

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ТЕНЕВОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СТАТИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ГИБКИХ СТЕРЖНЕЙ

И.А. Цаплин

igor_96@list.ru

SPIN-код: 9556-2100

А.А. Кирюхин

arkiryukhin1999@gmail.com

SPIN-код: 1800-0060

АО «Мосинжпроект», Москва, Российская Федерация
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Для решения плоских задач статики тонких стержней в случае больших перемещений и поворотов разработана конечно-элементная модель гибкого стержня, позволяющая реализовать метод теневого элемента. Деформированное состояние конечного элемента представлено в виде суперпозиции растяжения-сжатия и изгиба. Каждый из двух узлов конечного элемента имеет три степени свободы: два линейных перемещения и поворот. Энергию деформаций элемента вычисляли по малым относительным перемещениям и поворотам узлов, которые выделяли из полных перемещений и поворотов. Неизвестные узловые перемещения определяли с помощью прямой минимизации полного потенциала модели стержня. Поиск минимума выполнен методом Ньютона в программном пакете Wolfram Mathematica. Разработанный конечный теневой элемент протестирован на задачах деформирования криволинейных стержней. Сопоставление полученных результатов с известными решениями тех же задач с помощью дифференциальных уравнений подтвердило эффективность реализуемого метода.

Ключевые слова

Теневой конечный элемент, гибкий стержень, деформация, закон Гука, напряженно деформированное состояние, метод Ньютона, принцип Лагранжа, полный потенциал упругой системы

Поступила в редакцию 09.11.2018

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019

На практике существуют такие конструкции, в которых происходит сильное изгибание стержня, хотя линейная теория упругого изгиба стержней предполагает малость перемещений при изгибе по сравнению с длиной стержня и радиусом его начальной кривизны. Поэтому актуальным представляется решение задач по определению больших перемещений при изгибе, когда в процессе деформации тонкой детали сильно изменяется ее первоначальная конфигурация, причем перемещения при изгибе становятся соизмеримыми с длиной самой детали [1]. Для изучения важных особенностей поведения гибких деталей и возможных форм упругой линии при изгибе с большими перемещениями нельзя использовать обычную теорию линейного изгиба.

Для определения перемещений и внутренних силовых факторов разработано множество методов, основанных на решении дифференциальных уравнений различных порядков. Однако в большинстве случаев это связано с решением систем нескольких десятков уравнений и таким же количеством неизвестных. Сложность аналитических методов и невозможность их применения на широком спектре задач влечет за собой неминуемое использование метода конечных элементов [1]. При использовании подходящих методов оптимизации можно упростить как описание самого конечного элемента, так и численные расчеты. Для этого разрабатывают новые технологии вычислений, которые демонстрируют адекватные результаты несмотря на многообразие типов конечных элементов. Так, при допущении о малости деформаций можно использовать представление о теневом состоянии конечного элемента [2], до которого стержень совершает жесткое смещение, а само актуальное деформированное состояние считается близким к теневому. При этом перемещение узлов конструкции устанавливается посредством итерационного решения задачи о минимизации полного потенциала упругой системы каким-либо из методов спуска [3]. Возможность привлечения для реализации расчетных процедур вычислительной техники делает возможным применение метода конечных элементов для решения самых сложных задач механики деформируемых тел.

Целью работы является реализация метода теневого элемента в задачах статики деформирования конструкций, его апробация и проверка при расчете напряженно-деформированного состояния криволинейных гибких стержней.

Инженерные конструкции можно рассматривать как совокупность элементов, соединенных в конечном числе узловых точек. С помощью приемов строительной механики можно описывать свойства и исследовать поведение конструкции при известных соотношениях между силами и перемещениями. Число точек связи в сплошной среде бесконечно, это и составляет основную трудность при получении численных решений. Введение понятия конечных элементов позволяет преодолеть эту трудность путем разбиения сплошного тела на отдельные элементы, которые взаимодействуют между собой только в узловых точках. Ансамбль из конечных элементов и узлов является главным объектом конечно-элементной модели деформируемого тела.

В зависимости от типа конструкции и характера ее деформации конечные элементы (КЭ) имеют различную форму. Стержневой КЭ применяют для создания одноосного напряженного состояния при растяжении-сжатии, кручении или изгибе. В статье рассмотрен плоский конечный элемент, находящийся в одной плоскости с действующими на него нагрузками. Каждый узел этого конечного элемента имеет три степени свободы: линейные перемещения u , v и поворот ϑ . Деформированное состояние такого элемента для линейной задачи можно представить в виде суперпозиции деформированных состояний растяжения-сжатия и изгиба.

