УДК 519.61, 519.62 DOI: 10.18698/2541-8009-2019-01-428

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВУХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

Э.В. Белкина belkinaeav@student.bmstu.ru
SPIN-код: 2406-4789

А.А. Логинова loginovaaa@student.bmstu
SPIN-код: 4819-0550

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Выполнено интегрирование системы 12 дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие двух гравитирующих тел. Рассматриваемая проблема является частным случаем гравитационной задачи двух тел. Для учета сил, воздействующих на тела, используется всемирный закон тяготения Ньютона. Получены графические зависимости координат и скоростей от времени. Выполнена оценка погрешности численного интегрирования с помощью правила Рунге. Задача была решена для конкретных значений входных параметров, в общем случае возможно решение для различных исходных данных в зависимости от поставленной задачи.

Ключевые слова

Численное интегрирование, метод Эйлера, правило Рунге, закон всемирного тяготения, дифференциальные уравнения, гравитационная задача, взаимодействие двух тел, оценка погрешности

Поступила в редакцию 10.12.2018

Введение. Рассмотрим движение планеты массой m [1]. В этой задаче изменяется не одна, а все три координаты, и скорость планеты — это не число, а вектор. Эта скорость изменяется со временем под воздействием внешних сил — притяжения Солнца, Луны и других планет:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v};\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \tag{1}$$

Система дифференциальных уравнений (1) описывает *второй закон Ньютона* при постоянной массе m.

Учтем только притяжение планеты Солнцем, которое предполагаем неподвижным (или движущимся с постоянной скоростью), тогда действующая на планету сила $\mathbf{F}$, согласно всемирному закону тяготения Ньютона, зависит только от координат центра масс Земли относительно центра Солнца. Если же мы учтем и обратное притяжение Солнца Землей и взаимное ее притяжение с другими планетами и с Луной, то для вычисления сил нужно будет знать координаты всех центров масс, т. е. $3N$, где N — число принимаемых во внимание небесных тел.

Скорость (т. е. производная по времени каждой из $3N$ координат) также есть вектор размерности $3N$. Система дифференциальных уравнений, соответствующая закону всемирного тяготения: на j-е тело действует (со стороны остальных тел) сила, зависящая от взаимного расположения:

$$\mathbf{F}_j = \sum_{i \neq j}^{N} \mathbf{F}_{ji},$$

где

$$\mathbf{F}_{ji} = \frac{G m_j m_i}{\left|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right|^3} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \Rightarrow \mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij},$$

где $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см^3 · г$^{-1}$ · с$^{-2}$ — *гравитационная постоянная.*

Постановка задачи. Рассмотрим задачу динамики двух материальных точек с постоянными массами m_1, m_2, координатами $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ и скоростями $\mathbf{v}_1(t), \cdots \mathbf{v}_2(t)$ соответственно [2]. На первое тело действует сила

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 = \frac{G m_1 m_2}{\left|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right|^3} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \tag{2}$$

а на второе — сила $-\mathbf{F}$.

Уравнения движения двух гравитирующих тел — система, состоящая из 12 обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m_1}; \ \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{v}_1; \ \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{-\mathbf{F}}{m_2}; \ \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \mathbf{v}_2. \tag{3}$$

Положение системы тел в момент времени t в данной модели характеризует 12 чисел $\mathbf{a} = \left\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \right\rangle$ или, что то же самое, вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{12}$. Движение будем рассматривать по отношению к декартовой прямоугольной системе координат. Тела движутся, т. е. положение системы со временем изменяется, и это движение описывают 12 функций времени $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ — решение системы (3).

Описанная выше задача является частным случаем гравитационной задачи для двух тел [3].

Исследуем модель взаимодействия двух планет, соизмеримых с карликовыми. Проинтегрируем при соответствующем входных параметрах (массы тел, начальные координаты и начальные скорости) на компьютере систему 12 нелинейных дифференциальных уравнений (3) методом Эйлера [4].

Метод Эйлера. Модель динамической системы может быть представлена дифференциальным уравнением [5]. Основное уравнение динамики имеет вид

$$y' = f(x(t), y(t), t).$$

Тогда

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + \Delta t = y(t) + \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta t = y(t) + \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \Delta t = y(t) + f(x, y, t) \cdot \Delta t,$$

или

$$y\left(t + \Delta t\right) \cong y(t) + f(x, y, t) \cdot \Delta t,$$

где $y(t+\Delta t)$ — состояние системы в будущем; $y(t)$ — состояние системы в настоящий момент; $f(x,y,t)$ — скорость приращения; Δt — шаг приращения.

