

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОЗВЕННОГО СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ****В.В. Заика**

zaikavv@student.bmstu.ru

SPIN-код: 1733-0115

**А.Л. Масленников**

amas@bmstu.ru

SPIN-код: 7087-6303

**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация****Аннотация**

Математическую модель однозвенного или многозвенного сферического маятника можно применять в качестве модели, описывающей динамику различных технических систем, в том числе и биомеханических систем. Для разных задач можно использовать описание как для случая математического, так и для случая физического сферического маятника. В работе описан процесс получения математических моделей сферического маятника в декартовой системе координат как для математического, так и для физического случая, в каждом из которых рассматриваются системы как при отсутствии диссипативных сил, так и при их наличии. Численное моделирование систем реализуется явным одношаговым методом Рунге — Кутты 4-го порядка.

**Ключевые слова**

Сферический маятник, математический сферический маятник, физический сферический маятник, диссипативные силы, моделирование, математическая модель, решение задачи Коши, метод Рунге — Кутты

Поступила в редакцию 18.10.2019

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019

**Введение.** Сферический маятник — это нелинейная динамическая система, которую можно использовать в качестве математической модели, описывающей динамику различных систем, в том числе и биомеханических систем [1, 2]. Сферический маятник можно рассматривать как для математического, так и для физического случая. Математический сферический маятник, кинематическая схема которого представлена на рис. 1, а, состоит из материальной точки массой  $m$ , прикрепленной к условной точке подвеса невесомым стержнем длиной  $l$  [3–5]. Физический сферический маятник, кинематическая схема которого представлена на рис. 1, б, состоит из шара радиуса  $r$  массой  $m_b$ , стержня длиной  $l$  и массой  $m_s$ , прикрепленного к условной точке подвеса  $O$  [5, 6].

В работе [7] был рассмотрен процесс получения математических моделей для математического и физического сферического маятника в сферической системе координат. В данной работе рассматривается аналогичная задача, но в декартовой системе координат, описание исследуемой системы в которой

удобнее использовать для решения задач позиционного и координирующего управлений [8, 9]. Моделирование полученных математических моделей реализуется методом Рунге — Кутты 4-го порядка [10, 11]. В заключении приводятся результаты численного моделирования.

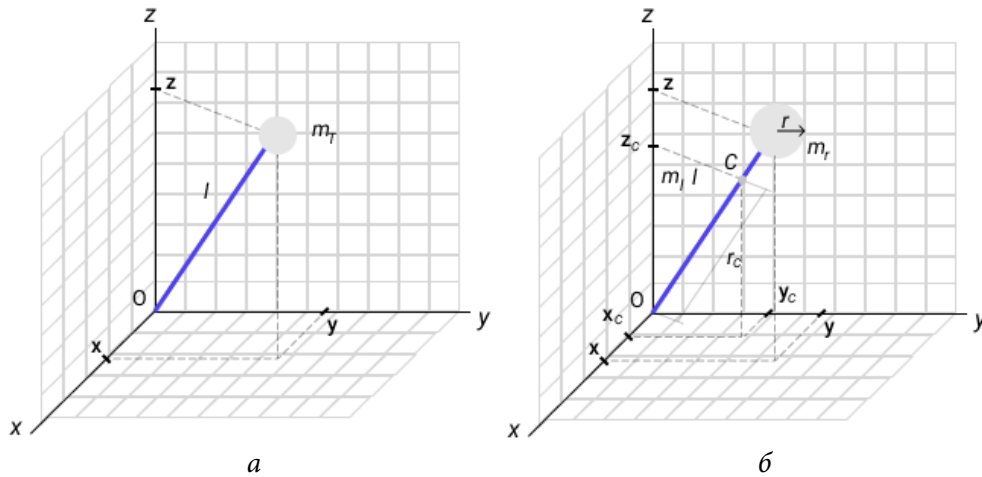


Рис. 1. Кинематические схемы сферического маятника  
 а — математический; б — физический

**Математический сферический маятник.** Для получения математической модели однозвенного сферического маятника используем второй закон Ньютона в декартовой системе координат, который запишется в векторном виде следующим образом:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{u}, \tag{1}$$

где  $m$  — масса шара;  $\mathbf{a}$  — ускорение шара;  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения;  $\mathbf{N}$  — сила натяжения стержня;  $\mathbf{u}$  — вектор управляющих воздействий.