Согласно С.Ф. Маклакову, «метод конечных элементов представляет собой реализацию принципа минимума полной потенциальной энергии для расчета

напряженно-деформированного состояния (НДС) деформируемых систем» [4]. Связь метода конечных элементов с процедурой минимизации позволяет применять его при решении задач в различных областях техники в соответствии со следующим алгоритмом [4].

1. Разбиение соответствующей конструкции на конечное число подобластей (конечных элементов), имеющих общие узловые точки и в совокупности аппроксимирующих форму конструкции (дискретизация тела).
2. Представление полной потенциальной энергии упругого тела как функции перемещений его узлов.
3. Составление системы уравнений для перемещений узлов, обеспечивающих минимум полной потенциальной энергии упругого тела.
4. Решение системы дифференциальных уравнений и определение перемещений узлов.
5. Установление напряженно деформированного состояния конструкции по перемещениям ее узлов.

Рассмотрим участок гибкого стержня (КЭ), представленного на рис. 1, совершивший перемещение из начального недеформированного состояния (0) в актуальное деформированное состояние (2).

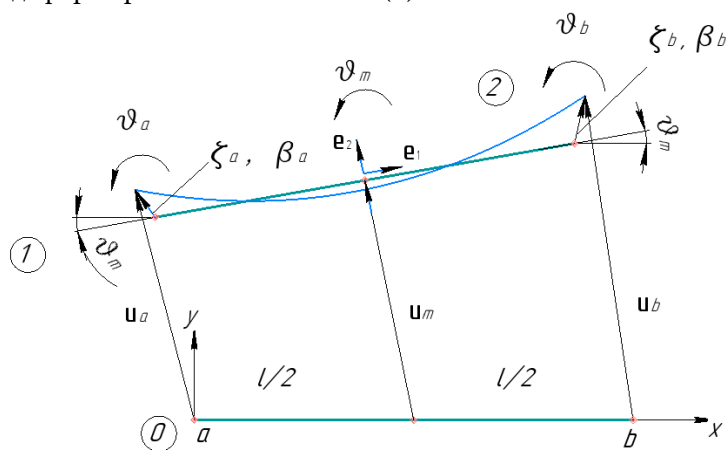


Рис. 1. Теневой КЭ для прямого стержня

Перемещения стержня описываются с помощью векторов линейных перемещений центров сечений a и b \mathbf{u}_a и \mathbf{u}_b , а также углами поворотов ϑ_a и ϑ_b . Выделяется близкое к состоянию (2) промежуточное состояние (1), в которое стержень попал бы, если бы он не деформировался, а совершал только жесткое движение. Состояние (1) и (2) связывают малые деформации и, следовательно, малые относительные перемещения и повороты.

Определим следующие вектор и угол поворота (рис. 2), которые позволят полностью установить положение КЭ в состоянии (1):

$$\mathbf{u}_m = \frac{\mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b}{2};$$

$$\vartheta_m = \frac{\vartheta_a + \vartheta_b}{2},$$

где \mathbf{u}_m — вектор перемещения центрального сечения КЭ; ϑ_m — угол среднего поворота.

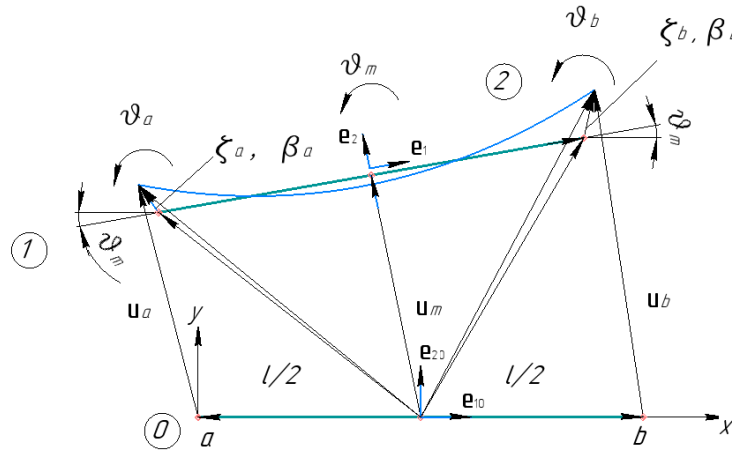


Рис. 2. Векторы перемещений и углы поворота теневого КЭ прямого стержня

Найдем углы малых поворотов β_a и β_b :

