

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В СИСТЕМЕ СОЛНЦЕ – ВЕНЕРА С ЦЕЛЬЮ ФОРМИРОВАНИЯ ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ АТМОСФЕРЫ ВЕНЕРЫ

В.А. Зубко

werrert1@gmail.com

SPIN-код: 1967-6719

А.А. Беляев

don.beliae2012@yandex.ru

SPIN-код: 1941-4981

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача определения положения и устойчивости точек Лагранжа (либрации) в системе Солнце – Венера с целью исследования возможности формирования орбитальной системы для изучения венерианской атмосферы. Для решения поставленной задачи найдены положения соответствующих точек либрации, а также определена устойчивость движения космического аппарата (КА) в таких точках. Поиск точек либрации в системе Солнце – Венера осуществлен исходя из их физического смысла. Для проверки устойчивости использован метод Ляпунова. При этом математическая модель движения КА в точке либрации предварительно линеаризована методом малого параметра.

Ключевые слова

Круговая ограниченная задача трех тел, точки либрации, устойчивость, формирование орбитальной системы, Солнце, Венера, космический аппарат, метод Ляпунова

Поступила в редакцию 05.07.2019

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019

Введение. Для исследования атмосферы Венеры необходимо сформировать систему, состоящую из двух аппаратов. Один из аппаратов можно разместить на ограниченной орбите в окрестности одной из точек либрации системы Солнце – Венера, поскольку главным свойством данной области пространства является способность сохранять свое положение относительно исследуемой системы небесных тел при их движении. Для подобного размещения необходимо определить положения точек либрации, что выполняется в ходе подготовки данных для последующего формирования соответствующих миссий.

Процесс определения положения точек в математической постановке сводится к решению линейных уравнений, получаемых с учетом ряда допущений, которые можно представить в следующем виде:

1) масса небесных тел Солнца и Венеры, много больше массы космического аппарата (КА), поэтому данной величиной можно пренебречь:

$$m_i \gg m_3 \quad \forall i \in \{1, 2\};$$

2) давление света, уровень солнечной активности, возмущения магнитных полей и влияние гравитационных полей других небесных тел (Юпитер, Земля, Луна и т. п.) в ходе решения задачи не учитываются;

3) положение каждой из точек определяется независимо друг от друга, т. е. определение положения каждой из точек является отдельной задачей, но по причине подобия эти задачи сведены к одной.

Отдельно стоит оговорить системы координат, используемые при решении данной задачи. Из всей совокупности систем координат используются следующие:

– экваториальная система координат с центром, совпадающим с центром масс Солнца;

– вращающаяся система координат с центром, совпадающим с центром масс барицентра Солнце – Венера, ось e_x такой системы ориентирована по линии, соединяющей центры масс Венеры и Солнца, ось e_z направлена по оси вращения системы Солнце-Венера, ось e_y располагается в плоскости эклиптики и дополняет систему векторов до правой тройки.

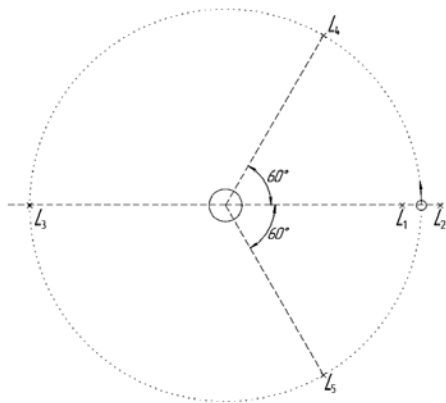


Рис. 1. Положение точек либрации

Определение положения точек либрации. Определение положения точек Лагранжа L_1, L_2, L_3 . Точки Лагранжа (либрации, L -точки) служат частным решением задачи трех тел. Особенностью всех точек либрации является то обстоятельство, что в системе из двух массивных тел их положение остается неизменным относительно них (рис. 1). При этом объект с пренебрежимо малой массой, находящийся там, не испытывает никаких воздействий со стороны двух исходных массивных тел, кроме гравитационных.



