

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОЗВЕННОГО
СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ****В.В. Заика**

zaikavv@student.bmstu.ru

SPIN-код: 1733-0115

А.Л. Масленников

amas@bmstu.ru

SPIN-код: 7087-6303

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**Аннотация**

Математическую модель однозвенного или многозвенного сферического маятника можно использовать в качестве модели, описывающей динамику одного или связанной группы суставов человека. В зависимости от постановки практической задачи сферический маятник можно рассматривать как с математической, так и с физической точки зрения, причем последняя является более адекватной моделью сустава человека, а следовательно, возникает необходимость в разработке соответствующих математических моделей. В работе описан процесс построения математических моделей сферического маятника в сферической системе координат как для математического, так и для физического случая. В каждом случае системы рассматриваются как при отсутствии диссипативных сил, так и при их наличии. Численное моделирование систем реализуется явным одношаговым методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Ключевые слова

Сферический маятник, математический сферический маятник, физический сферический маятник, диссипативные силы, моделирование, математическая модель, решение задачи Коши, метод Рунге-Кутты

Поступила в редакцию 02.09.2019

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019

Введение. Сферический маятник — это нелинейная динамическая система, которую можно использовать в качестве математической модели, описывающей движение одного сустава, групп суставов (многозвенный сферический маятник) человека или, например, в качестве математической модели в задачах управления позой человека [1, 2]. Сферический маятник, по аналогии с плоским маятником, можно рассматривать как с математической, так и с физической точки зрения. Математический сферический маятник, кинематическая схема которого представлена на рис. 1, а, состоит из материальной точки массой m_1 , прикрепленной к условной точке подвеса невесомым стержнем длиной l [3–5]. Физический сферический маятник, кинематическая схема которого представлена на рис. 1, б, состоит из шара радиусом r массой m_2 , стержня длиной l и массой m_3 , прикрепленного к условной точке подвеса O [5, 6].

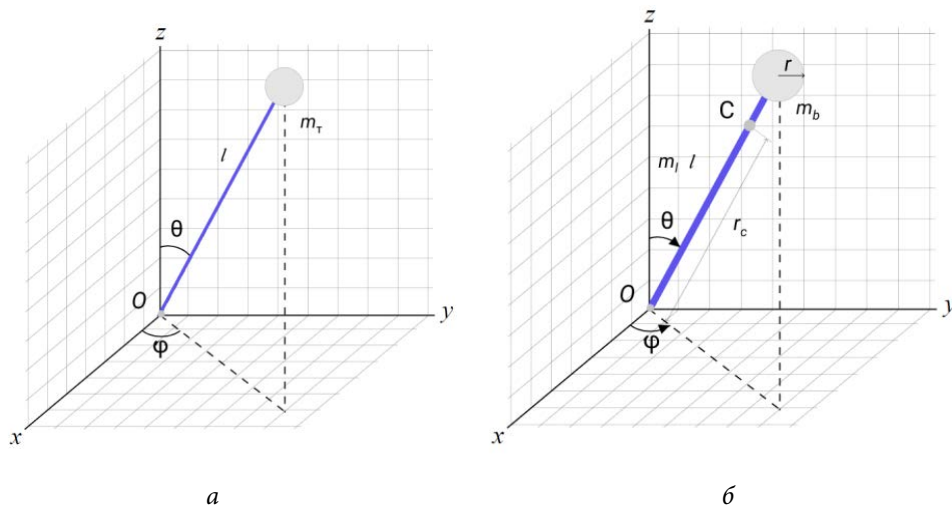


Рис. 1. Кинематические схемы сферического маятника
 а — математический; б — физический

Описание математической модели физического и математического сферических маятников может быть получено как в сферической, так и в декартовой системе координат. В сферической системе координат положение центра масс (физический случай) или материальной точки (математический случай) определяется двумя углами: θ — углом между осью z и направлением радиус-вектора l ; φ — углом между осью x и проекцией стержня на плоскость XU . Соотношения между координатами в сферической и декартовой системе координат следующие:

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \cos \varphi; \\ y = l \sin \theta \sin \varphi; \\ z = l \cos \theta. \end{cases} \quad (1)$$

В данной работе описывается получение математической модели математического и физического сферических маятников в сферической системе координат, для случаев без и с учетом диссипативных сил. Для полученных математических моделей реализуется численное моделирование одним из численных методов решения задачи Коши — методом Рунге-Кутты 4-го порядка [7, 8]. В заключении приводятся результаты численного моделирования.