$$\beta_a = \vartheta_a - \vartheta_m;$$

$$\beta_b = \vartheta_b - \vartheta_m.$$

Определим векторы малых перемещений ζ_a и ζ_b путем простых векторных операций:

$$\zeta_a = \left(\mathbf{u}_a - \mathbf{e}_{10} \frac{l}{2} \right) - \left(\mathbf{u}_m - \mathbf{e}_1 \frac{l}{2} \right);$$

$$\zeta_b = \left(\mathbf{u}_b + \mathbf{e}_{10} \frac{l}{2} \right) - \left(\mathbf{u}_m + \mathbf{e}_1 \frac{l}{2} \right);$$

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_m \\ \sin \vartheta_m \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{e}_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Представим все векторы в скалярном виде:

$$\mathbf{u}_a = \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{u}_b = \begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{u}_m = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_a + u_b \\ v_a + v_b \end{Bmatrix}.$$

Подставляя все в ζ_a и ζ_b , запишем эти векторы в скалярном виде:

$$\begin{Bmatrix} \zeta_{a1} \\ \zeta_{a2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{u_a - u_b}{2} + \frac{l}{2} \cos \vartheta_m - \frac{l}{2} \\ \frac{v_a - v_b}{2} + \frac{l}{2} \sin \vartheta_m \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} \zeta_{b1} \\ \zeta_{b2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{u_b - u_a}{2} - \frac{l}{2} \cos \vartheta_m + \frac{l}{2} \\ \frac{v_b - v_a}{2} - \frac{l}{2} \sin \vartheta_m \end{Bmatrix}.$$

Вектор обобщенных относительных перемещений \mathbf{z} выглядит следующим образом:

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \zeta_{a1} \\ \zeta_{a2} \\ \beta_a \\ \zeta_{b1} \\ \zeta_{b2} \\ \beta_b \end{Bmatrix}.$$

Представленные выше формулы записаны для КЭ, который в исходном состоянии расположен параллельно оси x . Если ось стержня в исходном состоянии отлична от прямой линии, то касательная к ней повернута относительно координатной оси на некоторый угол. Тогда при разбиении искривленного стержня на КЭ должен учитываться еще один параметр ϑ_0 , характеризующий угловое положение КЭ относительно оси x в исходном состоянии (рис. 3). Таким образом, отличие в описании геометрии криволинейного стержня по сравнению с прямым стержнем состоит только в наличии указанного дополнительного параметра ϑ_0 . Учет начального поворота КЭ задавали матрицей поворота $[\mathbf{R}_0]$ и несложными дополнениями предыдущих формул.

В выражениях для малых перемещений содержатся векторы направляющих ортов. Для криволинейного стержня в скалярном виде орты записывают с учетом ϑ_0 :

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \cos(\vartheta_m + \vartheta_0) \\ \sin(\vartheta_m + \vartheta_0) \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{e}_0 = \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_0 \\ \sin \vartheta_0 \end{Bmatrix}.$$

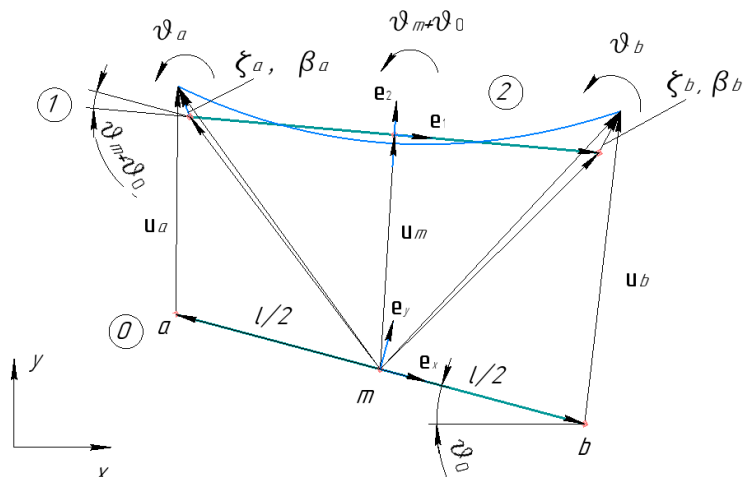


Рис. 3. Векторы перемещений и углы поворота теневого КЭ криволинейного стержня

Тогда перемещения принимают вид

$$\begin{cases} \zeta_{a1} \\ \zeta_{a2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{u_a - u_b}{2} + \frac{l}{2} (\cos(\vartheta_m + \vartheta_0) - \cos \vartheta_0) \\ \frac{v_a - v_b}{2} + \frac{l}{2} (\sin(\vartheta_m + \vartheta_0) - \sin \vartheta_0) \end{cases}.$$