Рассмотрим метод Эйлера непосредственно в контексте поставленной нами задачи [6]. Если поле сил $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x)$ задано (здесь это поле зависит лишь от координат), то можно с помощью системы шести дифференциальных уравнений (1) по начальным условиям $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{v}_0$ «рассчитывать будущее», т. е. $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$.

Для одних функций **F** это исследование можно провести аналитически, а для других численно — например, следующим образом. Пусть в некий начальный момент $t=t_0$ известны положение $\mathbf{x}_0$ и скорость $\mathbf{v}_0$ центра масс. Используем разложение в ряд Тейлора вектор-функций $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$, которые предполагаются непрерывно дифференцируемыми. Удержим нулевой и первый члены разложения. Тогда в момент времени $t=t_0+\Delta t$ эти векторы можно оценить следующим образом:

$$\mathbf{x}_1 \approx \mathbf{x}_0+\Delta t\cdot\mathbf{v}_0;\ \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_0+\Delta t\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)/m. \tag{4}$$

Погрешность этих оценок квадратично убывает с Δt. Затем можно вычислить силу **F** в новой точке и «сделать следующий шаг по времени» — от $t+\Delta t$ к моменту $t=t_0+2\Delta t$ и т. д. Такой способ решения дифференциального уравнения, в котором правые части «замораживаются» на интервале Δt, называют *методом (схемой) Эйлера*.

Первые интегралы при таком приближенном интегрировании уже не будут в точности сохраняться. Оценим погрешности оценки первых интегралов со временем [7]. Численное решение отличается от точного на величину, содержащую члены второго порядка h^2 и выше, с коэффициентами, растущими с номером i. Погрешность в методе Эйлера всегда не превышает значения Ch, где C — постоянная, не зависящая от h. Оценка погрешности дает следующий результат:

$$\varepsilon_{i+1}\le\varepsilon_i+c_1h\varepsilon_i+c_2h^2=\varepsilon_i(1+c_1h)+c_2h^2,$$

где $c_1=\max\limits_{(x,u)\in D}\left|f_u'(x,u)\right|$, $c_2=0{,}5\max\limits_{(x,u)\in D}\left(\left|f_x'(x,u)\right|+\left|f_u'(x,u)\right|\left|f(x,u)\right|\right)$.

Таким образом, метод Эйлера имеет первый порядок точности.

Для численного нахождения практической оценки погрешности воспользуемся правилом Рунге [8]. Предположим, что метод вычисления значений решения задачи (3) фиксирован и имеет порядок точности s. Вычислим значение в точке $\mathbf{x}_m$ с шагом h и $h/2$. Полученные значения обозначим через $y_m^{(h)}$ и $y_m^{(h/2)}$ соответственно. Тогда главный член погрешности можно найти по формуле

$$\mathrm{R}_m^{(h)}=\frac{y_m^{(h/2)}-y_m^{(h)}}{2^k-1},$$

где k — порядок точности (для метода Эйлера k = 1).

Численное интегрирование. Для численного решения системы 12 нелинейных дифференциальных уравнений (3) воспользуемся средой MATLAB [9].

Начальные данные будут иметь следующий вид:

$$t_0 = 0 \text{ с};$$
$$\mathbf{x}_{10} = 1{,}2 \cdot 10^8 \text{ км}; \ \mathbf{y}_{10} = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ км}; \ \mathbf{z}_{10} = 2{,}1 \cdot 10^8 \text{ км};$$
$$\mathbf{x}_{20} = 2 \cdot 10^8 \text{ км}; \ \mathbf{y}_{20} = 1 \cdot 10^8 \text{ км}; \ \mathbf{z}_{20} = 1{,}4 \cdot 10^8 \text{ км};$$
$$\mathbf{v}_{1x_0} = 1{,}1 \text{ км/с}; \mathbf{v}_{1y_0} = 2{,}2 \text{ км/с}; \mathbf{v}_{1z_0} = 4 \text{ км/с};$$
$$\mathbf{v}_{2x_0} = 1 \text{ км/с}; \mathbf{v}_{2y_0} = 1 \text{ км/с}; \mathbf{v}_{2z_0} = 2 \text{ км/с};$$
$$m_1 = 13 \cdot 10^{21} \text{ кг}; \ m_2 = 16 \cdot 10^{21} \text{ кг}.$$

Порядок величин соответствует реальным объектам. Для нахождения проекций сил в каждой точке будем пользоваться соотношением (2).