Систему дифференциальных уравнений, описывающих движение сферического маятника в декартовой системе координат, можно записать в виде

$$\begin{cases} m\ddot{x} = u_x + 2\lambda x; \\ m\ddot{y} = u_y + 2\lambda y; \\ m\ddot{z} = -mg + u_z + 2\lambda z, \end{cases} \tag{2}$$

где  $u_x, u_y, u_z$  — проекции управляющего момента на оси координат;  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности, связывающий географ вектора точки движения массы с поверхностью сферы радиусом  $l$  [12]. Другими словами, коэффициент пропорциональности  $\lambda$  должен удовлетворять системе из трех уравнений:

$$\begin{cases} N_x = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \\ N_y = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \\ N_z = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{cases}$$

где  $\Phi$  — функция уравнения поверхности, которая имеет вид

$$\Phi(t, x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0.$$

С использованием метода, описанного в работе [12],  $\lambda$  для рассматриваемой системы можно записать в следующем виде:

$$\lambda = \frac{-(u_x x + u_y y + u_z z) + mgz - mv^2}{2l^2}, \quad (3)$$

где  $v$  — вектор линейных скоростей, а  $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ .

После подстановки соотношения (3) для найденной  $\lambda$  в соотношение (2) и соответствующих преобразований, получим следующую систему из трех дифференциальных уравнений, описывающих динамику однозвенного математического сферического маятника в декартовой системе координат:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{u_x}{m} + \frac{-Ul + mgz - mv^2}{ml^2} x; \\ \ddot{y} = \frac{u_y}{m} + \frac{-Ul + mgz - mv^2}{ml^2} y; \\ \ddot{z} = \frac{u_z}{m} - g + \frac{-Ul + mgz - mv^2}{ml^2} z, \end{cases} \quad (4)$$

где  $U = 1/l(u_x x + u_y y + u_z z)$ .

Для численного моделирования рассматриваемой системы необходимо получить описание системы (4) в форме Коши [10, 11], для чего выполним следующую замену переменных:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = y \\ x_4 = \dot{y} \\ x_5 = z \\ x_6 = \dot{z} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор состояния системы.

Тогда описание системы в форме Коши будет состоять из шести следующих дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{u_x}{m} + \frac{-Ul + mgx_5 - mv^2}{ml^2} x_1; \\ \dot{x}_3 = x_4; \\ \dot{x}_4 = \frac{u_y}{m} + \frac{-Ul + mgx_5 - mv^2}{ml^2} x_3; \\ \dot{x}_5 = x_6; \\ \dot{x}_6 = \frac{u_z}{m} - g + \frac{-Ul + mgx_5 - mv^2}{ml^2} x_5, \end{cases} \quad (6)$$

где  $U = 1/l(u_x x_1 + u_y x_3 + u_z x_5)$ ;  $v^2 = x_2^2 + x_4^2 + x_6^2$  переписаны через элементы вектора состояния  $\mathbf{x}$  в форме Коши.

Полученная математическая модель (6) не учитывает наличие диссипативных сил, присутствующих в физической системе. Поэтому, введем диссипативную функцию Рэля [13], которая в декартовой системе координат записывается в следующем виде:

$$\mathbf{R} = \mu_x \dot{x} \bar{i} + \mu_y \dot{y} \bar{j} + \mu_z \dot{z} \bar{k}, \quad (7)$$

где  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  — коэффициенты демпфирования. С учетом предположения о том, что система изотропна их можно принять равными между собой:  $\mu_x = \mu_y = \mu_z = \mu$ .

Соотношение (1) с учетом диссипативных сил примет вид

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{u} + \mathbf{R}.$$

Очевидно, что учет диссипативных сил выражается в дополнительном слагаемом в системе дифференциальных уравнений в векторном виде, а следовательно, аналогичное будет справедливо и для системы дифференциальных уравнений, записанной в проекциях на соответствующие оси:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{u_x - \mu\dot{x}}{m} + \frac{-Ul - \mu(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) + mgz - mv^2}{ml^2} x; \\ \ddot{y} = \frac{u_y - \mu\dot{y}}{m} + \frac{-Ul - \mu(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) + mgz - mv^2}{ml^2} y; \\ \ddot{z} = \frac{u_z - \mu\dot{z}}{m} - g + \frac{-Ul - \mu(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) + mgz - mv^2}{ml^2} z. \end{cases}$$

Описание полученной системы в форме Коши формируется с таким же вектором состояния  $\mathbf{x}$ , описанным уравнением (5), и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{u_x - \mu x_2}{m} + \frac{-Ul - \mu(x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6) + mgx_5 - mv^2}{ml^2} x_1; \\ \dot{x}_3 = x_4; \\ \dot{x}_4 = \frac{u_y - \mu x_4}{m} + \frac{-Ul - \mu(x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6) + mgx_5 - mv^2}{ml^2} x_3; \\ \dot{x}_5 = x_6; \\ \dot{x}_6 = \frac{u_z - \mu x_6}{m} - g + \frac{-Ul - \mu(x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6) + mgx_5 - mv^2}{ml^2} x_5. \end{cases}$$