Рис. 2. Положение коллинеарных точек либрации (L_1, L_2, L_3)

Для приблизительного определения положения коллинеарных точек либрации (L_1, L_2, L_3 , расположенные на одной прямой, рис. 2) в системе «Солнце — Венера» рассматривается влияние гравитационных сил со стороны Венеры и Солнца, которые уравновешиваются центробежной силой [1–5]:

для точки L_1

$$\frac{GMm_s}{(r-R)^2} - \frac{Gmm_s}{R^2} = \frac{m_s V^2}{r-R}; \tag{1}$$

для точки L_2

$$\frac{GMm_s}{(r+R)^2} + \frac{Gmm_s}{R^2} = \frac{m_s V^2}{r+R}; \tag{2}$$

для точки L_3

$$\frac{GMm_s}{(R-r)^2} + \frac{Gmm_s}{R^2} = \frac{m_s V^2}{R-r}, \quad (3)$$

где M — масса Солнца; m — масса Венеры; m_s — масса КА, который находится в соответствующей точке либрации; r — расстояние от Солнца до Венеры; R — расстояние от Венеры до КА, т. е. до соответствующей точки либрации, которое необходимо определить; V — скорость движения КА.

Орбитальный период КА, находящийся в соответствующей точке либрации, определяется следующим образом [6–9]:

для L_1

$$VT_s = 2\pi(r-R), \text{ откуда } V^2 = \frac{4\pi^2(r-R)^2}{T_s^2}; \quad (4)$$

для L_2

$$VT_s = 2\pi(r+R), \text{ откуда } V^2 = \frac{4\pi^2(r+R)^2}{T_s^2}; \quad (5)$$

для L_3

$$VT_s = 2\pi(R-r), \text{ откуда } V^2 = \frac{4\pi^2(R-r)^2}{T_s^2}, \quad (6)$$

где T_s — орбитальный период КА.

Подставляя выражения (4)–(6) в уравнения (1)–(3) соответственно и выполняя некоторые преобразования, получаем:

для L_1

$$\frac{GM}{r-R} - \frac{Gm(r-R)}{R^2} = \frac{4\pi(r-R)^2}{T_s^2}; \quad (7)$$

для L_2

$$\frac{GM}{r+R} + \frac{Gm(r+R)}{R^2} = \frac{4\pi(r+R)^2}{T_s^2}; \quad (8)$$

для L_3

$$\frac{GM}{R-r} + \frac{Gm(R-r)}{R^2} = \frac{4\pi(R-r)^2}{T_s^2}. \quad (9)$$

Поскольку Венера тоже вращается вокруг Солнца, то орбитальные периоды движения КА и Венеры должны совпадать, так как положение точек либрации зависит от положения Венеры в пространстве относительно Солнца:

$$T = T_s,$$

где T — орбитальный период Венеры.

Орбитальный период Венеры по третьему закону Кеплера определяется следующим образом:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \quad (10)$$

Подставляя выражение (10) в уравнения (7)–(9), получаем:

для L_1

$$\frac{GM}{r-R} - \frac{Gm(r-R)}{R^2} = \frac{GM(r-R)^2}{r^3};$$

для L_2

$$\frac{GM}{r+R} + \frac{Gm(r+R)}{R^2} = \frac{GM(r+R)^2}{r^3};$$

для L_3

$$\frac{GM}{R-r} + \frac{Gm(R-r)}{R^2} = \frac{GM(R-r)^2}{r^3}.$$

После преобразований имеем:

для L_1

$$\frac{M}{(r-R)^3} - \frac{m}{R^2(r-R)} = \frac{M}{r^3};$$

для L_2

$$\frac{M}{(r+R)^3} + \frac{m}{R^2(r+R)} = \frac{M}{r^3};$$

для L_3

$$\frac{M}{(R-r)^3} - \frac{m}{R^2(R-r)} = \frac{M}{r^3}.$$

Пусть $\frac{m}{M} = y$, $\frac{R}{r} = z$. Для Венеры и Солнца $y = 2,44696 \cdot 10^{-6}$. После преобразований получаем:

для L_1

$$\frac{1}{(1-z)^3} - \frac{y}{z^2(1-z)} = 1;$$

для L_2

$$\frac{1}{(1+z)^3} + \frac{y}{z^2(1+z)} = 1;$$

для L_3

$$\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{y}{z^2(z-1)} = 1.$$

Аналитически решая данные уравнения относительно z , можно получить следующие решения:

для L_1 и L_2 : $z \approx 0,009\ 37$;
 для L_3 : $z \approx 2$.
 Откуда:
 для L_1 : $R \approx 1\ 014\ 096$ км;
 для L_2 : $R \approx 1\ 014\ 096$ км;
 для L_3 : $R \approx 216\ 400\ 000$ км.

