

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БУКУА

А.А. Домнышев

domnyyshevaa@student.bmstu.ru

SPIN-код: 4142-6977

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Представлены результаты эксперимента по решению задачи Букуа о движении цепи под действием приложенной к ее концу постоянной силы. В экспериментах применена оригинальная методика, согласно которой движение цепи исследовалось в жидкости (воде), а в качестве постоянной силы служила сила плавучести поплавка, прикрепленного к цепи. Такая постановка опытов позволила выявить затухающий характер колебаний системы поплавков — цепочка при смещении системы относительно равновесного положения. Для интерпретации данных эксперимента использовано классическое решение задачи Букуа. Дифференциальное уравнение движения цепи как системы с переменной массой (переменным составом) под действием постоянной силы решено численными методами. Выполнено сравнение теоретических и экспериментальных данных. Обсуждаются используемые для получения уравнения движения допущения, принятые в механике цепей.

Ключевые слова

Задача Букуа, цепь, система переменной массы, система переменного состава, уравнение Мещерского, второй закон Ньютона, затухающие колебания, сопротивление жидкости

Поступила в редакцию 06.11.2019

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019

Введение. Начало формирования теории динамики тел переменной массы как самостоятельного раздела механики обычно относят к середине XIX в. Основное уравнение движения точки переменной массы получено И.В. Мещерским в 1897 г. и приведено его магистерской диссертации. В 1904 г. теория получила окончательное выражение в его работе «Уравнение движения точки переменной массы в общем случае» [1]. Однако еще до начала фундаментальных исследований И.В. Мещерского были подробно рассмотрены некоторые частные задачи такого рода, решение которых также представляет интерес.

В 1812–1815 гг. в Лейпциге и Париже были опубликованы три работы пражского автора Георга Букуа (Georg von Buchou, 1781–1851) [2–4]. Изучая движение отдельной частицы, Букуа отмечает, что классическое уравнение второго закона Ньютона

$$F = m \frac{dv}{dt}, \quad (1)$$

где F — внешняя сила, действующая на частицу; m — масса частицы; dv — изменение скорости частицы v за интервал времени dt , справедливо лишь для

частицы постоянной массы. В случае непрерывного изменения массы частицы со временем изменение количества движения составляет не mdv , а $mdv + (v - u)dm$, где u — абсолютная скорость, с которой присоединяется к частице массой m и движущейся со скоростью v приращение массы dm . При этом уравнение (1) имеет вид

$$F = m \frac{dv}{dt} + (v - u) \frac{dm}{dt}. \quad (2)$$

Бука указал, что в случае $v = u$ уравнение (2) обращается в уравнение (1), а в случае $u = 0$ — в уравнение

$$F = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}.$$

В опубликованных брошюрах также намечено решение одной иллюстративной задачи о движении тяжелой цепи, тесно связанной с классическими задачами о движении цепи [5–7]. Задача формулируется следующим образом: на горизонтальной плоскости сложена в кучу тяжелая однородная цепь. К одному из ее концов внезапно прикладывается направленная вертикально вверх постоянная сила F , увлекающая за собой все время увеличивающуюся часть цепи (рис. 1, а). Необходимо определить закон движения конца цепи, к которому приложена сила.

Г. Бука получил дифференциальное уравнение, после чего без пояснений записал результат интегрирования без нахождения постоянных интегрирования [6].