Математический сферический маятник. Для получения математической модели однозвенного математического сферического маятника воспользуемся уравнениями Лагранжа 2-го рода [9, 10], для которых в качестве обобщенных координат выберем углы θ и φ , в результате чего получится система из двух дифференциальных уравнений, которая имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = u_{\theta}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = u_{\varphi}, \end{cases} \quad (2)$$

где u_{θ}, u_{φ} — управляющие воздействия по координатам θ и φ соответственно. Лагранжиан L представляет собой разность кинетической и потенциальной энергии:

$$L = T - U. \quad (3)$$

Кинетическая энергия T и потенциальная энергия U определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta); \\ U &= m g l \cos \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки соотношений для кинетической и потенциальной энергий в лагранжиан, а затем в систему уравнений (2) получим следующую систему из двух дифференциальных уравнений, описывающую динамику однозвенного математического сферического маятника в сферической системе координат:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{1}{m l^2} u_{\theta} + \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{m g}{l} \sin \theta; \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{m l^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi} - 2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{cases} \quad (5)$$

Для решения задачи численного моделирования системы [7, 8], описание системы (5) необходимо получить в форме Коши, для этого выполним следующую замену переменных:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \\ x_3 = \varphi \\ x_4 = \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где \mathbf{x} — вектор состояния системы, а динамика системы описывается с помощью четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{t}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m l^2} u_{\theta} + x_4^2 \cos x_1 \sin x_1 + \frac{m g}{l} \sin x_1 \\ x_4 \\ \frac{1}{m l^2 \sin^2 x_1} u_{\varphi} - 2 x_2 x_4 \frac{\cos x_1}{\sin x_1} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Математическая модель, заданная системой уравнений (5), получена без учета диссипативных сил. Для учета диссипации введем диссипативную функцию Релея [9], которая в сферической системе координат записывается в следующем виде:

$$R = \frac{1}{2}(\mu_1 \dot{\theta}^2 + \mu_2 \dot{\phi}^2), \quad (8)$$

где μ_1, μ_2 — коэффициенты демпфирования, которые с учетом предположения о том, что система изотропна можно принять равными между собой: $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Система уравнений (2) с учетом диссипации примет вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = u_\theta; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\phi}} = u_\phi. \end{cases}$$

При наличии диссипативных сил выражения для кинетической и потенциальной энергий, а также сам лагранжиан остаются такими же, как и ранее, но к каждому из дифференциальных уравнений (5) добавляется дополнительное слагаемое. В результате преобразований получим систему из двух дифференциальных уравнений, описывающих динамику однозвенного математического сферического маятника в сферической системе координат при наличии диссипативных сил:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{1}{ml^2} u_\theta + \dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{mg}{l} \sin \theta - \frac{\mu}{ml^2} \dot{\theta}; \\ \ddot{\phi} = \frac{1}{ml^2 \sin^2 \theta} u_\phi - 2\dot{\phi}\dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\mu}{ml^2 \sin^2 \theta} \dot{\phi}. \end{cases}$$

Описание полученной системы в форме Коши формируется с таким же вектором состояния \mathbf{x} , как и ранее, и имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{t}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{ml^2} u_\theta + x_4^2 \cos x_1 \sin x_1 + \frac{mg}{l} \sin x_1 - \frac{\mu}{ml^2} x_2 \\ x_4 \\ \frac{1}{ml^2 \sin^2 x_1} u_\phi - 2x_2 x_4 \frac{\cos x_1}{\sin x_1} - \frac{\mu}{ml^2 \sin^2 x_1} x_4 \end{bmatrix}.$$

Физический сферический маятник. Получим математическую модель для физического сферического маятника аналогично рассмотренному ранее случаю