Определение положения точек Лагранжа L_4 и L_5 . Для приблизительного определения положения точек L_4 и L_5 в системе Солнце – Венера в общем случае рассматривают три точечные массы m_1, m_2, m_3 , которые вращаются вокруг их взаимного центра притяжения O . Схема расположения тел в системе показана на рис. 3.

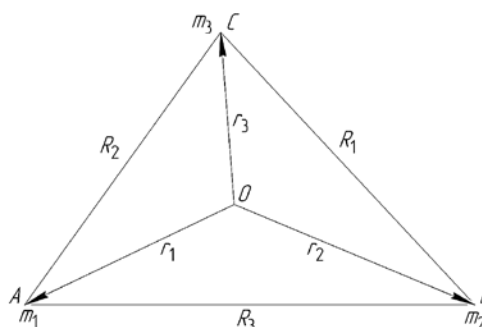


Рис. 3. Система трех тел

Пусть движение начинается в плоскости треугольника, показанного на рис. 3, и, поскольку все силы находятся в этой плоскости, оно останется там. Необходимо определить такие расстояния R_1, R_2, R_2 , при которых точечные массы будут сохранять свое взаимное положение, т. е. форма треугольника меняться не будет. Период обращения в таком случае должен быть постоянным для всех трех точек.

Пусть r_1, r_2, r_3 — расстояния данных трех масс от точки O . Тогда их скорости будут равны соответственно

$$V_1 = 2\pi \frac{r_1}{T}; \quad V_2 = 2\pi \frac{r_2}{T}; \quad V_3 = 2\pi \frac{r_3}{T}.$$

Пусть исследуемая система отсчета вращается вместе с массами. Тогда в дополнение к гравитационным силам на каждую массу действует центробежная сила, направленная вдоль векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ соответственно. Таким образом, центробежные силы:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{m_1 \mathbf{V}_1^2}{r_1} = m_1 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \mathbf{r}_1;$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{m_2 \mathbf{V}_2^2}{r_2} = m_2 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \mathbf{r}_2;$$

$$\mathbf{F}_3 = \frac{m_3 \mathbf{V}_3^2}{r_3} = m_3 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \mathbf{r}_3.$$

В общий вывод сил во вращающейся системе отсчета также входят силы Кориолиса. Но поскольку массы сохраняют фиксированные позиции в углах (A, B, C), такие силы не вводятся.

Обозначим гравитационную силу, действующую на массу m_1 , от массы m_2 , как \mathbf{F}_{12} , а на массу m_2 от m_1 — как \mathbf{F}_{21} . Поскольку массы находятся в равновесии, справедлива система

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + m_1 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \mathbf{r}_1 = 0; \\ \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + m_2 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \mathbf{r}_2 = 0; \\ \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{31} + m_3 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \mathbf{r}_3 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Суммируем все уравнения:

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{31} + (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_3 + m_3 \mathbf{r}_3) \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = 0. \quad (12)$$

Согласно третьему закону Ньютона,

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}; \quad \mathbf{F}_{13} = -\mathbf{F}_{31}; \quad \mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{32}. \quad (13)$$

Преобразуем выражение (12) с учетом (13):

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_3 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0. \quad (14)$$

Пусть $\overline{BA} = \mathbf{R}_3$, $\overline{CA} = \mathbf{R}_2$, тогда по правилу сложения векторов

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_3; \\ \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3 + \mathbf{R}_2; \\ \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1. \end{cases}$$

Умножаем каждое уравнение данной системы на m_2, m_3, m_1 в соответствии с очередностью:

$$\mathbf{r}_1 (m_1 + m_2 + m_3) = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3) + m_3 \mathbf{R}_2 + m_2 \mathbf{R}_3. \quad (15)$$

Пусть $M = m_1 + m_2 + m_3$, тогда выражение (15) с учетом (14) можно преобразовать как

$$M \mathbf{r}_1 = m_3 \mathbf{R}_2 + m_2 \mathbf{R}_3. \quad (16)$$

Обозначив $\boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{R}_2 \frac{m_3}{M}$, $\boldsymbol{\rho}_3 = \mathbf{R}_3 \frac{m_2}{M}$, перепишем выражение (16):

$$\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\rho}_3. \quad (17)$$

Графически это можно представить в виде схемы, показанной на рис. 4. Здесь векторы $\overline{EA} = \boldsymbol{\rho}_2$, $\overline{DA} = \boldsymbol{\rho}_3$, а выражение (17) соответствует правилу сложения векторов.