На основании (4) получим графические зависимости координат $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ (рис. 1, 2) и скоростей $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ (рис. 3, 4). Для оценки погрешности измерения воспользуемся правилом Рунге практической оценки погрешности [10].

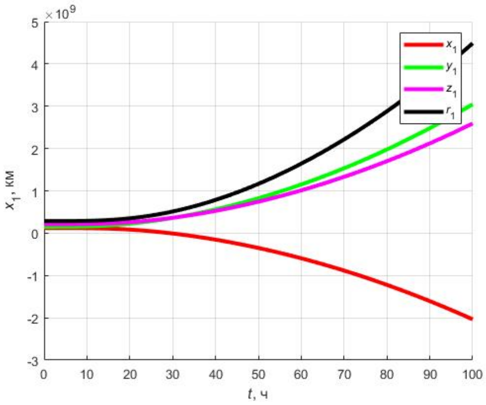

Рис. 1. Зависимости координат и радиус-вектора тела 1 от времени

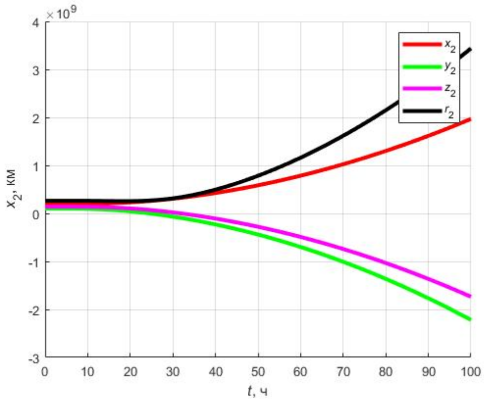

Рис. 2. Зависимости координат и радиус-вектора тела 2 от времени

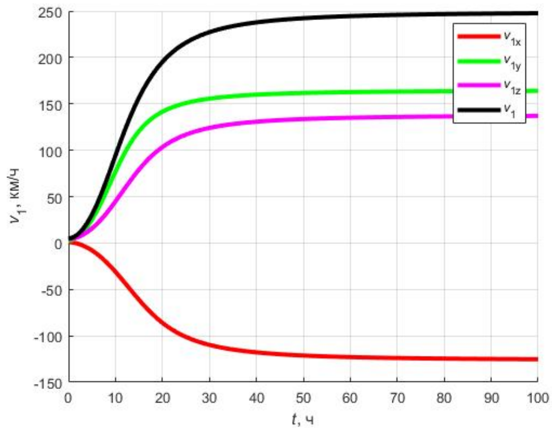

Рис. 3. Зависимости проекций скоростей и модуля вектора скорости тела 1

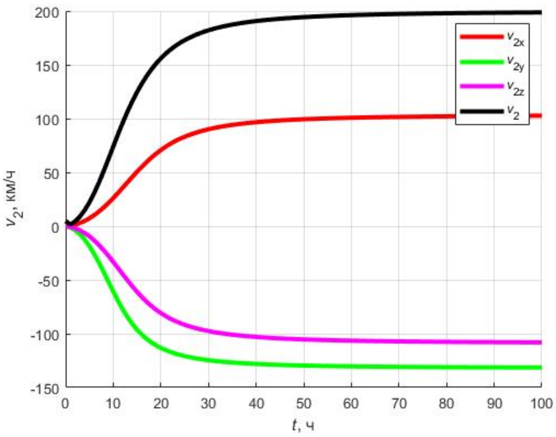

Рис. 4. Зависимости проекций скоростей и модуля вектора скорости тела 2

Заключение. Для решения гравитационной задачи двух тел, в качестве которых были выбраны модели двух планет, соизмеримых с карликовыми, использовали численный метод интегрирования — метод Эйлера. В результате построены графические зависимости скоростей и координат от времени. Численно получены оценки погрешности измерений с помощью правила Рунге практической оценки погрешности. Как в случае зависимости скорости от времени, так и в случае зависимости координаты от времени полученная оценка погрешности совпала с теоретической.

