

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ БИЛЬЯРДНОГО ШАРА

Абдулраззак Жарух

abdelrazaq.ja@gmail.com

SPIN-код: 3351-9315

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Выполнен динамический анализ движения бильярдного шара по столу. Этот анализ подразделяется на две части, поскольку движение мяча состоит из двух движений — скользящего и вращательного. Приведены динамические уравнения для расчета начальной скорости, которую должен иметь мяч, чтобы достичь заранее запланированной позиции. Дано математическое описание процесса моделирования движения бильярдного шара по столу в среде MATLAB, результаты моделирования представлены в графическом виде. Результаты работы планируется использовать для управления движением схвата манипуляционного робота, предназначенного для игры в бильярд.

Ключевые слова

Бильярд, динамический анализ, симуляция в среде MATLAB, моделирование, мехатронная система, скользящее движение, вращательное движение, кинетическая энергия

Поступила в редакцию 31.10.2019

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019

Введение. Производительность большинства современных заводов все больше зависит от манипуляторов, работающих на производственных линиях, причем большинство работ, выполняемых этими манипуляторами, осуществляется с динамическими объектами. Чтобы спроектировать эффективную систему управления, необходимо сначала выполнить анализ среды, в которой будет работать робот. В этой статье в качестве примера рассмотрен динамический анализ движения бильярдного шара. Результаты анализа были промоделированы в среде MATLAB.

Динамический анализ и модель траектории бильярдного шара. Когда мы ударяем по шару, он начинает перемещаться. При этом его движение подразделяется на две части: сначала это скользящее движение, а затем — вращательное. Скользящее движение характеризуется ненулевой скоростью нижней точки мяча относительно стола. При вращательном движении скорость нижней точки шара равна нулю относительно стола, а его скорость определяется только угловой скоростью (рис. 1).

Рассматривая движущийся бильярдный шар (рис. 2), мы будем полагать, что скользящее движение начинается в точке с координатами x_0, v_0 и заканчивается в точке x_1, v_1 . После этого начинается вращательное движение, которое заканчивается в точке x_2, v_2 . Буквами x_i, v_i ($i = 1, 2$) на рис. 2 обозначены координата и скорость шара соответственно.

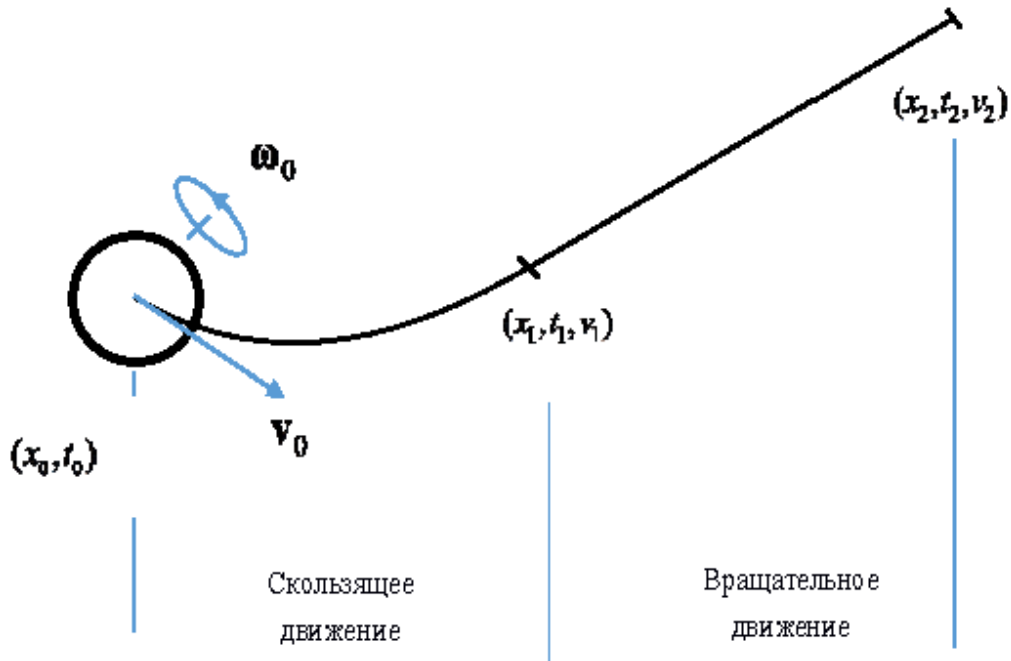


Рис. 1. Две части траектории движения бильярдного шара

На рис. 2 показан бильярдный шар массой m , радиусом R , момент инерции [1] шара $I = 5/2 mR^2$ (здесь v и ω — соответственно линейная и угловая скорости бильярдного шара; g — ускорение силы тяжести, \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} — единичные векторы, связанные с системой координат стола).