Первое уравнение в выражении (11) образует треугольник в векторной форме, причем $F_{12} \uparrow\uparrow \rho_2$, а $F_{13} \uparrow\uparrow \rho_3$, т. е. треугольники, образованные первым уравнением выражения (11) и выражением (17), подобны:

$$\frac{F_{21}}{\rho_3} = \frac{F_{13}}{\rho_2}, \quad \text{откуда} \quad F_{12}\rho_2 = F_{13}\rho_3.$$

Учитывая, что $F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{R_3^2}$;

$$F_{13} = G \frac{m_1 m_3}{R_2^2} \quad \text{и} \quad \rho_2 = R_2 \frac{m_3}{M}; \quad \rho_3 = R_3 \frac{m_2}{M},$$

запишем:

$$G \frac{m_1 m_2}{R_3^2} R_2 \frac{m_3}{M} = G \frac{m_1 m_3}{R_2^2} R_3 \frac{m_2}{M},$$

откуда $R_2 = R_3$.

Аналогичные преобразования можно выполнить и для R_2, R_1 , откуда следует, что $R_1 = R_2 = R_3$. Таким образом, при равенстве $R_1 = R_2 = R_3$ система уравнений равновесия (11) является справедливой, т. е. исходная система из трех масс при движении будет сохранять свое взаимное положение.

С учетом полученных соотношений, в первом приближении расстояния от Венеры до точек либрации L_4 и L_5 равны расстоянию между Солнцем и Венерой, т. е. $R \approx 108\,200\,000$ км. При этом система Солнце – Венера – точка L_4 (L_5) в геометрической интерпретации будет давать равносторонний треугольник, а точки L_4 и L_5 будут находиться на орбите Венеры.

Линеаризация математической модели движения КА. Прежде чем перейти к исследованию устойчивости, необходимо на основе допущений, выдвинутых в постановке задачи, сформировать математическую модель, способную описывать движение КА в условиях гравитационного притяжения двух небесных тел. Система уравнений в проекциях на оси вращающейся системы координат имеет вид [1–5]

$$\begin{cases} \ddot{x} = x\omega^2 + 2\dot{y}\omega + \mu_1 \frac{(x_1 - x)}{R_1^3} + \mu_2 \frac{(x_2 - x)}{R_2^3}; \\ \ddot{y} = y\omega^2 - 2\dot{x}\omega - \mu_1 \frac{y}{R_1^3} - \mu_2 \frac{y}{R_2^3}; \\ \ddot{z} = -\mu_1 \frac{z}{R_1^3} - \mu_2 \frac{z}{R_2^3}; \\ \dot{x} = V_x; \\ \dot{y} = V_y; \\ \dot{z} = V_z, \end{cases}$$

где $\mathbf{X} = (x, y, z, V_x, V_y, V_z)$ — вектор состояния КА, записанный в проекциях на оси вращающейся системы координат; $R_i = \sqrt{(r_x - r_{xi})^2 + r_y^2 + r_z^2}$;

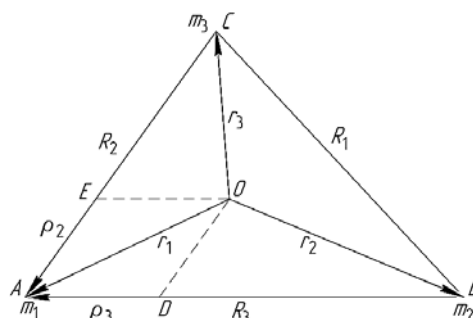


Рис. 4. Графическое представление выражения (17)

$\mu_1 = 132\,712\,440\,018 \text{ км}^3/\text{с}^2$ — гравитационный параметр Солнца;
 $\mu_2 = 324\,859 \text{ км}^3/\text{с}^2$ — гравитационный параметр Венеры;

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu_1 + \mu_2}{R_{12}^2}},$$

R_{12} — радиус-вектор, соединяющий центры масс Солнца и Венеры.

Упростим математическую модель движения КА, введя $\mu = \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_1}$ — гравитационный параметр барицентра системы Солнце – Венера. Для удобства определим также вспомогательную величину $1 - \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$.

