогласования по времени [7–12]. При наличии скачкообразных изменений угловых параметров управляющий сигнал также будет иметь «рваную» структуру, что может приводить к излишней загруженности органов управления и сбоям программы управления.

В свою очередь, использование гладких зависимостей в качестве параметров управления снижает риск возникновения неправильной работы системы управления, а также позволяет прогнозировать движение объекта даже аналитически. Подобные графики легко интерпретировать, анализировать, вероят-

ность возникновения ошибки минимальна. В дальнейшем гладкие зависимости позволяют получить простые программы изменения углов, избегая построения сложных кусочно-непрерывных функций.

Учитывая сказанное выше, при данном движении ЛА целесообразно использовать ракетную схему, которая дает гладкие кривые.

Проанализировав полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

– получены (выведены) все необходимые соотношения для анализа перехода из стартовой СК в связанную (матрицы, пересчет углов, кинематические соотношения);

– при использовании различных схем перехода необходим пересчет начальных условий;

– попадание в окрестность особой точки приводит к резкому возрастанию производной угла, однако на ориентацию связанных осей (положение тела) это не влияет;

– при использовании трехпараметрического подхода выбор тройки углов обусловлен требованиями к траектории ЦМ и угловой динамике;

– при создании управления на основе углов и производных углов необходимо выбирать схему перехода (тройку углов), которая не содержит особенностей. В противном случае наличие особенностей приводит к существенному (десятки градусов) изменению угла за короткий (доли секунды) промежуток времени, что усложнит алгоритмы стабилизации системы управления.

## Литература

- [1] ГОСТ 20058–80. *Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения*. Москва, Изд-во стандартов, 1981, 54 с.
- [2] Андреев А.Н., Войтенко С.И. Нуждин Б.С. *Баллистика ракет*. Москва, Военная академия Петра Великого, 2005, 273 с.
- [3] Канатников А.Н., Крищенко А.П. *Линейная алгебра*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006, 336 с.
- [4] Лебедев А.А., Герасюта Н.Ф. *Баллистика ракет*. Москва, Машиностроение, 1970, 244 с.
- [5] Павлов В.А. *Гироскопический эффект, его проявления и использование*. Ленинград, Судостроение, 1972, 285 с.
- [6] ГОСТ 4401-81. *Атмосфера стандартная. Параметры*. Москва, Изд-во стандартов, 1981, 180 с.
- [7] Лысенко Л.Н. *Наведение и наведение и навигация баллистических ракет*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007, 672 с.
- [8] Илюхин С.Н., Беневольский С.В., Грабин В.В. *Формирование облика зенитной управляемой ракеты и динамический анализ её системы управления*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012, 80 с.
- [9] Илюхин С.Н. Синтез системы наведения и контура стабилизации методом ЛАХ на примере произвольной модели ЗУР. *Молодежный научно-технический вестник*, 2012, № 7. URL: <http://ainsnt.ru/doc/467279.html>.
- [10] Илюхин С.Н. Метод импульса силы для оценки энергетики управления полётом. *Молодежный научно-технический вестник*, 2013, № 8. URL: <http://ainsnt.ru/doc/606165.html>.

- [11] Илюхин С.Н., Клишин А.Н., Швыркина О.С. Спутниковое навигационно-баллистическое обеспечение в задаче повышения точности инерциальной навигационной системы. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, № 9. URL: <http://engjournal.ru/catalog/arise/adb/1532.html>.
- [12] Акимов И.О., Илюхин С.Н., Ивлев Н.А., Колосов Г.Е. Методика калибровки магнитометра на этапе наземной диагностики систем космического аппарата. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, № 5. URL: <http://engjournal.ru/catalog/arise/gcle/1762.html>.

**Лыскова Виктория Сергеевна** — студентка кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Научный руководитель** — Илюхин Степан Николаевич, ассистент кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.