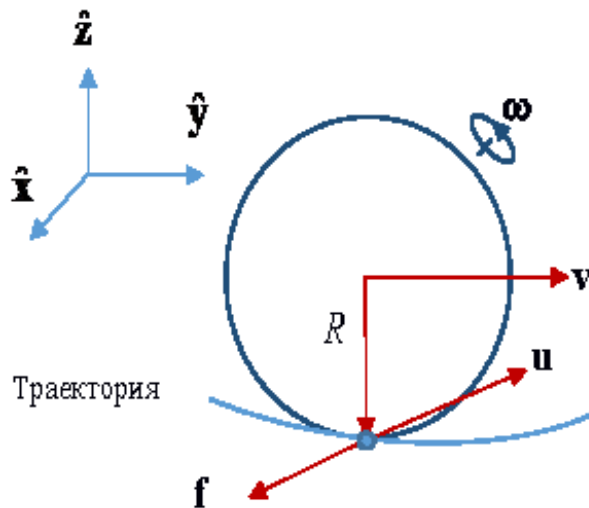


Рис. 2. Бильярдный шар в движении

Скорость u в точке контакта со столом (скорость скольжения) равна

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + R\hat{z} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Скользящее движение. Скользящее движение шара начинается при

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0 + R\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\omega}_0.$$

В самой нижней точке шара имеем силу трения [2]

$$\mathbf{f} = -\mu_s mg \hat{\mathbf{u}},$$

где μ_s — коэффициент трения скольжения; $\hat{\mathbf{u}}$ — единичный вектор в направлении \mathbf{u} .

Динамика шара [3, 4] определяется двумя уравнениями:

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\mu_s mg \hat{\mathbf{u}} \quad \text{и} \quad \sum \mathbf{M} = I_G \dot{\boldsymbol{\omega}},$$

где $\sum \mathbf{M}$ — сумма внешних сил крутящего момента; I_G — момент инерции шара. Тогда

$$-R\hat{\mathbf{z}} \times -\mu_s mg \hat{\mathbf{u}} = \frac{5}{2} mR^2 \dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mu_s g \hat{\mathbf{u}}; \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{5}{2} \frac{\mu_s}{R} g \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{u}}. \tag{3}$$

Из уравнения (1) получим

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{v}} + R\hat{\mathbf{z}} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Используя уравнения (2) и (3), определим ускорение $\dot{\mathbf{u}}$ следующим образом:

$$\dot{\mathbf{u}} = -\mu_s g \hat{\mathbf{u}} + R\hat{\mathbf{z}} \times \frac{5}{2} \frac{\mu_s}{R} g \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{u}};$$

$$\dot{\mathbf{u}} = -\mu_s g \hat{\mathbf{u}} + \frac{5}{2} \mu_s g \hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{u}});$$

$$\dot{\mathbf{u}} = -\mu_s g \hat{\mathbf{u}} - \frac{5}{2} \mu_s g \hat{\mathbf{u}};$$

$$\dot{\mathbf{u}} = -\frac{7}{2} \mu_s g \hat{\mathbf{u}}. \tag{4}$$

Теперь, интегрируя уравнение (4), получим уравнение скорости точки контакта шара со столом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - \frac{7}{2} \mu_s g t \hat{\mathbf{u}}. \tag{5}$$

Аналогично из (5) получим уравнение линейной скорости центра шара \mathbf{v} и уравнение угловой скорости шара $\boldsymbol{\omega}$ соответственно:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \mu_s g t \hat{\mathbf{u}}; \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{5}{2} \frac{\mu_s}{R} \operatorname{tg} \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{u}}.$$

Интегрируя уравнение (6), определим позицию \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t - \mu_s g \frac{t^2}{2} \hat{\mathbf{u}}. \quad (7)$$