Учтем особенность выбора центра используемой системы координат. Ввиду выбора нами центром вращающейся СК барицентр системы Солнце – Венера, координаты x_1, x_2 связаны соотношением

$$(1 - \mu)x_1 + \mu x_2 = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = -\mu; \\ x_2 = 1 - \mu. \end{cases}$$

Окончательно вводим нормированное расстояние $\rho_i = \frac{R_i}{R_{12}} \forall i \in \{1, 2\}$, новое (абсолютное) время $\tau = \omega t$.

Новая математическая модель движения примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = x + 2\dot{y} - (1 - \mu)\frac{x + \mu}{\rho_1^3} - \mu\frac{x - (1 - \mu)}{\rho_2^3}; \\ \ddot{y} = y - 2\dot{x} - (1 - \mu)\frac{y}{\rho_1^3} - \mu\frac{y}{\rho_2^3}; \\ \ddot{z} = -(1 - \mu)\frac{z}{\rho_1^3} - \mu\frac{z}{\rho_2^3}; \\ \dot{x} = V_x; \\ \dot{y} = V_y; \\ \dot{z} = V_z. \end{cases}$$

Запишем первую часть модели в матричной форме:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{f}(\mathbf{r}),$$

где

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -(1-\mu) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{\rho_1^3} - \mu \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{\rho_2^3}.$$

Видно, что уравнение представляет собой нелинейную зависимость, которую необходимо привести к линейной.

Линеаризацию будем проводить методом малого параметра, раскладывая исходное нелинейное уравнение в ряд Тейлора по степеням в окрестности точки либрации:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_L) + \frac{1}{n!} \sum_{n=1}^{\infty} a^n (\mathbf{r} - \mathbf{r}_L)^n,$$

где

$$a = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}.$$

Ввиду технической невозможности учета всех компонент разложения функции в ряд Тейлора, ограничимся только линейными членами, предполагая, что остальные члены малы и не вносят существенного вклада на данном этапе исследования математической модели движения, запишем

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{r}_L) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_L).$$

Учтем, что

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}{\partial \mathbf{r}} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^T}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^T}{\rho_i}.$$

Исходя из этого вычислим производную функции:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1-\mu}{|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_1|^5} \left(3(\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_1)^T - |\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_1|^2 \right) + \frac{\mu}{|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_2|^5} \left(3(\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_2)^T - |\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_2|^2 \right).$$

Рассмотрим два случая.

А. *Случай коллинеарных точек либрации.*

С учетом координат коллинеарных точек либрации $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ получим:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix},$$

где $a = \frac{1-\mu}{|x_L + \mu|^3} + \frac{\mu}{|x_L - 1 + \mu|^3} \quad \forall L \in \{L_1, L_2, L_3\}$.

Б. *Случай точек либрации, образующих равносторонний треугольник с небесными телами:*

$$|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_i| = 1 \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

Тогда

$$\frac{\partial f(r)}{\partial r} = \frac{1-\mu}{4} \begin{pmatrix} -1 & \pm 3\sqrt{3} & 0 \\ \pm 3\sqrt{3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \frac{\mu}{4} \begin{pmatrix} -1 & \mp 3\sqrt{3} & 0 \\ \mp 3\sqrt{3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \forall i \in \{L_4, L_5\}$$

Получим окончательные линейные зависимости.

А. *Случай коллинеарных точек либрации:*

$$\ddot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \mathbf{r} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{f}(\mathbf{r}_L).$$

Б. *Случай точек либрации, образующих равносторонний треугольник с небесными телами:*

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left[\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1-\mu}{4} \begin{pmatrix} -1 & \pm 3\sqrt{3} & 0 \\ \pm 3\sqrt{3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \frac{\mu}{4} \begin{pmatrix} -1 & \mp 3\sqrt{3} & 0 \\ \mp 3\sqrt{3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right] \mathbf{r} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{f}(\mathbf{r}_L);$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & \pm 3\sqrt{3} \mp 6\sqrt{3}\mu & 0 \\ \pm 3\sqrt{3} \mp 6\sqrt{3}\mu & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{r} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{f}(\mathbf{r}_L).$$

Исследование точек либрации на устойчивость. Получив линеаризованную в первом приближении модель движения КА в окрестности точки либрации, исследуем устойчивость его положения в такой точке. Для исследования устойчивости воспользуемся методом Ляпунова для первого линейного приближения, оценив необходимые условия устойчивости.