**Физический сферический маятник.** Математическая модель физического сферического маятника будет описывать движение центра масс всей системы, который движется по поверхности сферы радиуса  $r_c$ . Система дифференциальных уравнений, описывающая движение центра масс системы, по аналогии с рассмотренным ранее случаем математического сферического маятника, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_c = \frac{u_x}{m} + \frac{-U_c l + mgz_c - mv_c^2}{mr_c^2} x_c; \\ \ddot{y}_c = \frac{u_y}{m} + \frac{-U_c l + mgz_c - mv_c^2}{mr_c^2} y_c; \\ \ddot{z}_c = \frac{u_z}{m} - g + \frac{-U_c l + mgz_c - mv_c^2}{mr_c^2} z_c, \end{cases}$$

где  $x_c, y_c, z_c$  — координаты центра масс;  $v_c$  — линейная скорость центра масс;  $m$  — масса точки;  $r_c$  — радиус-вектор центра масс, которые определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} v_c^2 &= \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2; \\ m &= m_1 + m_b; \\ r_c &= \frac{m_1 l + 2m_b(r+l)}{2(m_1 + m_b)}; \\ U_c &= \frac{1}{l}(u_x x_c + u_y y_c + u_z z_c). \end{aligned}$$

Линейная скорость центра масс зависит от угловой скорости движения тела относительно мгновенной оси, проходящей через точку начала координат, следующим образом:

$$\mathbf{v}_c = \overline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}_c$$

или в виде проекций на оси декартовой системы координат

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{z}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_x \\ \boldsymbol{\omega}_y \\ \boldsymbol{\omega}_z \end{bmatrix} r_c.$$

Выражения для линейных скоростей центра шара в проекции на оси декартовой системы координат  $(x_b, y_b, z_b)$  примут следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{z}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_x \\ \boldsymbol{\omega}_y \\ \boldsymbol{\omega}_z \end{bmatrix} (r+l) = \frac{1}{r_c} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{z}_c \end{bmatrix}.$$

Координаты центра шара можно определить с помощью масштабирования вектора  $r_c$ , следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix},$$

где  $K = l + r/r_c$  — коэффициент масштабирования.

Таким образом, система дифференциальных уравнений, описывающих движение физического маятника, состоящая из системы дифференциальных уравнений в форме Коши и алгебраических уравнений, связывающих траектории движения центра масс и центра шара маятника, имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{u_x}{m} + \frac{-Ul + mgx_5 - mv^2}{mr_c^2} x_1; \\ \dot{x}_3 = x_4; \\ \dot{x}_4 = \frac{u_y}{m} + \frac{-Ul + mgx_5 - mv^2}{mr^2} x_3; \\ \dot{x}_5 = x_6; \\ \dot{x}_6 = \frac{u_z}{m} - g + \frac{-Ul + mgx_5 - mv^2}{mr_c^2} x_5; \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\begin{cases} x_7 = Kx_1; \\ x_8 = x_2 \frac{r}{r_c}; \\ x_9 = Kx_3; \\ x_{10} = x_4 \frac{r}{r_c}; \\ x_{11} = Kx_5; \\ x_{12} = x_6 \frac{r}{r_c}. \end{cases} \quad (8)$$

Математическая модель, заданная системой уравнений (8), получена без учета наличия диссипативных сил. Для учета диссипации введем диссипативную функцию Рэля, соответствующую уравнению (7). Аналогично рассмотренному ранее подходу, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику физического сферического маятника с учетом диссипативных сил в декартовой системе координат:

$$\begin{cases} \ddot{x}_c = \frac{u_x - \mu \dot{x}_c}{m} + \frac{-U_c l - \mu(x_c \dot{x}_c + y_c \dot{y}_c + z_c \dot{z}_c) + mgz_c - mv_c^2}{mr_c^2} x_c; \\ \ddot{y}_c = \frac{u_y - \mu \dot{y}_c}{m} + \frac{-U_c l - \mu(x_c \dot{x}_c + y_c \dot{y}_c + z_c \dot{z}_c) + mgz_c - mv_c^2}{mr_c^2} y_c; \\ \ddot{z}_c = \frac{u_z - \mu \dot{z}_c}{m} - g + \frac{-U_c l - \mu(x_c \dot{x}_c + y_c \dot{y}_c + z_c \dot{z}_c) + mgz_c - mv_c^2}{mr_c^2} z_c. \end{cases}$$