Здесь вектор $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Эта часть движения заканчивается, когда скорость в уравнении (1) равна нулю; из (5) получим время окончания этой части движения t_1 :

$$t_1 = \frac{2 \|\mathbf{u}_0\|}{7 \mu_s g}. \quad (8)$$

Из (6) и (8) определим скорость \mathbf{v}_1 в точке \mathbf{x}_1 , которая является конечной точкой этой части движения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_0 - \frac{2}{7} \mathbf{u}_0; \\ \mathbf{v}_1 &= \frac{5}{7} \mathbf{v}_0 - \frac{2}{7} R \hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\omega}_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (7) и (8) найдем координаты шара в конце этой части движения \mathbf{x}_1 (после завершения скользящего движения)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 \frac{2 \|\mathbf{u}_0\|}{7 \mu_s g} - \mu_s g \frac{\left(\frac{2 \|\mathbf{u}_0\|}{7 \mu_s g} \right)^2}{2} \hat{\mathbf{u}}; \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 \frac{2 \|\mathbf{v}_0 + R \hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\omega}_0\|}{7 \mu_s g} - \mu_s g \frac{\left(\frac{2 \|\mathbf{v}_0 + R \hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\omega}_0\|}{7 \mu_s g} \right)^2}{2} \hat{\mathbf{u}}; \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + \frac{2 \|\mathbf{v}_0 + R \hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\omega}_0\|}{49 \mu_s g} (6\mathbf{v}_0 - R \hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\omega}_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, установлены параметры скользящего движения, \mathbf{x}_1 , t_1 , \mathbf{v}_1 , которые будут использоваться при описании вращательного и определении начальных параметров \mathbf{v}_0 , $\boldsymbol{\omega}_0$, необходимых для достижения поставленной цели.

Вращательное движение. Когда скользящая часть заканчивается, шар начинает двигаться, вращаясь. Здесь скорость нижней точки шара равна нулю, поэтому скорость центра шара определяется только скоростью вращения.

Кинетическая энергия [5] E для бильярдного шара определяется как

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5}mR^2\omega^2;$$

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v^2}{R^2}\right);$$

$$E = \frac{7}{10}mv^2.$$

Дифференцируя уравнение энергии, получим изменение энергии во времени:

$$\dot{E} = \frac{7}{5}mv\dot{v}. \quad (11)$$

Во время вращения энергия рассеивается из-за трения качения. Обозначив коэффициент трения качения как μ_r , рассеиваемую энергию (потери) можно определить следующим образом:

$$\dot{E} = -\mu_r mgv. \quad (12)$$

Из уравнений (11) и (12) получим

$$\dot{v} = -\frac{5}{7}\mu_r g.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, найдем скорость шара:

$$v = \|\mathbf{v}_1\| - \frac{5}{7}\mu_r g(t - t_1);$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \frac{5}{7}\mu_r g(t - t_1)\hat{\mathbf{v}}_1. \quad (13)$$

Здесь $\hat{\mathbf{v}}$ — единичный вектор в направлении \mathbf{v} .

Проинтегрировав уравнение (13), получим координаты текущего положения шара:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}_1(t - t_1) - \frac{5}{14}\mu_r g(t - t_1)^2\hat{\mathbf{v}}_1. \quad (14)$$

Из выражения (13) легко получим время t_{2,v_2} , когда мяч достигает скорости v_2 :

$$t_{2,v_2} = t_1 + \frac{7\|\mathbf{v}_1\| - v_2}{5\mu_r g}. \quad (15)$$

В тот момент, когда скорость станет равной нулю ($v_2 = 0$), шар остановится. Это время найдем из выражения

$$t_{2,0} = t_1 + \frac{7 \|\mathbf{v}_1\|}{5 \mu_r g}.$$

Для определения координат точки $\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t_{2,v_2}$ подставим полученное значение в уравнения (14) и (15):

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}_1(t_{2,v_2} - t_1) - \frac{5}{14} \mu_r g (t_{2,v_2} - t_1)^2 \hat{\mathbf{v}}_1. \quad (16)$$

Теперь нам известны все параметры, которые позволяют найти начальные скорости шара \mathbf{v}_0, ω_0 для реализации движения шара с заданными параметрами x_0, x_2, v_2 .