А. *Случай коллинеарных точек либрации.*

Запишем соответствующую линеаризованную модель движения в осях вращающейся системы координат [1–6]:

$$\begin{cases} \ddot{x} = (1+2a)x + 2\dot{y} + f(x_L); \\ \ddot{y} = (1-a)y - 2\dot{x}; \\ \ddot{z} = -az. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнения отдельно:

$$\begin{cases} \ddot{x} - (1+2a)x - 2\dot{y} - f(x_L) = 0; \\ \ddot{y} - (1-a)y + 2\dot{x} = 0; \\ \ddot{z} + az = 0. \end{cases}$$

Запишем характеристические уравнения для каждого дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \lambda^2 - (1+2a) - 2\lambda - f(x_L) = 0; \\ \lambda^2 - (1-a) + 2\lambda = 0; \\ \lambda^2 + a = 0. \end{cases}$$

Поскольку в данной работе рассматривается плоская круговая ограниченная задача трех тел, пренебрежем последним уравнением и рассмотрим устойчивость точек либрации, находящихся в плоскости эклиптики.

Составим определитель из первых двух уравнений системы:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - (1+2a) & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 - (1-a) \end{vmatrix}.$$

Зададим условие устойчивости как равенство нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - (1+2a) & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 - (1-a) \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda^4 + (2-a)\lambda^2 + (1-a)(1+2a) = 0.$$

Решив получившееся биквадратное уравнение, получим:

$$\lambda_{1,2,3,4}^2 = \frac{a-2 \pm \sqrt{9a^2 - 8a}}{2} > 0 \quad \forall \mu \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Поскольку в уравнении есть положительные корни, можно сделать вывод о неустойчивости точек либрации $\{L_1, L_2, L_3\}$.

Б. *Случай точек либрации, образующих равносторонний треугольник с небесными телами $\{L_4, L_5\}$.*

Запишем математическую модель движения КА в окрестности треугольных точек либрации в матричном виде:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & \pm 3\sqrt{3} \mp 6\sqrt{3}\mu & 0 \\ \pm 3\sqrt{3} \mp 6\sqrt{3}\mu & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{r} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{f}(\mathbf{r}_L).$$

С помощью несложных арифметических преобразований составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0.$$

Решив получившееся биквадратное уравнение, получим:

$$\lambda_{1,2,3,4}^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2}.$$

С учетом того что рассматриваемые точки располагаются в системе Солнце – Венера, из подкоренного выражения получаем $1 - 27\mu(1-\mu) < 0$. В таком случае получаем две пары комплексных корней отрицательной действительной частью. Отсюда делаем вывод, что треугольные точки либрации устойчивы в первом приближении.

Заключение. Исследованы положения точек либрации $\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$ в системе Солнце – Венера. Сформирована соответствующая математическая модель движения КА в окрестности соответствующих точек либрации исследуемой системы, необходимая для определения устойчивости КА в окрестностях этих точек.

Поскольку расстояние до точек либрации $\{L_4, L_5\}$ велико, затраты на достижение этих точек превосходят ожидаемые результаты миссии по изучению атмосферы Венеры.

Для формирования ограниченной орбиты наиболее энергетически выгодными являются точки либрации $\{L_1, L_2\}$, так как расстояние от Венеры до них меньше, чем до точек $\{L_3, L_4, L_5\}$.

Ввиду особенностей формирования орбитальной системы с целью просвещения атмосферы Венеры радиолучом сделаем заключение о полной пригодности обеих точек для формирования ограниченной орбиты КА, следующего в точку либрации.

Литература

- [1] Ardaens J.S., D'Amico S. Control of formation flying spacecraft at a Lagrange point. DLR, 2008.
- [2] Montgomery R. A new solution to the three-body problem. *Notices Am. Math. Soc.*, 2001, vol. 48, no. 5, pp. 471–481.
- [3] Суханов. А.А. Астродинамика. М., ИКИ РАН, 2010.
- [4] Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., Наука, 1978.
- [5] Бобер С.А., Аксенов С.А., Николаева Ю.А. Исследование зависимости формы ограниченной орбиты КА от начального вектора состояния в окрестности точки либрации L2 системы Солнце – Земля. *Новые информационные технологии в автоматизированных системах. Мат. 18 науч.-тех. сем.* М., МИЭМ НИУ ВШЭ, 2015, с. 154–163.