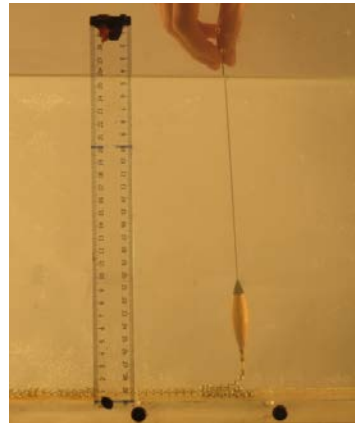
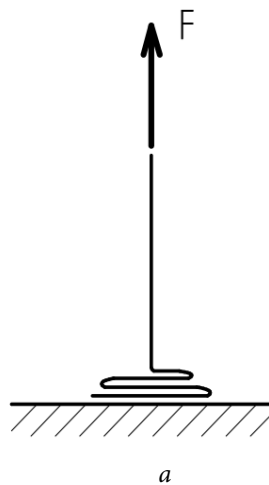


Рис. 1. Схема к задаче Бука (а) и эксперимент по реализации этой задачи (б)

Отметим, что хотя к настоящему моменту имеется ряд теоретических работ [6–9], посвященных решению данной задачи, однако эксперименты по исследованию движения системы переменной массы под действием постоянной силы не проводились. Цель настоящей работы состоит в экспериментальной реали-

зации и соответствующем решении задачи Букуа, а также в сравнении результатов экспериментов с найденным решением.

Постановка задачи и методика эксперимента. Для проведения эксперимента использован прозрачный бак с водой и линейкой (рис. 1, б), цепь из металлических шариков, на каждый метр которой приходится 167 шариков средним диаметром 4,58 мм (рис. 2, а). Линейная плотность цепи 28 г/м. К концу цепи прикрепляли симметричный поплавок грузоподъемностью 4 г (рис. 2, б). Цепь и поплавок помещали на дно бака и придерживали за киль поплавка (см. рис. 1, б), затем поплавок отпускали и фиксировали движение конца цепи.

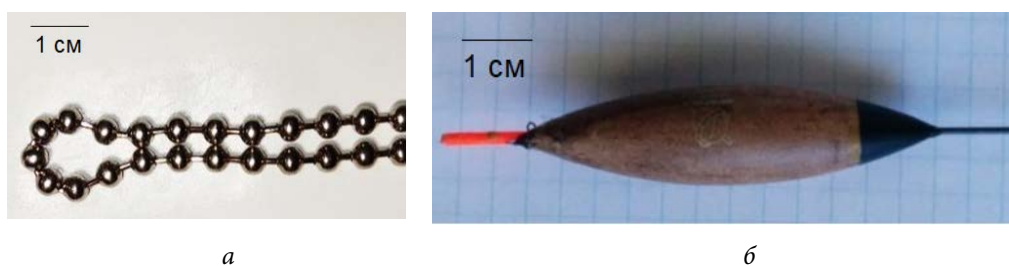


Рис. 2. Элементы экспериментальной установки:

а — цепь из металлических шариков; б — поплавок грузоподъемностью 4 г

Для регистрации движения цепи применяли видеосъемку фотокамерой PowerShotSX50 HS (30, 120 и 240 кадр/с) с последующей обработкой видеоматериалов с помощью программы ImageJ. Для решения уравнений численными методами и построения графиков использована программа Wolfram Mathematica 10.0.

Результаты эксперимента. После того как поплавок отпускали, он устремлялся вверх, увлекая все новые звенья цепи. После достижения максимальной высоты система опускалась и наблюдались затухающие колебания (рис. 3). Приведенные на рисунке графики описывают зависимость положения (высоты подъема) первого звена цепи от времени.