Определение стартовой скорости шара. Пусть движение происходит только в одном направлении из начальной точки до полной остановки. Обозначим

$$\mathbb{Z} = v_0 - R\omega_0; \quad (17)$$

$$\mathbb{N} = 5v_0 + 2R\omega_0. \quad (18)$$

Тогда уравнения (8), (9), (10), (13) и (16) будут иметь вид

$$t_1 = \frac{2}{7} \frac{\mathbb{Z}}{\mu_s g}; \quad (19)$$

$$v_1 = \frac{1}{7} \mathbb{N}; \quad (20)$$

$$x_1 - x_0 = \frac{2}{49} \frac{1}{\mu_s g} \mathbb{Z}(\mathbb{N} + \mathbb{Z}); \quad (21)$$

$$t_{2,v_2} = t_1 + \frac{7 \|\mathbf{v}_1\| - v_2}{5 \mu_r g}; \quad (22)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{7} \mathbb{N}(t_{2,v_2} - t_1) - \frac{5}{14} \mu_r g (t_{2,v_2} - t_1)^2. \quad (23)$$

Уравнения (17) и (18) имеют две неизвестных величины v_0, ω_0 . Для их определения введем дополнительное условие $v_0 \geq R\omega_0 \geq -5/2 v_0$ [6], чтобы избежать ситуации, при которой шар меняет свое направление, или скорости v_0, ω_0 имеют противоположные направления. Такая ситуация показана на рис. 3.

Подставим выражения (22) в (23), (20) в (24) и (25) в (21) соответственно:

$$x_2 - x_1 = \frac{7}{5} \frac{v_1^2}{\mu_r g} - \frac{7}{5} \frac{v_1 v_2}{\mu_r g} - \frac{7}{10} \frac{1}{\mu_r g} (v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2); \quad (24)$$

$$\mathbb{N} = \sqrt{70\mu_r g(x_2 - x_1) + 49v_2^2}; \quad (25)$$

$$\mathbb{Z}^2 + \mathbb{N}\mathbb{Z} - \frac{49}{2}(x_1 - x_0)\mu_s g = 0. \quad (26)$$

Отсюда можно найти значение \mathbb{Z} , учитывая условие $v_0 \geq R\omega_0$:

$$\mathbb{Z} = \frac{-\mathbb{N} + \sqrt{\mathbb{N}^2 + 98(x_1 - x_0)\mu_s g}}{2} > 0.$$

Из уравнений (17) и (18) получаем необходимые значения линейной и угловой скорости:

$$v_0 = \frac{\mathbb{N} + 2\mathbb{Z}}{7}; \quad (27)$$

$$\omega_0 = \frac{\mathbb{N} - 5\mathbb{Z}}{7R}. \quad (28)$$

Итак, мы нашли начальные скорости v_0 , ω_0 , предполагая, что x_0 , x_2 , v_2 являются известными желаемыми значениями.

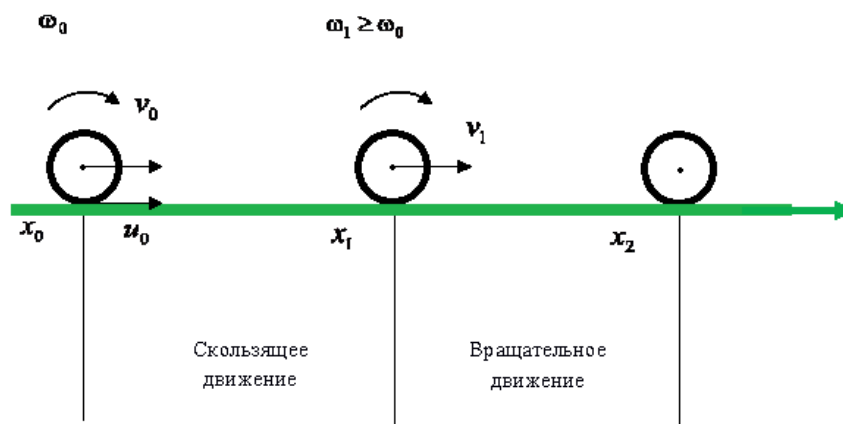


Рис. 3. Бильярдный шар в движении

Разработанная в среде MATLAB [7, 8] модель движения шара показана на рис. 4. Она состоит из двух блоков [9]. В одном блоке (левом) рассчитываются значения начальных скоростей v_0 , ω_0 с использованием уравнений (25), (26), (27) и (28) для входных сигналов x_0 , x_1 , x_2 , v_2 шара радиусом r . Во втором блоке (правом) вычисляются координаты точки траектории x во время движения шара путём решения уравнений (7) и (14). Блок α строит выходные сигналы x , v , ω и E в виде графиков. Блок β показывает видео движения шара [10].

Результаты моделирования в виде графиков приведены на рис. 5. Движение по траектории, рассчитанной по уравнениям (10) и (14) и состоящей из двух парабол, показано на рис. 5, а. Здесь точка A является конечной точкой скользящего движения (первая парабола), а точка B — конечной точкой вращательного движения шара.