Описание полученной системы в форме Коши формируется с таким же вектором состояния  $\mathbf{x}$ , как и ранее, и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{u_x - \mu x_2}{m} + \frac{-Ul - \mu(x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6) + mgx_5 - mv^2}{mr_c^2} x_1; \\ \dot{x}_3 = x_4; \\ \dot{x}_4 = \frac{u_y - \mu x_4}{m} + \frac{-Ul - \mu(x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6) + mgx_5 - mv^2}{mr^2} x_3; \\ \dot{x}_5 = x_6; \\ \dot{x}_6 = \frac{u_z - \mu x_6}{m} - g + \frac{-Ul - \mu(x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6) + mgx_5 - mv^2}{mr_c^2} x_5; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_7 = Kx_1; \\ x_8 = x_2 \frac{r}{r_c}; \\ x_9 = Kx_3; \\ x_{10} = x_4 \frac{r}{r_c}; \\ x_{11} = Kx_5; \\ x_{12} = x_6 \frac{r}{r_c}. \end{cases} \quad (9)$$

**Численное моделирование системы.** Моделирование полученных математических моделей реализуется явным одношаговым методом Рунге — Кутты 4-го порядка [10, 11]. Для систем дифференциальных уравнений физического сферического маятника (8), (9) решение формируется из численного решения задачи Коши для первых шести уравнений и последующего расчета значений величин по оставшимся шести алгебраическим уравнениям на каждом шаге.

Модель имеет следующие параметры:

Масса маятника $m_т$ , кг .....	10
Масса шара $m_b$ , кг .....	9,9
Масса стержня $m_s$ , кг .....	1,1
Радиус шара $r$ , м .....	0,1
Длина стержня $l$ , м (математический маятник) .....	1
Длина стержня $l$ , м (физический маятник) .....	0,9
Управляющее воздействие по $x$ , Н .....	0
Управляющее воздействие по $y$ , Н .....	0
Управляющее воздействие по $z$ , Н .....	0
Коэффициент демпфирования $\mu$ , Дж · с <sup>2</sup> /м <sup>2</sup> .....	0,5

При моделировании системы без диссипации коэффициент демпфирования  $\mu$  задается равным нулю, а при наличии диссипации — приведенному выше значению. Ускорение свободного падения определяется в зависимости от географических широты и высоты над уровнем моря по следующему соотношению (для Москвы широта составляет 55,7522°, а высота — 144 м) [14]:

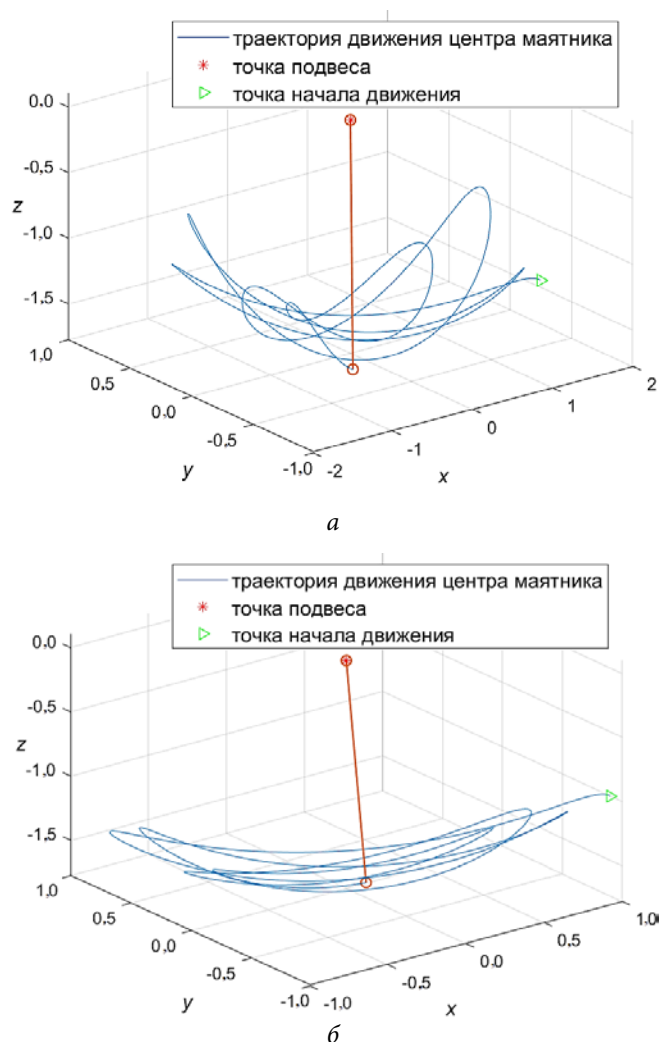
$$g = 9,780327 \cdot (1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,000006 \sin^2 2\varphi - 0,000003086 h).$$