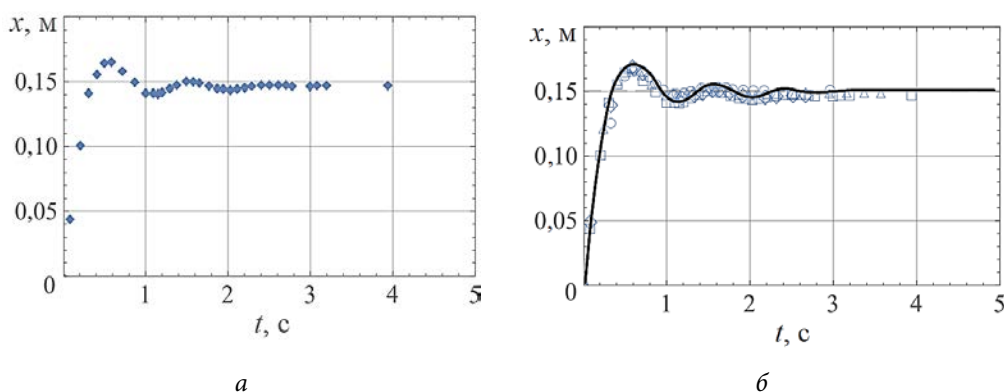


Рис. 3. Результаты одного эксперимента (а) и интерполированная кривая по результатам нескольких экспериментов (б)

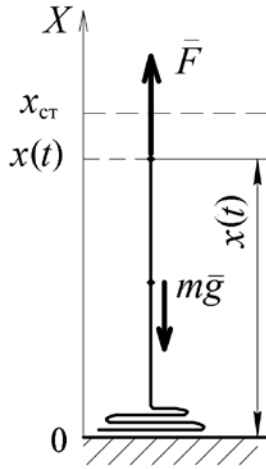


Рис. 4. Расчетная схема к задаче Букуа

Обсуждение результатов. Общий вид уравнения движения. Запишем уравнение движения цепи. Расчетная схема эксперимента представлена на рис. 4.

Количество движения (импульс) цепи (здесь и далее — в проекции на ось OX , см. рис. 4):

$$Q = m\dot{x} = \eta x\dot{x} = \eta x\dot{x},$$

где η — линейная плотность цепи; $x = x(t)$ — координата точки приложения силы или длина подвижного участка цепи, $\dot{x} = v(t)$ — скорость движения цепи. На цепь действуют внешняя сила F и сила тяжести mg . Запишем теорему об изменении количества движения цепи (здесь и далее — производная по времени t):

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= F - mg; \\ \eta(x\dot{x})' &= F - mg; \\ (x\dot{x})' &= \frac{F}{\eta} - xg; \\ \dot{x}\dot{x} + x\ddot{x} &= \frac{F}{\eta} - xg; \\ \ddot{x} &= \frac{F}{x\eta} - g - \frac{\dot{x}^2}{x}. \end{aligned} \tag{3}$$

Положение равновесия определяется из выражения

$$F = x_{\text{ст}}g\eta, \tag{4}$$

где $x_{\text{ст}}$ — установившееся положение поплавка, при котором равнодействующая силы тяжести цепи mg и силы Архимеда F , действующей на поплавок равна нулю. Подставив (4) в выражение (3), получим

$$\ddot{x} = g \left(\frac{x_{\text{ст}}}{x} - 1 \right) - \frac{\dot{x}^2}{x}. \tag{5}$$

Движение вверх. Рассмотрим процесс подъема цепи [6]. Присоединение очередного звена к движущейся части происходит ударным образом: скорость элемента мгновенно изменяется от нуля до значения скорости движущейся части цепи. Пусть ds — длина элемента цепи, η — линейная плотность, тогда за время dt присоединяющийся элемент приобретет количество движения

$$dQ = \eta \dot{x} ds.$$

Происходит это под действием элементарного импульса силы N , приложенной со стороны движущейся части цепи:

$$\eta \dot{x} ds = N dt.$$

Разделим обе части уравнения на dt :

$$N = \eta \dot{x}^2. \quad (6)$$

Движущаяся часть цепи действует не на опору, а на очередной присоединяемый элемент (рис. 5, а). Соответственно на движущуюся часть цепи действует реакция N присоединяемого элемента (рис. 5, б). Разделив выражение (6) на $x\eta$, получим второй член \dot{x}^2/x уравнения (5).