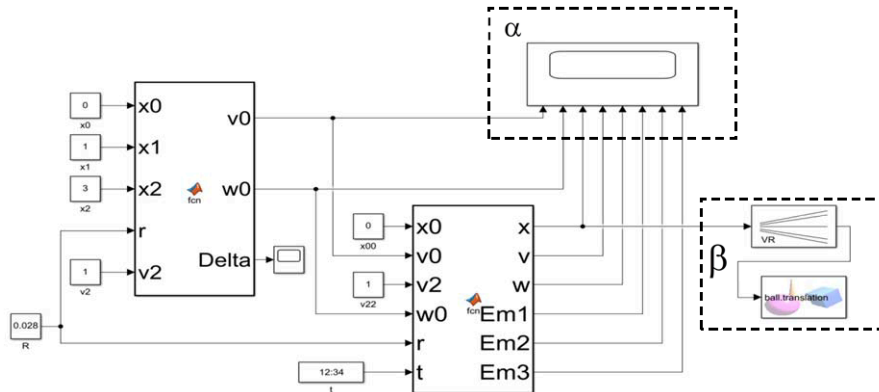


Рис. 4. Полная модель движения шара в среде MATLAB

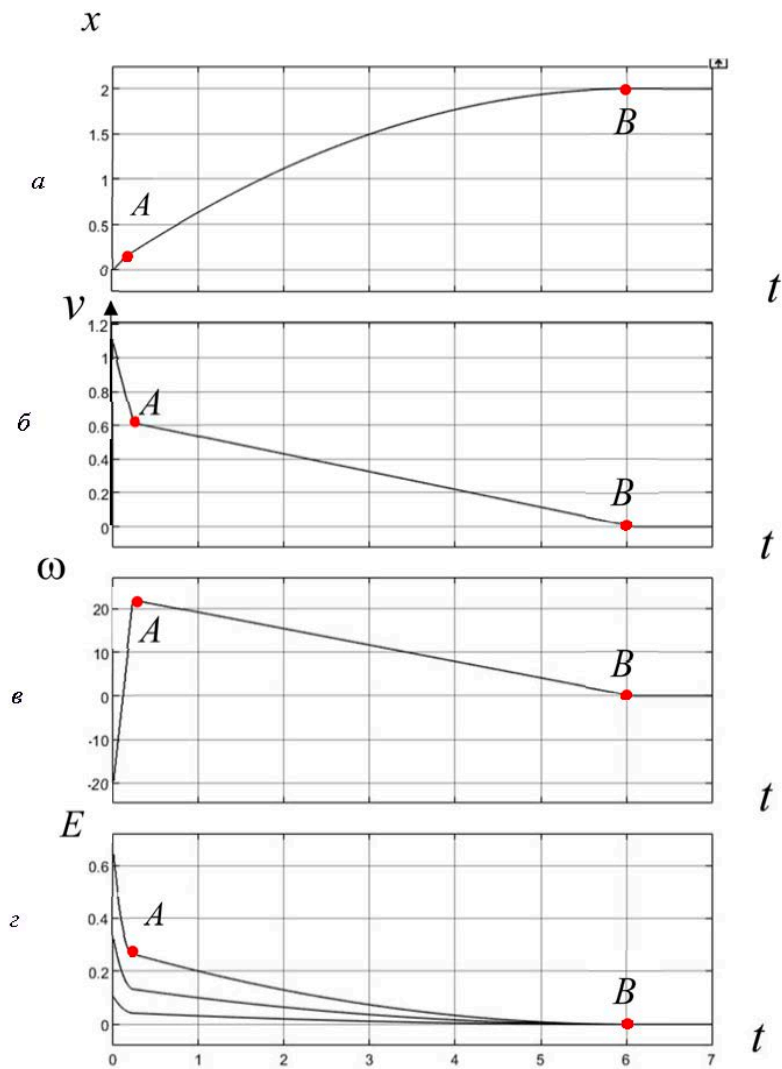


Рис. 5. Результаты моделирования

Линейная скорость шара на траектории, рассчитанной по уравнениям (6) и (13) и состоящей из двух линейных графиков, показана на рис. 5, б. Здесь точка *A* является конечной точкой скользящего движения (первый линейный график), а точка *B* — конечной точкой движения шара. Угловая скорость шара на траектории показана на рис. 5, в. Изменение кинетической энергии шара для разных масс $m_1 = 0,16$ кг (вверху), $m_2 = 0,5$ кг и $m_3 = 1$ кг (внизу) соответственно показано на рис. 5, г.