- [6] Гуськова М.С., Бобер С.А., Аксенов С.А. Исследование возможности непрямого перелета на ограниченную орбиту вокруг точки либрации L_2 системы Земля – Луна. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, № 3. DOI: 10.18698/2308-6033-2016-3-1476 URL: <http://engjournal.ru/catalog/arise/adb/1476.html>
- [7] Folta D.C., Pavlak T.A., Naapala A.F., et al. Earth-Moon libration point orbit stationkeeping: theory, modeling, and operations. *Acta Astronaut.*, 2014, vol. 94, no. 1, pp. 421–433. DOI: 10.1016/j.actaastro.2013.01.022 URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576513000349>
- [8] Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М., Наука, 1990.
- [9] Корянов В.В., Казаковцев В.П. Основы теории космического полета. Ч. 1, 2. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 2014.

Зубко Владислав Александрович — студент кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Беляев Андрей Алексеевич — студент кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Корянов Всеволод Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**STUDY OF LIBRATION POINTS IN THE SUN-VENUS SYSTEM
IN ORDER TO FORM THE ORBITAL SYSTEM FOR THE STUDY
OF THE VENUS ATMOSPHERE**

V.A. Zubko

werrert1@gmail.com

SPIN-code: 1967-6719

A.A. Belyaev

don.beliae2012@yandex.ru

SPIN-code: 1941-4981

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The problem of determining the position and stability of the Lagrange points (libration points) in the Sun-Venus system is examined in order to study the possibility of forming an orbital system for exploring the Venusian atmosphere. To solve this problem, the positions of the corresponding libration points were found, and the stability of the spacecraft (SC) motion at such points was determined. The search for libration points in the Sun-Venus system is based on their physical meaning. To test the stability, the Lyapunov method was used. Moreover, the mathematical model of the spacecraft motion at the libration point is preliminary linearized by the small parameter method.

Keywords

Limited three-body circular problem, libration points, stability, formation of the orbital system, Sun, Venus, spacecraft, Lyapunov method

Received 05.07.2019

© Bauman Moscow State Technical University, 2019

References

- [1] Ardaens J.S., D'Amico S. Control of formation flying spacecraft at a Lagrange point. DLR, 2008.
- [2] Montgomery R. A new solution to the three-body problem. *Notices Am. Math. Soc.*, 2001, vol. 48, no. 5, pp. 471–481.
- [3] Sukhanov. A.A. *Astrodinamika [Astrodynamics]*. Moscow, IKI RAS Publ., 2010 (in Russ.).
- [4] Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoy mekhanike i kosmodinamike [Vibration points in celestial mechanics and cosmodynamics]*. Moscow, Nauka Publ., 1978 (in Russ.).
- [5] Bober S.A., Aksenov S.A., Nikolaeva Yu.A. [Study on dependence of bounded aircraft orbit on initial vector in L_2 libration point vicinity of Sun-Earth system]. *Novye informatsionnye tekhnologii v avtomatizirovannykh sistemakh. Mat. 18 nauch.-tekh. sem.* [New Information Technologies in Automated Systems. Proc. 18th Sci.-Tech. Sem.]. Moscow, MIEM NIU VShE Publ., 2015, pp. 154–163 (in Russ.).
- [6] Gus'kova M.S., Bober S.A., Aksenov S.A. Study the possibility of indirect flight into the restricted orbit around the Earth-Moon's L_2 libration point. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii [Engineering Journal: Science and Innovation]*, 2016, no. 3. DOI: 10.18698/2308-6033-2016-3-1476 URL: <http://engjournal.ru/catalog/arse/adb/1476.html> (in Russ.).
- [7] Folta D.C., Pavlak T.A., Haapala A.F., et al. Earth-Moon libration point orbit stationkeeping: theory, modeling, and operations. *Acta Astronaut.*, 2014, vol. 94, no. 1, pp. 421–433.

DOI: 10.1016/j.actaastro.2013.01.022 URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576513000349>

- [8] Okhotsimskiy D.E., Sikharulidze Yu.G. Osnovy mekhaniki kosmicheskogo poleta [Fundamentals of space flight mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1990 (in Russ.).
- [9] Koryanov V.V., Kazakovtsev V.P. Osnovy teorii kosmicheskogo poleta. Ch. 1, 2 [Fundamentals of space flight theory. P. 1, 2]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2013, 2014 (in Russ.).

Zubko V.A. — Student, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Belyaev A.A. — Student, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Koryanov V.V., Cand. Sc. (Eng.), Assist. Professor, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.