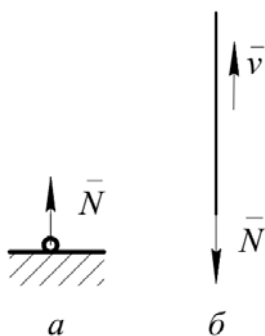


Рис. 5. Цепь, увлекаемая вверх:

а — движущаяся часть цепи на опору не действует, на очередной присоединяемый элемент цепи действует сила N со стороны движущейся части цепи; б — на движущуюся часть цепи действует реакция N присоединяемого элемента

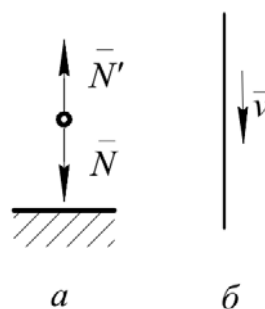


Рис. 6. Цепь, падающая вниз:

а — на опору действует сила N , передаваемая очередным останавливающимся элементом, на останавливающийся элемент действует реакция опоры N' ; б — на движущуюся часть цепи реакция опоры не передается

Движение вниз. Отделение элементов от движущейся части цепи происходит также ударным образом (рис. 6), т. е. при достижении поверхности дна бака скорость звеньев мгновенно падает до нуля. Но в данном случае сила N действует между останавливающимся элементом и поверхностью; реакция поверхности, действующая на ударяющийся элемент, не передается движущейся части цепи. Это означает, что движущаяся вниз часть цепи движется только под действием равнодействующая сил тяжести mg и внешней F .

Таким образом, необходимо учитывать второй член \dot{x}^2/x уравнения (5) только при подъеме:

$$\ddot{x} = g \left(\frac{x_{\text{ср}}}{x} - 1 \right) - \frac{1}{2} (1 + \text{sign } \dot{x}) \frac{\dot{x}^2}{x}. \quad (7)$$

Решение уравнения движения. Полученное уравнение (7) является искомым уравнением движения цепи. Аналогичное уравнение получено в работе [8]. Численно решим уравнение (7) используя начальные условия: $x(0) = 0,01$ м; $\dot{x}(0) = 0$ м/с. На рис. 7, а представлен график функции $x(t)$, полученной численным решением дифференциального уравнения (7), и данные одного эксперимента. График функции $\dot{x}(t)$ представлен на рис. 7, б, $\dot{x}(x)$ — на рис. 7, в.