Проведенное моделирование подтвердило результаты математического описания движения шара. Полученные траектории и характер изменения скорости соответствуют ожидаемым, что хорошо видно из графиков изменения энергии шаров с разными массами (см. рис. 5, г).

Заключение. Представлен динамический анализ шара, движущегося на бильярдном столе. Полученные результаты позволяют рассчитать его начальную скорость и требуемое воздействие (энергию) в зависимости от координат конечного положения и его скорости в этой точке, которые рассматриваются как известные (заданные значения). Мы подтвердили корректность полученных математических выражений, выполнив моделирование с использованием среды MATLAB. Результаты этой работы планируется использовать для управления движением схвата манипуляционного робота, предназначенного для игры в бильярд.

Литература

- [1] Persson B., Tosatti E., eds. Physics of sliding friction. Springer, 2013.
- [2] Ruina A.L., Pratap R. Introduction to statics and dynamics. Oxford University Press, 2002.
- [3] Faissler S.W. Particle dynamics. The laws of motion. Michigan State University, 2002.
- [4] Singh S. Kinematics fundamentals. Rice University, 2011.
- [5] Simulation and model based design. *mathworks.com: веб-сайт*. URL: <https://www.mathworks.com/products/simulink.html> (дата обращения: 15.08.2019).
- [6] Simulink environment fundamentals. *mathworks.com: веб-сайт*. URL: https://www.mathworks.com/help/referencelist.html?type=block&s_tid=CRUX_gn_block (дата обращения: 15.08.2019).
- [7] Simulink 3D Animation. *mathworks.com: веб-сайт*. URL: <https://www.mathworks.com/products/3d-animation/model-examples.html> (дата обращения: 15.08.2019).

Абдулраззак Жарух — студент кафедры «Робототехнические системы и мехатроника», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Ющенко Аркадий Семенович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Робототехнические системы», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Абдулраззак Жарух. Анализ движения бильярдного шара. *Политехнический молодежный журнал*, 2019, № 12(41). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2019-12-558>

ANALYSIS OF A BILLIARD BALL MOVEMENT

Abdulrazzak Jaroukh

abdelrazaq.ja@gmail.com

SPIN-code: 3351-9315

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

A dynamic analysis of the movement of a billiard ball on a table is performed. This analysis is divided into two parts, because the movement of the ball consists of two movements-sliding and rotational. Dynamic equations are given for calculating the initial speed that the ball must have in order to reach a predetermined position. A mathematical description of the process of modeling the movement of a billiard ball on a table in the MATLAB environment is given, the simulation results are presented in graphical form. The results of the work are planned to be used to control the movement of the gripper of a manipulation robot designed for playing billiards.

Keywords

Billiards, dynamic analysis, MATLAB simulation, modeling, mechatronic system, sliding motion, rotational motion, kinetic energy

Received 31.10.2019

© Bauman Moscow State Technical University, 2019

References

- [1] Persson B., Tosatti E., eds. Physics of sliding friction. Springer, 2013.
- [2] Ruina A.L., Pratap R. Introduction to statics and dynamics. Oxford University Press, 2002.
- [3] Faissler S.W. Particle dynamics. The laws of motion. Michigan State University, 2002.
- [4] Singh S. Kinematics fundamentals. Rice University, 2011.
- [5] Simulation and model based design. *mathworks.com: website*. URL: <https://www.mathworks.com/products/simulink.html> (accessed: 15.08.2019).
- [6] Simulink environment fundamentals. *mathworks.com: website*. URL: https://www.mathworks.com/help/referencelist.html?type=block&s_tid=CRUX_gn_block (accessed: 15.08.2019).
- [7] Simulink 3D Animation. *mathworks.com: website*. URL: <https://www.mathworks.com/products/3d-animation/model-examples.html> (accessed: 15.08.2019).

Abdulrazzak Jaroukh — Student, Department of Robotics and Mechatronics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Yushchenko A.S., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of Department of Robotics and Mechatronics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:

Abdulrazzak Jaroukh. Analysis of a billiard ball movement. *Politekhnikheskiy molodezhnyy zhurnal* [Politechnical student journal], 2019, no. 12(41). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2019-12-558.html> (in Russ.).