Матрица поворота, характеризующая исходное положение КЭ:

$$[\mathbf{R}_0] = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_0 & \sin \vartheta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \vartheta_0 & \cos \vartheta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \vartheta_0 & \sin \vartheta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \vartheta_0 & \cos \vartheta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Основная особенность гибких стержней заключается в том, что осевая линия нагруженного стержня может сильно отличаться от осевой линии естественного состояния стержня, но при этом его деформации подчиняются закону Гука [5]. Перемещения, возникающие при деформации стержня, столь малы, что его форма и размеры остаются практически неизменными. Однако в технике встречаются такие конструкции, в которых стержни сильно изгибаются. В связи с этим весьма актуальной является задача определения больших перемещений при изгибе, когда в процессе изгиба тонкой детали сильно изменяется ее первоначальная конфигурация, причем перемещения при изгибе становятся соизмеримыми с длиной самой детали [1]. Каждый стержень в конструкции имеет свою ориентацию. Поэтому при расчете вводится понятие местной, или

локальной (связанной с осью стержня) и общей для всей конструкции систем координат. В связи с этим возникает необходимость перехода от матрицы жесткости, построенной в локальной системе координат, к матрице жесткости, определенной в глобальной системе координат. Согласно С.С. Гаврюшину данное преобразование можно выполнить по следующей формуле [6]:

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{K}_{local}] [\mathbf{R}],$$

где $[\mathbf{K}]$ — матрица жесткости стержня в теневом положении; $[\mathbf{K}_{local}]$ — матрица жесткости в локальной системе координат; $[\mathbf{R}]$ — матрица поворота на угол $\vartheta_0 + \vartheta_m$ (записывается аналогично матрице (1)).

Согласно принципу Лагранжа [7], полный потенциал упругой системы Π равен сумме потенциальной энергии деформаций и потенциала внешних сил:

$$\Pi = U + V, \quad (2)$$

где U — потенциальная энергия упругой деформации; V — потенциал внешних сил.

Следуя работе [2], полагаем, что потенциальная энергия деформации определяется лишь относительными перемещениями и поворотами и выражается в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T [\mathbf{K}] \mathbf{z}.$$

Выражение (2), с помощью которого полный потенциал системы записывается как функция перемещений, вместе с граничными условиями представляет собой функционал Лагранжа [7]. Из принципа возможных перемещений следует положение о стационарном значении функционала полной потенциальной энергии системы:

$$\delta\Pi = 0.$$

Координаты положения стержня известны только в исходном состоянии. В деформированном состоянии их можно определить из условия минимума полного потенциала:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial u_j} = 0; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v_j} = 0; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta_j} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где j — номер узла в дискретной модели гибкого стержня.

Перед применением процедуры минимизации полного потенциала необходимо учесть закрепления конструкции. В задачах статики перемещения теневого КЭ должны исключать перемещения нагруженной конструкции как жесткого целого. В этом случае разрешающая система уравнений после учета граничных условий будет иметь единственное решение. Учет граничных условий осуществляется путем исключения нулевых степеней свободы u , v или ϑ для того узла, на который наложены связи.

Для решения уравнений (3) используется итерационный метод Ньютона [3]. На каждом шаге по предыдущему известному приближению x_{i-1} находят следующее еще более точное значение:

$$x_i = x_{i-1} + a_i,$$

где a_i — поправка к предыдущему решению.

Чтобы определить поправки, нелинейная система уравнений заменяется линейной системой, решения которой и являются поправками a_i . Для определения поправок необходимо решать систему линейных уравнений столько раз, сколько требуется итераций для обеспечения необходимой точности определения искомого величин.

В процессе решения настоящей задачи поиск минимума был реализован с помощью встроенной в Wolfram Mathematica функции FindMinimum с заданной точностью. Особенности процедуры проиллюстрированы в работе [8].