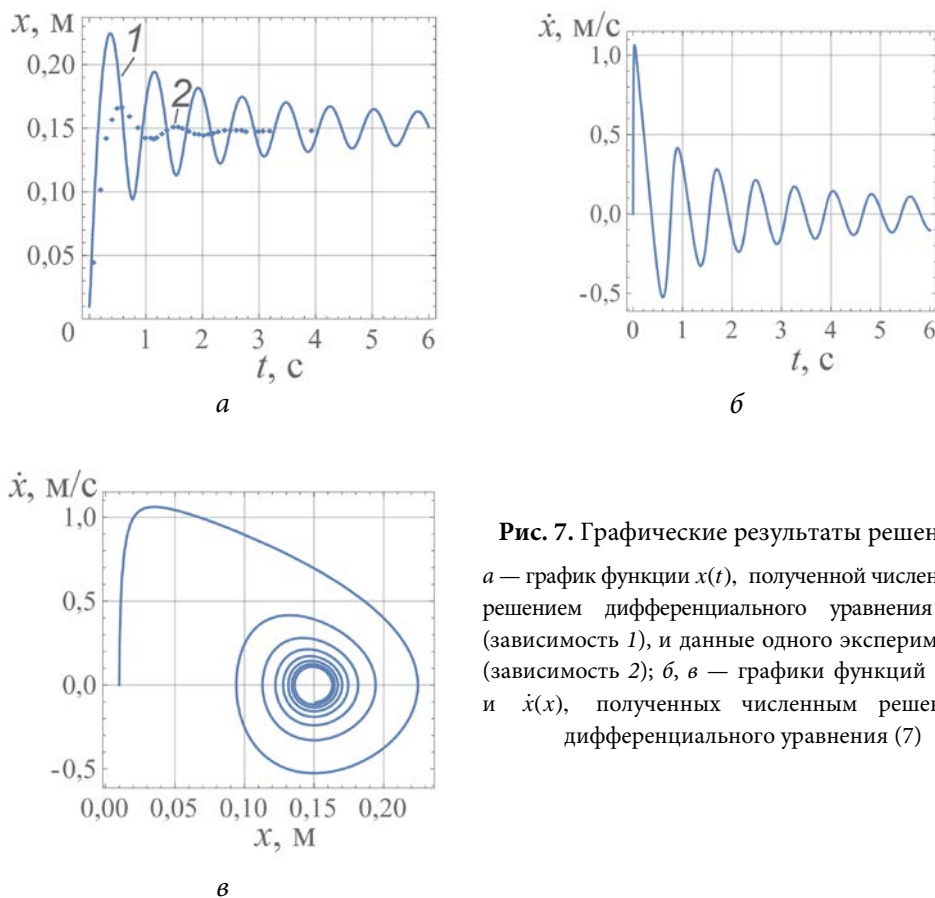


Рис. 7. Графические результаты решения:

а — график функции $x(t)$, полученной численным решением дифференциального уравнения (7) (зависимость 1), и данные одного эксперимента (зависимость 2); б, в — графики функций $\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(x)$, полученных численным решением дифференциального уравнения (7)

Сравнивая данные эксперимента и найденное решение $x(t)$ (см. рис. 7, а), приходим к выводу, что для более точного описания движения цепи необходимо учитывать диссипативный фактор — сопротивление среды (жидкости).

Сила сопротивления жидкости. При движении цепи и поплавка в жидкости сопротивление движению на низких скоростях обусловлено силами трения (вязкое сопротивление), на высоких — лобовым сопротивлением (рис. 8). Используя методику, описанную в [10], найдем значения сил вязкого и лобового сопротивления для поплавка и цепи, представим эти силы в виде функции от перемещения и скорости $F_{\text{ж}}(x, \dot{x})$ — см. таблицу.

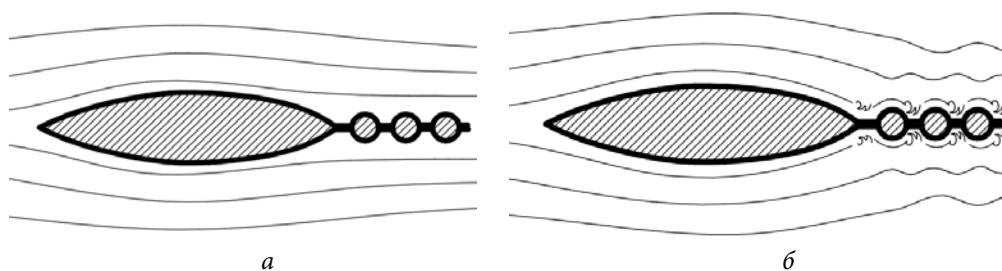


Рис. 8. Движение поплавка и цепи в жидкости. Сопротивление движению на низких скоростях обусловлено силами трения (а), на высоких — лобовым сопротивлением (б)

Значение силы сопротивления жидкости

Определяемая сила	Обозначение	Расчетная формула для $F_{ж}^{расч}$
Вязкое сопротивление для цепи	$F_{ж}^{вяз I}$	$4,32 \cdot 10^{-8} \cdot (167 \cdot x) \cdot \dot{x}$
Вязкое сопротивление для поплавка	$F_{ж}^{вяз II}$	$14,13 \cdot 10^{-8} \cdot \dot{x}$
Лобовое сопротивление для цепи	$F_{ж}^{лоб I}$	$4,12 \cdot 10^{-3} \cdot (167 \cdot x) \cdot \dot{x}^2$
Лобовое сопротивление для поплавка	$F_{ж}^{лоб II}$	$2,30 \cdot 10^{-3} \cdot \dot{x}^2$