математического сферического маятника. В случае физического сферического маятника модель будет описывать движение не материальной точки, а движение центра масс всей системы, вследствие чего выражения для кинетической и потенциальной энергии изменятся. Для физического сферического маятника кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного и вращательного движений:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

где $m = m_l + m_b$ — суммарная масса системы; v — линейная скорость центра масс; J — момент инерции; ω — угловая скорость относительно оси, проходящей через центр масс. Кинетическая энергия поступательного движения в сферической системе координат записывается в виде

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mr_c^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta),$$

где r_c — радиус-вектор, соединяющий точку отсчета с центром масс системы, который определяется по соотношению

$$r_c = \frac{m_l l + 2m_b(r+l)}{2(m_l + m_b)}.$$

Момент инерции по теореме Штейнера — Гюйгенса равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно рассматриваемой оси, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$J = \frac{m_l l^2}{3} + m_b(r+l)^2.$$

С учетом того что квадрат угловой скорости $\omega^2 = \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2$, полное выражение для кинетической энергии можно записать в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} \left(mr_c^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \left(\frac{m_l l^2}{3} + m_b(r+l)^2 \right) (\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) \right).$$

Выражение для потенциальной энергии записывается в следующем виде:

$$U = mgr_c \cos \theta.$$

После подстановки выражений для кинетической и потенциальной энергий в лагранжиан и систему уравнений (2) получим систему из двух дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих динамику физического сферического маятника в сферической системе координат:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{u_{\theta} + mr_c^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgr_c \sin \theta}{mr_c^2 + \frac{m_1 l^2}{3} + m_b (r+l)^2}; \\ \ddot{\varphi} = \frac{u_{\varphi} - mr_c^2 \dot{\theta} \cdot \sin \theta \cos \theta}{mr_c^2 \sin^2 \theta + \frac{m_1 l^2}{3} + m_b (r+l)^2}. \end{cases} \quad (9)$$

Описание полученной системы в форме Коши формируется с таким же вектором состояния, как и ранее, и имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{t}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{mr_c^2 x_4^2 \sin x_1 \cos x_1 + mgr_c \sin x_1 + u_{\theta}}{mr_c^2 + \frac{m_1 l^2}{3} + m_b (r+l)^2} \\ x_4 \\ \frac{u_{\varphi} - 2mr_c^2 x_4 x_2 \sin x_1 \cos x_1}{mr_c^2 \sin^2 x_1 + \frac{m_1 l^2}{3} + m_b (r+l)^2} \end{bmatrix}.$$

Математическая модель, заданная системой уравнений (9), получена без учета диссипативных сил. Для учета диссипации введем диссипативную функцию Рэля, соответствующую уравнению (8). Аналогично рассмотренному ранее подходу, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику физического сферического маятника с учетом диссипативных сил:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{mr_c^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgr_c \sin \theta + u_{\theta} - \mu \dot{\theta}}{mr_c^2 + \frac{m_1 l^2}{3} + m_b (r+l)^2}; \\ \ddot{\varphi} = \frac{u_{\varphi} - 2mr_c^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - \mu \dot{\varphi}}{mr_c^2 \sin^2 \theta + \frac{m_1 l^2}{3} + m_b (r+l)^2}. \end{cases}$$

Описание полученной системы в форме Коши формируется с таким же вектором состояния \mathbf{x} , как и ранее, и имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{t}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{mr_c^2 x_4^2 \sin x_1 \cos x_1 + mgr_c \sin x_1 + u_{\theta} - \mu x_2}{mr_c^2 + \frac{m_1 l^2}{3} + m_b (r+l)^2} \\ x_4 \\ \frac{u_{\varphi} - 2mr_c^2 x_4 x_2 \sin x_1 \cos x_1 - \mu x_4}{mr_c^2 \sin^2 x_1 + \frac{m_1 l^2}{3} + m_b (r+l)^2} \end{bmatrix}.$$

Численное моделирование системы. Моделирование полученных математических моделей реализуется явным одношаговым методом Рунге-Кутты 4-го порядка [7, 8]. В этом методе после инициализации начальных условий $x_0 = x(t_0)$ на каждой итерации вычисляются коэффициенты:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_k, t_k); \\ K_2 &= f(x_k + 0,5hK_1, t_k + 0,5h); \\ K_3 &= f(x_k + 0,5hK_2, t_k + 0,5h); \\ K_4 &= f(x_k + hK_3, t_k + h), \end{aligned}$$