Апробацию метода теневого конечного элемента и его проверка при расчете напряженно-деформированного состояния гибких стержней проводили на основе сопоставления результатов с известными решениями ряда задач деформирования криволинейных стержней, описанных в работе [9]. Заметим, что в данной книге все задачи решены для нерастяжимого стержня, но в обычном МКЭ стержень нерастяжимым сделать нельзя, поэтому учет нерастяжимости был приближенно выполнен фиктивным увеличением площади поперечного сечения стержня. Тестирование выполняли на нескольких задачах, в данной статье представлены две из них.

В первой задаче рассмотрен прямой консольно закрепленный гибкий стержень (рис. 4) длиной L и постоянной изгибной жесткости EI . Произведено нагружение поперечной силой P трех безразмерных значений: $\bar{P}_1 = 1,9$; $\bar{P}_2 = 6,28$; $\bar{P}_3 = 50$. Обезразмеривание выполнено аналогично работе [6], т. е. $\bar{P} = PL^2/(EI)$.

Балка разбита на $n = 40$ конечных элементов, так как этого достаточно для достижения требуемой точности решения и получения визуально гладких линий (ломаная линия выглядит как гладкая кривая). Внешняя сила учтена в потенциале внешних сил:

$$V = -Pv_{n+1}, \quad (4)$$

где v_{n+1} — перемещение крайнего узла стержня в направлении оси y .

Для минимизации полного потенциала заданы следующие граничные условия:

$$u_1 = 0; v_1 = 0; \vartheta_1 = 0,$$

где индекс 1 соответствует первому узлу стержня.

В ходе решения с помощью встроенной в Wolfram Mathematica процедуры FindMinimum получены перемещения узлов конструкции. На рис. 4, а показаны конфигурации деформированного стержня.

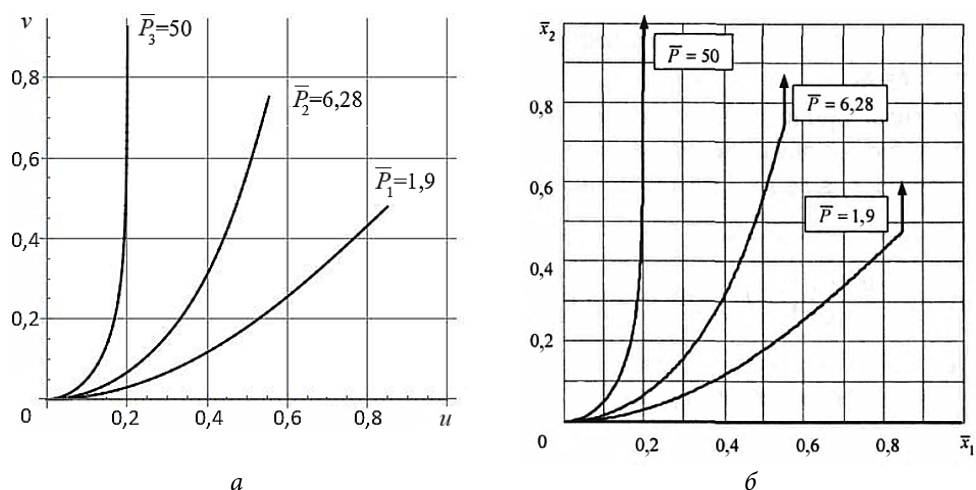


Рис. 4. Конфигурации деформированного прямого стержня:

а — полученное решение; б — известное решение [6]

Сравнение полученных результатов с данными работы [6] подтверждает, что значения перемещений практически совпадают с решением дифференциальных уравнений гибкого стержня (рис. 4, а, б).

Во второй задаче рассмотрен стержень с изломом оси, который состоит из двух прямолинейных стержней равной длины (рис. 5). Общая длина двух стержней равна L , изгибная жесткость EI . Для нагружения стержня приняты следующие безразмерные значения силы: $\bar{P}_1 = 0,3$; $\bar{P}_2 = 0,72$; $\bar{P}_3 = 3,36$; $\bar{P}_4 = 13,24$; $\bar{P}_5 = -0,39$; $\bar{P}_6 = -9,03$. Осевая линия была задана следующим образом:

$$x_1(s) = 0, s \leq \frac{L}{2};$$

$$y_1(s) = -s, s \leq \frac{L}{2};$$

$$x_2(s) = s, s \geq \frac{L}{2};$$

$$y_2(s) = -\frac{L}{2}, s \geq \frac{L}{2}.$$

Весь стержень был разбит на 100 КЭ. Внешняя сила учтена в потенциале внешних сил по формуле (4), а граничные условия аналогичны условиям предыдущей задачи. С помощью процедуры FindMinimum получены перемещения узлов данной конструкции — на рис. 5, а приведены конфигурации деформированного стержня с изломом оси при различных нагрузках.