Подставим найденные силы сопротивления жидкости в уравнение (7):

$$\ddot{x} = g \left(\frac{x_{ст}}{x} - 1 \right) - \frac{1 + \text{sign } \dot{x}}{2} \frac{\dot{x}^2}{x} - \text{sign } \dot{x} \frac{F_{ж}^{вяз I} + F_{ж}^{вяз II} + F_{ж}^{лоб I} + F_{ж}^{лоб II}}{x\eta}. \quad (8)$$

Численно решим уравнение (8), используя начальные условия: $x(0) = 0,01$ м; $\dot{x}(0) = 0$ м/с. Графики функций $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{x}(x)$ представлены на рис. 9.

В начальный момент времени на рис. 9, б наблюдается скачок скорости. Это объясняется тем, что внешняя сила F действует в течение малого промежутка времени лишь на малую массу первого элемента цепи, заданную начальными условиями и поэтому вызывает конечное приращение его скорости за малый временной промежуток.

Сравнение результатов эксперимента с найденным решением. Учет сопротивления среды позволил повысить точность математического описания эксперимента, реализующего задачу Букуа — см. рис. 7, а и рис. 9, а. На рис. 9, а видно, что полученный график опережает по времени данные экспериментов. Это связано прежде всего с неточностью в описании силы сопротивления жидкости: в выражениях для лобового сопротивления считается, что жидкость покоится. Однако в действительности движение поплавка и цепи создают восходящие и нисходящие потоки. Поплавок и цепь движутся против потока, который сами же создали в течение прошлого полупериода. В уравнении (8) значение скорости

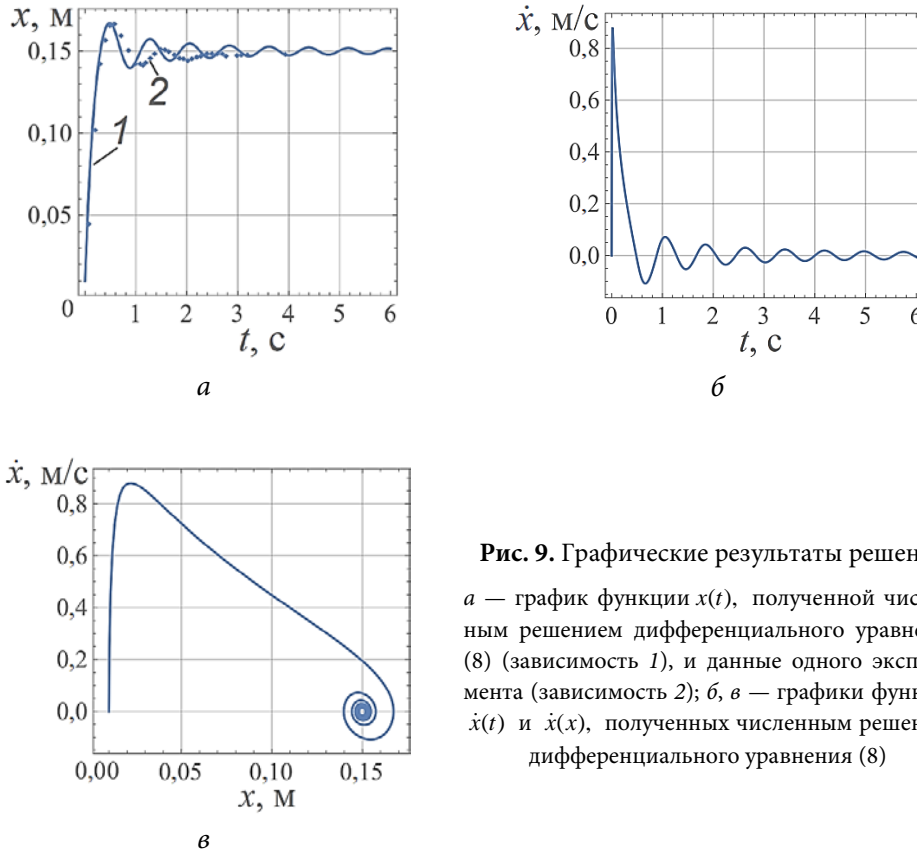


Рис. 9. Графические результаты решения: *a* — график функции $x(t)$, полученной численным решением дифференциального уравнения (8) (зависимость 1), и данные одного эксперимента (зависимость 2); *б, в* — графики функций $\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(x)$, полученных численным решением дифференциального уравнения (8)