а затем и решение:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Числовые значения параметров модели представлены ниже:

Масса маятника m_t , кг	10
Масса шара m_b , кг.....	9,9
Масса стержня m_s , кг	0,1
Радиус шара r , м	0,1
Длина стержня l , м (математический маятник)	1
Длина стержня l , м (физический маятник)	0,9
Управляющее воздействие по углу θ , Н.....	0
Управляющее воздействие по углу φ , Н.....	0
Коэффициент демпфирования μ , Дж · с ² /м ²	0,16

Для моделирования системы без диссипации с учетом систем уравнений (7) и (9) коэффициент демпфирования μ следует задавать равным нулю, а при наличии диссипации — соответствующему значению, приведенному выше. Ускорение свободного падения зависит от географических широты и высоты над уровнем моря в соответствии со следующим соотношением (для Москвы широта составляет 55,7522°, а высота — 144 м) [11]:

$$g = 9,780327 (1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,000006 \sin^2 2\varphi - 0,000003086 h).$$

Для того чтобы движение сферического маятника было пространственным и влияние диссипации в системе иллюстрировалось более явно, начальные условия приняты следующими (с ненулевыми начальными значениями обеих угловых скоростей):

$$\begin{bmatrix} \theta(0) = -4 \frac{\pi}{3} \\ \dot{\theta}(0) = 0,1 \\ \varphi(0) = 5 \frac{\pi}{4} \\ \dot{\varphi}(0) = 0,8 \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования математической модели математического сферического маятника без диссипации и с диссипацией представлены на рис. 2, *а* и *б*. Отчетливо видно, что на рис. 2, *б* проявляется затухающий характер колебаний, совершаемых сферическим маятником, а на рис. 2, *а* отчетливо виден процесс пространственных гармонических колебаний.

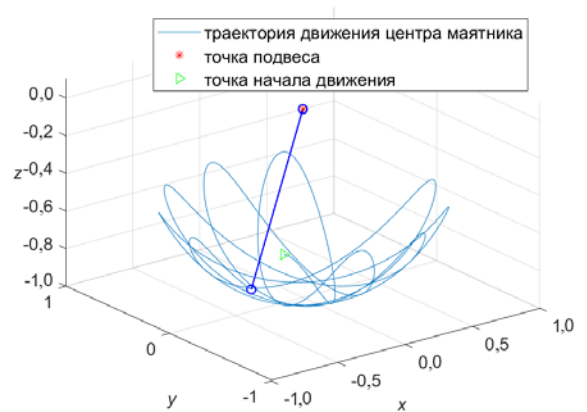
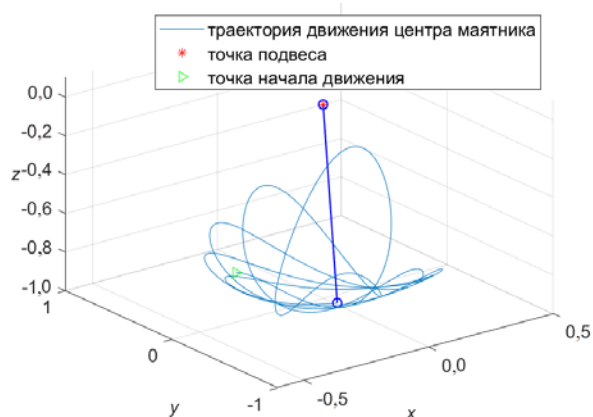
*а**б*

Рис. 2. Результаты моделирования математического сферического маятника
а — без диссипации; *б* — с диссипацией

Результаты моделирования для математической модели физического сферического маятника без диссипации и с диссипацией представлены на рис. 3, *а* и *б*. Отметим, что на рис. 3, *б* для модели с учетом диссипативного движения отчетливо заметно уменьшение амплитуды (процесс затухания) колебаний, а на рис. 3, *а* без диссипации затухания колебаний не происходит.