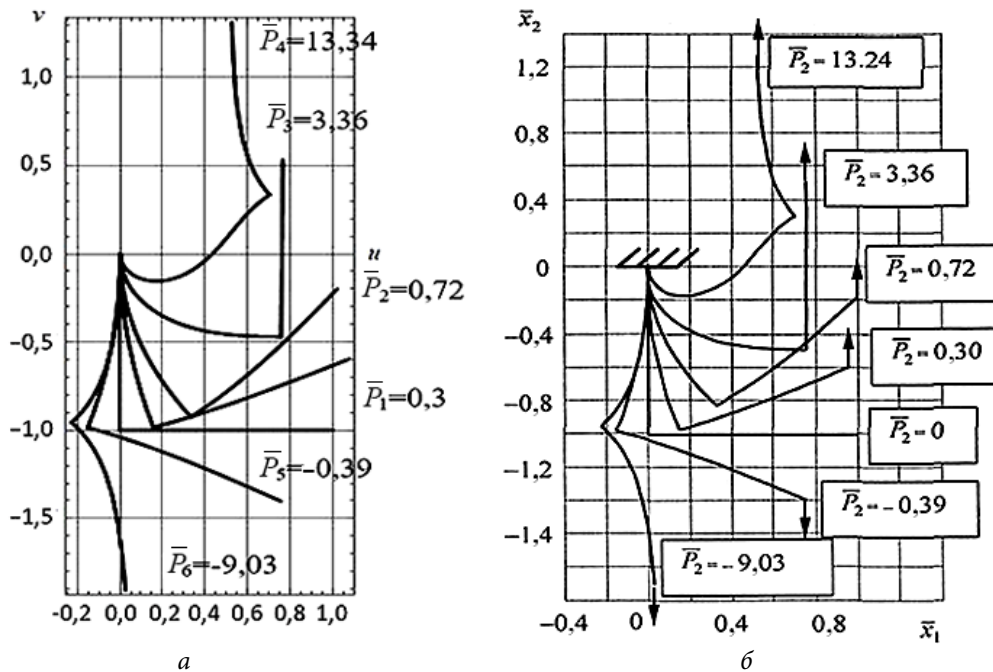


Рис. 5. Конфигурации деформированного стержня с изломом оси:

а — полученное решение; б — известное решение [9]

Идентичность полученных результатов с данными работы [9], показанными на рис. 5, б, свидетельствует об обеспечении требуемой точности расчета НДС криволинейных гибких стержней методом теневого КЭ.

Выводы. С использованием метода теневого КЭ разработана конечно-элементная модель гибкого стержня для решения плоских задач статики машиностроительных конструкций. Сопоставление полученных результатов с известными решениями дифференциальных уравнений подтвердило эффективность реализуемого метода и перспективность его применения для решения сложных геометрически нелинейных задач упругого деформирования стержней в плоскости действия внешних сил.

Литература

- [1] Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М., Наука, 1986.
- [2] Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с раздельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для мо-

- делирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов. *Труды МАИ*, 2017, № 92. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=76832&eng=N>
- [3] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
- [4] Маклаков С.Ф. Расчет стержневых систем методом конечных элементов. Ростов-на-Дону, РГУПС, 2008.
- [5] Светлицкий В.А. Механика стержней. Ч. 1 Статика. М., Высшая школа, 1987.
- [6] Гаврюшин С.С. Вычислительная механика. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.
- [7] Игнатьев А.В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Ч. 3. *Вестник МГСУ*, 2015, № 1, с. 16–26.
- [8] Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления. М., ДМК-Пресс, 2008.
- [9] Левин В.Е., Пустовой Н.Е. Механика деформированных криволинейных стержней. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2008.
- [10] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., Мир, 1975.
- [11] Пономарев С.Д., Андреева Л.Е. Расчет упругих элементов машин и приборов. М., Машиностроение, 1980.
- [12] Фокин В.Г. Метод конечных элементов в механике деформируемого твердого тела. Самара, СамГТУ, 2010.