$\dot{x} = v(t)$ считается в абсолютной системе координат, связанной с баком. В действительности в выражениях для силы сопротивления жидкости \dot{x} — скорость движения цепи и поплавка относительно жидкости [10]. Варьированием значений коэффициентов, входящих в выражения для сил сопротивления жидкости (см. табл. 1), добьемся полного совпадения теоретических и экспериментальных данных (рис. 10).

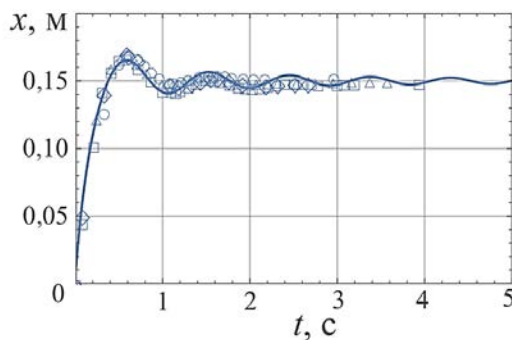


Рис. 10. Сравнение результатов эксперимента с найденным решением (точки — результаты эксперимента, график — решение уравнения движения). Значения составляющих силы сопротивления жидкости найдены подбором для точного совпадения теоретических и экспериментальных результатов

Заключение. Впервые проведено экспериментальное исследование движения системы переменной массы под действием постоянной силы на примере

задачи Букуа. Такая постановка опытов позволила выявить затухающий характер колебаний системы поплавок – цепочка при смещении цепи относительно положения равновесия. Для интерпретации данных эксперимента использовано классическое решение задачи Букуа. Получено дифференциальное уравнение движения цепи как системы с переменной массой под действием постоянной силы. Уравнение решено численными методами, найдены зависимости перемещения первого звена цепи от времени, скорости движения этого звена от времени и скорости от перемещения. Проведено сравнение теоретических и экспериментальных данных.

Литература

- [1] Мещерский И.В. Уравнения движения точки переменной массы в общем случае. *Изв. С-Петербург. политехн. ин-та*, 1904, т. 1, № 1-2, с. 77–148.
- [2] von Buquoy G. Analytische Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht. Leipzig, Breitkopf und Hartel, 1812.
- [3] von Buquoy G. Weitere Entwicklung und Anwendung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht. Leipzig, Breitkopf und Hartel, 1814.
- [4] von Buquoy G. Exposition d'un nouveau principe general de dynamique, dont le principe des vitesses 'virtuelles n'est qu'un cas particulier. Paris, V Courcier Publ., 1815.
- [5] Cayley A. On a class of dynamical problems. *Proc. Royal Soc. Lond.*, 1857, vol. 8, pp. 506–511. DOI: 10.1098/rspl.1856.0133 URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspl.1856.0133>
- [6] Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела. Современные концепции, ошибки и парадоксы. М., Наука, 1985.
- [7] Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы. М., Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1952.
- [8] Šima V., Podolsky J., Buquoy's problem. *Eur. J. Phys.*, 2005, vol. 26, pp. 1037–1045. DOI: 10.1088/0143-0807/26/6/011 URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/26/6/011>
- [9] Virga EG. Chain paradoxes. *Proc. R. Soc. A*, 2015, vol. 471, art. 20140657. DOI: 10.1098/rspa.2014.0657 URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/full/10.1098/rspa.2014.0657>
- [10] Путилов К.А. Курс физики. Т. 1. М., Физматгиз, 1963.