Для удобства построения графиков полученные результаты численного решения задачи Коши (углы θ и φ) преобразованы в координаты центра шара и/или центра масс в декартову систему координат согласно системе уравнений (1).

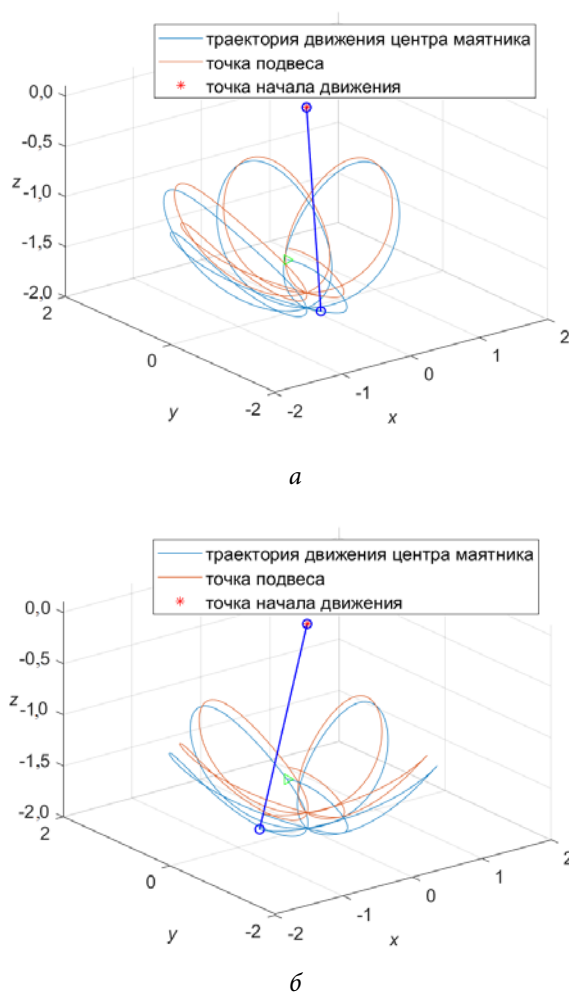


Рис. 3. Результаты моделирования физического сферического маятника
 а — без диссипации; б — с диссипацией

Выводы. В работе рассмотрен процесс получения математических моделей, описывающих динамику математического и физического сферических маятников в сферической системе координат с учетом диссипативных сил, так и без их учета. Проведено моделирование указанных нелинейных моделей, которое подтвердило адекватность полученных математических моделей.

Литература

- [1] Рябина К.Е., Исаев А.П. Биомеханика поддержания вертикальное позы (обзор моделей поддержания равновесия). *Вестник ЮУрГУ. Серия Образование, здравоохранение, физическая культура*, 2015, т. 15, № 4, с. 93–98. DOI: 10.14529/ozfk150417 URL: <http://vestnik.istis.ru/images/2015-4/93-98.pdf>
- [2] Дубровский В.И., Федорова В.Н. Биомеханика. М., ВЛАДОС-ПРЕСС, 2003.

- [3] Olsson M.G. Spherical pendulum revisited. *Am. J. Phys.*, 1981, vol. 49, no. 6, pp. 531–534. DOI: 10.1119/1.12666 URL: <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.12666>
- [4] Miles J.W. Resonant motion of a spherical pendulum. *Physica D*, 1984, vol. 11, no. 3, pp. 309–323. DOI: 10.1016/0167-2789(84)90013-7 URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278984900137>
- [5] Awrejcewicz J. Classical mechanics. Dynamics. Springer-Verlag, 2012.
- [6] Зоммерфельд А. Механика. М., Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
- [7] Амосов А.А., Дубинский Ю.А. Копченова Н.В. Вычислительные методы. М., Лань, 2014.
- [8] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., Бином. Лаборатория знаний, 2017.
- [9] Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М., Наука, 1966.
- [10] Апфель П. Теоретическая механика. Т. 1. Статика. Динамика точки. М., Физматлит, 1960.
- [11] Прохоров А.М., ред. Физическая энциклопедия. Т.4. М., Большая Российская энциклопедия, 1994.