Цаплин Игорь Алексеевич — инженер отдела управления контроля стоимости строительно-монтажных работ АО «Мосинжпроект», Москва, Российская Федерация.

Кирюхин Артем Александрович — бакалавр кафедры «Прикладная механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Сорокин Федор Дмитриевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Фомичёва Валентина Фёдоровна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**IMPLEMENTATION OF THE SHADOW FINITE ELEMENT METHOD
FOR SOLVING PROBLEMS OF DEFORMATION STATICS
OF CURVILINEAR FLEXIBLE RODS**

I.A. Tsaplin

igor_96@list.ru

SPIN-code: 9556-2100

A.A. Kiryukhin

arkiryukhin1999@gmail.com

SPIN-code: 1800-0060

JSC Mosinzhproukl, Moscow, Russian Federation

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper is concerned with the a finite element model of a flexible rod solving flat problems of statics of thin rods in the case of large displacements and rotations which allows to implement the shadow element method. The deformed state of the final element is represented as a superposition of tension-compression and bending. Each of the two nodes of the finite element has three degrees of freedom: two linear displacements and rotation. The authors calculated the energy of deformations of the element by small relative displacements and rotations of the nodes, which were separated from full displacements and rotations. Unknown nodal displacements were determined using direct minimization of the full potential of the rod model. In this paper, the authors used the Newton method in the Wolfram Mathematic software package to the search for the minimum. The developed final shadow element is tested on the tasks of deforming curvilinear rods. In conclusion, the paper points out that the comparison of the obtained results with known solutions of the same problems using differential equations confirmed the effectiveness of the method being implemented.

Keywords

Shadow finite element, flexible rod, deformation, Hooke's law, stress-strain state, Newton method, Lagrange principle, full potential of an elastic system

Received 09.11.2018

© Bauman Moscow State Technical University, 2019

References

- [1] Popov E.P. Teoriya i raschet gibkikh uprugikh sterzhney [Theory and calculation of elastic rods]. Moscow, Nauka Publ., 1986 (in Russ.).
- [2] Popov V.V., Sorokin F.D., Ivannikov V.V. A flexible rod finite element with separate storage of cumulated and extra rotations for large displacements of aircraft structural parts modeling. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=76832&eng=N> (in Russ.).
- [3] Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy Publ., 2015 (in Russ.).
- [4] Maklakov S.F. Raschet sterzhnevnykh sistem metodom konechnykh elementov [Calculation of rod systems by finite elements method]. Rostov-na-Donu, RSTU Publ., 2008 (in Russ.).

- [5] Svetlitskiy V.A. Mekhanika sterzhney. Ch. 1 Statika [Rod mechanics. P. 1. Statics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1987 (in Russ.).
- [6] Gavryushin S.S. Vychislitel'naya mekhanika [Computational mechanics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2017 (in Russ.).
- [7] Ignat'yev A.V. Main formulations of the finite element method for the problems of structural mechanics. Part 3. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering], 2015, no. 1, pp. 16–26 (in Russ.).
- [8] D'yakonov V.P. *Mathematica 5.1/5.2/6. Programmirovaniye i matematicheskie vychisleniya* [Mathematica 5.1/5.2/6. Programming and mathematical calculations]. Moscow, DMK-Press Publ., 2008 (in Russ.).
- [9] Levin V.E., Pustovoy N.E. Mekhanika deformirovannykh krivolinyeynykh sterzhney [Mechanics of curved bar deformation]. Novosibirsk, NGTU Publ., 2008 (in Russ.).
- [10] Zienkiewicz O.C. The finite element method in engineering science. McGraw-Hill, 1971. (Russ. ed.: *Metod konechnykh elementov v tekhnike*. Moscow, Mir Publ., 1975.)
- [11] Ponomarev S.D. Andreeva L.E. Raschet uprugikh elementov mashin i priborov [Calculation of elastic elements for machines and devices]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1980 (in Russ.).
- [12] Fokin V.G. Metod konechnykh elementov v mekhanike deformiruемого tverdogo tela [Finite elements method in deformable body mechanics]. Samara, SamGTU Publ., 2010 (in Russ.).

Tsaplin I.A. — Engineer, Department of Control Cost of construction and installation works, JSC Mosinzhproekt, Moscow, Russian Federation.

Kiryukhin A.A. — Bachelor's Degree Student, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — D.F. Sorokin, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — V.F. Fomicheva, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.