Домнышев Андрей Алексеевич — студент кафедры «Металлорежущие станки», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Научный руководитель — Калининченко Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана, ведущий научный сотрудник Института проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Домнышев А.А. Экспериментальное решение задачи Букуа. *Политехнический молодежный журнал*, 2019, № 12(41). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2019-12-553>

EXPERIMENTAL SOLUTION OF THE BUQUOY PROBLEM

A.A. Domnyshev

domnyshevaa@student.bmstu.ru

SPIN-code: 4142-6977

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article presents the results of an experiment on solving the Buquoy problem of chain motion under the action of a constant force applied to its end. An original technique was used in the experiments, according to which the movement of the chain was studied in liquid (water), and the buoyancy force of the float attached to the chain was used as a constant force. Such a conduction of experiments made it possible to reveal the damped nature of the oscillations of the float-chain system when the system is displaced relative to the equilibrium position. To interpret the experimental data, we used the classical solution of the Buquoy problem. The differential equation of chain motion as a system with variable mass (variable composition) under the action of constant force is solved by numerical methods. A comparison of theoretical and experimental data is made. The assumptions used to obtain the equations of motion, accepted in chain mechanics, are discussed.

Keywords

Buquoy problem, chain, variable mass system, variable composition system, Meshcherskiy equation, Newton's second law, damped oscillations, fluid resistance

Received 06.11.2019

© Bauman Moscow State Technical University, 2019

References

- [1] Meshcherskiy I.V. Motion equation for a point of variable mass in general. *Izv. S-Peterburg. politekhn. in-ta*, 1904, vol. 1, no. 1-2, pp. 77–148 (in Russ.).
- [2] von Buquoy G. Analytische Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht. Leipzig, Breitkopf und Hartel, 1812.
- [3] von Buquoy G. Weitere Entwicklung und Anwendung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht. Leipzig, Breitkopf und Hartel, 1814.
- [4] von Buquoy G. Exposition d'un nouveau principe general de dynamique, dont le principe des vitesses 'virtuelles n'est qu'un cas particulier. Paris, V Courcier Publ., 1815.
- [5] Cayley A. On a class of dynamical problems. *Proc. Royal Soc. Lond.*, 1857, vol. 8, pp. 506–511. DOI: 10.1098/rspl.1856.0133 URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspl.1856.0133>
- [6] Panovko Ya.G. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. Sovremennye kontseptsii, oshibki i paradoksy [Deformable solid mechanics. Modern conceptions, mistakes and paradoxes]. Moscow, Nauka Publ., 1985 (in Russ.).
- [7] Meshcherskiy I.V. Raboty po mekhanike tel peremennoy massy [Works on variable-mass body mechanics]. Moscow, Gos. izd. tekhniko-teoreticheskoy literatury Publ., 1952 (in Russ.).

- [8] Šima V., Podolsky J., Buquoy's problem. *Eur. J. Phys.*, 2005, vol. 26, pp. 1037–1045. DOI: 10.1088/0143-0807/26/6/011 URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/26/6/011>
- [9] Virga EG. Chain paradoxes. *Proc. R. Soc. A*, 2015, vol. 471, art. 20140657. DOI: 10.1098/rspa.2014.0657 URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/full/10.1098/rspa.2014.0657>
- [10] Putilov K.A. Kurs fiziki. T. 1 [Physics course. Vol. 1]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963 (in Russ.).

Domnyshev A.A. — Student, Department of Machine Tools, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Kalinichenko V.A., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation, Leading Researcher, Institute of Mechanics Problems of RAS named after A.Yu. Ishlinskiy, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:

Domnyshev A.A. Experimental solution of the Buquoy problem. *Politekhnicheskiiy molodezhnyy zhurnal* [Politechnical student journal], 2019, no. 12(41). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2019-12-553.html> (in Russ.).