Заика Валерия Владимировна — студентка кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Масленников Андрей Леонидович — ассистент кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Заика В.В., Масленников А.Л. Математическое моделирование однозвенного сферического маятника в сферической системе координат. *Политехнический молодежный журнал*, 2019, № 9(38). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2019-9-522>

SINGLE-JOINT SPHERICAL PENDULUM MATHEMATICAL MODELING IN SPHERICAL COORDINATE SYSTEM

V.V. Zaika

zaikavv@student.bmstu.ru

SPIN-code: 1733-0115

A.L. Maslennikov

amas@bmstu.ru

SPIN-code: 7087-6303

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

Mathematical model of the n-link spherical pendulum could be used as a mathematical model of a single or a n-link human joint. Depending on practical problem formulation spherical pendulum could be considered as mathematical pendulum or as physical pendulum, where the last one is the more adequate model of a human joint. Consequently, the derivation of such mathematical models is required. In this paper the derivation of mathematical model of the mathematical and the physical single-joint spherical pendulum in spherical coordinate system is shown. Two cases are considered for both systems: without and with dissipation. Numerical simulation is realized utilizing explicit Runge-Kutta 4-th order method.

Keywords

Spherical pendulum, mathematical spherical pendulum, physical spherical pendulum, dissipation, modeling, mathematical model, numerical ODE integration, Runge-Kutta method

Received 02.09.2019

© Bauman Moscow State Technical University, 2019

References

- [1] Ryabina K.E., Isaev A.P. Biomechanics of erect posture maintaining (review of equilibrium control models). *Vestnik YuUrGU. Seriya Obrazovanie, zdnavookhranenie, fizicheskaya kul'tura* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Education, health, physical culture.], 2015, vol. 15, no. 4, pp. 93–98. DOI: 10.14529/ozfk150417 URL: <http://vestnik.istis.ru/images/2015-4/93-98.pdf> (in Russ.).
- [2] Dubrovskiy V.I., Fedorova V.N. *Biomekhanika* [Biomechanics]. Moscow, VLADOS-PRESS Publ., 2003 (in Russ.).
- [3] Olsson M.G. Spherical pendulum revisited. *Am. J. Phys.*, 1981, vol. 49, no. 6, pp. 531–534. DOI: 10.1119/1.12666 URL: <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.12666>
- [4] Miles J.W. Resonant motion of a spherical pendulum. *Physica D*, 1984, vol. 11, no. 3, pp. 309–323. DOI: 10.1016/0167-2789(84)90013-7 URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278984900137>
- [5] Awrejcewicz J. *Classical mechanics. Dynamics*. Springer-Verlag, 2012.
- [6] Sommerfeld A. *Mechanik. Revidierte Auflage* Publ., 1944. (Russ. ed.: *Mekhanika*. Moscow, *Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika* Publ., 2001.)
- [7] Amosov A.A., Dubinskiy Yu.A., Kopchenova N.V. *Vychislitel'nye metody* [Numerical methods]. Moscow, Lan' Publ., 2014 (in Russ.).
- [8] Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow, Binom. *Laboratoriya znaniy* Publ., 2017 (in Russ.).

- [9] Gantmakher F.R. *Lektsii po analiticheskoy mekhanike* [Lectures on analytical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1966 (in Russ.).
- [10] Appel' P. *Teoreticheskaya mekhanika. T. 1. Statika. Dinamika tochki* [Theoretical mechanics. Vol. 1. Statics. Particle dynamics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1960 (in Russ.).
- [11] Prokhorov A.M., ed. *Fizicheskaya entsiklopediya. T.4* [Physical encyclopedia. Vol. 4]. Moscow, Bol'shaya Rossiyskaya entsiklopediya Publ., 1994 (in Russ.).

Zaika V.V. — Student, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Maslennikov A.L. — Teaching Assistant, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:

Zaika V.V., Maslennikov A.L. Single-joint spherical pendulum mathematical modeling in spherical coordinate system. *Politekhnicheskiy molodezhnyy zhurnal* [Politechnical student journal], 2019, no. 9(38). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2019-9-522.html> (in Russ.).