Литература

[1] Александров Ю.В. Небесная механика. Харьков, ХНУ им. Каразина, 2006.
[2] Гордин В.А. Дифференциальные и разностные уравнения. М., ВШЭ, 2016.
[3] Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М., Наука, 1977.
[4] Дубошин Н.Г. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., Наука, 1978.

[5] Валов А.В. Численные методы решения уравнений для инженеров. Челябинск, ЮУрГу, 2012.
[6] Федоренко Ю.В., Аксенов С.А. Описание движения космического аппарата с помощью дифференциальных уравнений. *Новые информационные методы в автоматизированных системах*, 2014, № 17, с. 258–271.
[7] Федотов А.А., Храпов П.В. Численные методы. М., МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012.
[8] Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М., Директ-Медиа, 2013.
[9] Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MATLAB. М., СПб., Киев, Вильямс, 2001.
[10] Мышенков В.И., Мышенков Е.В. Численные методы. Ч. 2. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М., МГУЛ, 2005.

Белкина Элеонора Вадимовна — студентка кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Логинова Анастасия Алексеевна — студентка кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Баркин Михаил Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEM OF TWO GRAVITATING BODIES BY THE EULER METHOD

E.V. Belkina belkinaeav@student.bmstu.ru
SPIN-code: 2406-4789

A.A. Loginova loginovaaa@student.bmstu
SPIN- code: 4819-0550

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

A system of 12 differential equations describing the interaction of two gravitating bodies was integrated in this work. The considered problem is a special case of two bodies gravitational problem. To account for the forces acting on the body, Newton's law of universal gravitation is used. Graphs of coordinates and speeds depending on time are obtained. The estimation of numerical integration error is performed using the Runge rule. The problem was solved for specific values of input parameters; in the general case, it is possible to find the solution for different source data depending on the task.

Keywords

Numerical integration, Euler method, Runge rule, law of universal gravitation, differential equations, gravitational problem, interaction of two bodies, error estimate

Received 10.12.2018

References

[1] Aleksandrov Yu.V. Nebesnaya mekhanika [Celestial mechanics]. Khar'kov, V.N. Karazin Kharkiv National University, 2006. (in Russ.)

[2] Gordin V.A. Differentsial'nye i raznostnye uravneniya [Differential and finite-difference equations]. Moscow, HSE Publ., 2016. (in Russ.)

[3] Beletskiy V.V. Ocherki o dvizhenii kosmicheskikh tel [Essay about space body movement]. Moscow, Nauka Publ., 1977. (in Russ.)

[4] Duboshin N.G. Nebesnaya mekhanika. Analiticheskie i kachestvennye metody [Celestial mechanics. Analytical and qualitative methods]. Moscow, Nauka Publ., 1978. (in Russ.)

[5] Valov A.V. Chislennye metody resheniya uravneniy dlya inzhenerov [Numerical methods of solving equations for engineers]. Chelyabinsk, SUSU Publ., 2012. (in Russ.)

[6] Fedorenko Yu.V., Aksenov S.A. Description of the spacecraft movement by means of differential equations. *Novye informatsionnye metody v avtomatizirovannykh sistemakh*, 2014, no. 17, pp. 258–271. (in Russ.)

[7] Fedotov A.A., Khrapov P.V. Chislennye metody [Numerical methods]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2012. (in Russ.)

[8] Verzhbitskiy V.M. Osnovy chislennykh metodov [Fundamentals of numerical methods]. Moscow, Direkt-Media Publ., 2013. (in Russ.)

[9] Mathews J.H., Fink K.D. Numerical methods using Matlab. Prentice Hall, 1998. (Russ. ed.: Chislennye metody. Ispol'zovanie MATLAB. Moscow, Sankt-Petersburg, Kiev, Vil'yams Publ., 2001.)

[10] Myshenkov V.I., Myshenkov E.V. Chislennye metody. Ch. 2. Chislennoe reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Numerical methods. P. 2. Numerical solution of common differential equations]. Moscow, MGUL Publ., 2005. (in Russ.)

Belkina E.V. — Bachelor's Degree Student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Loginova A.A. — Bachelor's Degree Student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — M.Yu. Barkin, Cand. Sc., Assoc. Professor, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.