## ANALYSIS OF THE IMPACT OF IMPLEMENTATION METHODS OF THREE-PARAMETER APPROACH TO MODELING THE ANGULAR DYNAMICS OF MOVEMENT OF THE AIRCRAFT

V.S. Lysikova

LysikovaViktoria@yandex.ru

SPIN-code: 8637-5918

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

---

### Abstract

*The article considers ways of implementing the three-parameter approach to modeling the angular dynamics of movement of the aircraft. It was made a comparison of aircraft, rocket and gyroscopic schemes for the transition between the starting and associated coordinate systems. It is revealed that the direction cosine matrixes are numerically equal to each other at each integration step, regardless of the choice of the transition scheme, provided that the initial conditions for each of the schemes are correctly recalculated; herewith the corners are not equal to each other. It is shown the impact of singular points on the result of modeling the angular movement of the aircraft. Recommendations on the use of a particular transition scheme were formed.*

### Keywords

*Aircraft dynamics, coordinate systems, Euler angles, direction cosine matrix, transition schemes between starting and associated coordinate systems, angular motion of the aircraft, three-parameter approach to modeling, mathematical description of the flight*

Received 12.10.2018

© Bauman Moscow State Technical University, 2018

---

### References

- [1] GOST 20058-80. Dinamika letatel'nykh apparatov v atmosfere. Terminy, opredeleniya i oboznacheniya [State standard 20058-80. Aircraft dynamics in atmosphere. Terms, definitions and symbols]. Moscow, Izd-vo standartov publ., 1981, 54 p.
- [2] Andreev A.N., Voytenko S.I. Nuzhdin B.S. Ballistika raket [Rocket ballistic]. Moscow, Voennaya akademiya Petra Velikogo publ., 2005, 273 p.
- [3] Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. Lineynaya algebra [Linear algebra]. Moscow, Bauman Press, 2006, 336 p.
- [4] Lebedev A.A., Gerasyuta N.F. Ballistika raket [Rocket ballistic]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1970, 244 p.
- [5] Pavlov V.A. Girokopicheskiy effekt, ego proyavleniya i ispol'zovanie [Gyroscopic effect, its appearance and application]. Leningrad, Sudostroenie publ., 1972, 285 p.
- [6] GOST 4401-81. Atmosfera standartnaya. Parametry [State standard 4401-81. Standart atmosphere. Parameters]. Moscow, Izd-vo standartov publ., 1981, 180 p.
- [7] Lysenko L.N. Navedenie i navedenie i navigatsiya ballisticheskikh raket [Guidance and navigation of ballistic missiles]. Moscow, Bauman Press, 2007, 672 p.
- [8] Ilyukhin S.N., Benevol'skiy S.V., Grabin V.V. Formirovanie oblika zenitnoy upravlyаемoy rakety i dinamicheskiy analiz ee sistemy upravleniya [Conception phase for ground-to-air guided missile and dynamic analysis of its control system]. Moscow, Bauman Press, 2012, 80 p.
- [9] Ilyukhin S.N. Synthesis of guidance system and stabilization loop by log-magnitude diagram method at the example of arbitrary air defense missile model. *Molodezhnyy nauchno-tekhnicheskiiy vestnik*, 2012, no. 7. Available at: <http://ainsnt.ru/doc/467279.html>.

- [10] Ilyukhin S.N. Power impulse method for assessment of flight control energetics. *Molodezhnyy nauchno-tekhnicheskiy vestnik*, 2013, no. 8. Available at: <http://ainsnt.ru/doc/606165.html>.
- [11] Ilyukhin S.N., Klishin A.N., Shvyrkina O.S. Satellite navigation and ballistic support in the problem of improving inertial navigation system accuracy. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2016, no. 9. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/arise/adb/1532.html>.
- [12] Akimov I.O., Ilyukhin S.N., Ivlev N.A., Kolosov G.E. Magnetometer calibration technique for the ground-based stage of spacecraft system diagnostics. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2018, no. 5. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/arise/gcle/1762.html>.

**Lysikova V.S.** — student, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Scientific advisor** — S.N. Ilyukhin, Assist. Professor, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.