Для того чтобы движение сферического маятника было пространственным и более явно иллюстрировалось влияние наличия диссипации в системе, начальные условия приняты следующими (с ненулевыми начальными значениями по всем декартовым осям):



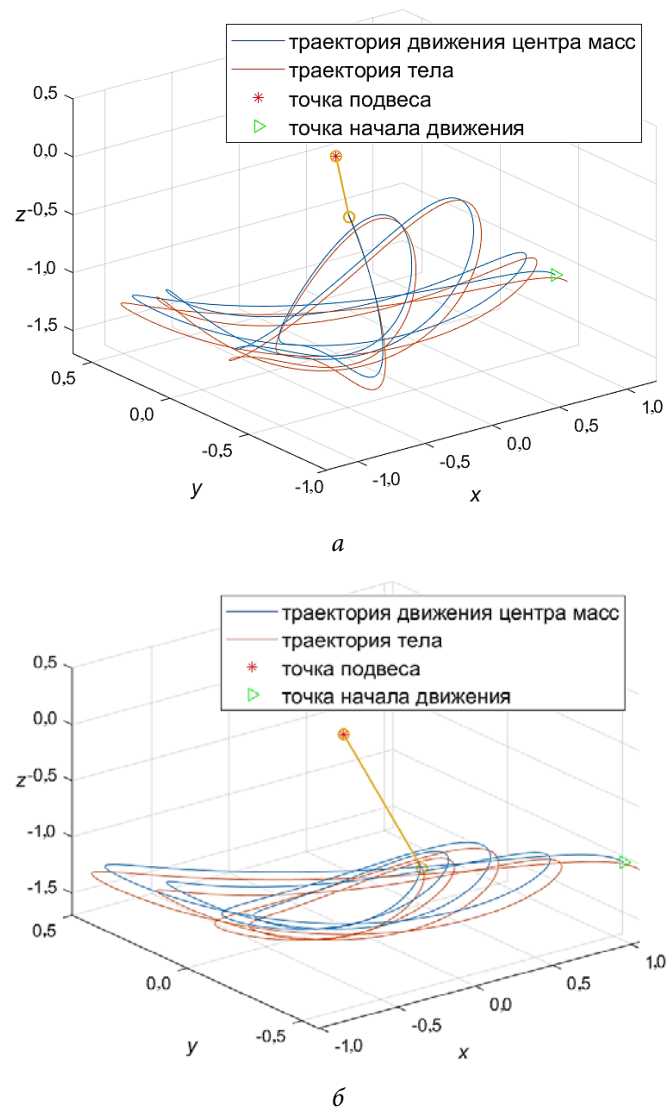
$$\begin{bmatrix} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0,1 \\ y(0) = -0,5433 \\ \dot{y}(0) = 0,7 \\ z(0) = -1 \\ \dot{z}(0) = 0.1 \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования математического сферического маятника без диссипации и с диссипацией представлены на рис. 2, а и б. На рис. 2, а показан процесс пространственных гармонических колебаний, на рис. 2, б явно заметно уменьшение амплитуды колебаний, совершаемых сферическим маятником, и его затухающий характер.



**Рис. 2.** Результаты моделирования математического сферического маятника  
а — без диссипации; б — с диссипацией

Результаты моделирования для математической модели физического сферического маятника без диссипации и с диссипацией представлены на рис. 3, *а* и *б*. Отметим, что на рис. 3, *б* для модели с учетом диссипативного движения отчетливо заметен процесс затухания колебаний, а на рис. 3, *а* — без диссипации, затухания колебаний не происходит.



**Рис. 3.** Результаты моделирования физического сферического маятника  
*а* — без диссипации; *б* — с диссипацией

**Выводы.** В работе рассмотрен процесс получения математических моделей, описывающих динамику математического и физического сферических маятников в декартовой системе координат с учетом диссипативных сил и без него. Проведено моделирование указанных нелинейных моделей, которое подтвердило их высокую степень адекватности.

## Литература

- [1] Рябина К.Е., Исаев А.П. Биомеханика поддержания вертикального позы (обзор моделей поддержания равновесия). *Вестник ЮУрГУ. Серия Образование, здравоохранение, физическая культура*, 2015, т. 15, № 4, с. 93–98. DOI: <https://doi.org/10.14529/ozfk150417>
- [2] Дубровский В.И., Федорова В.Н. Биомеханика. М., Владос-пресс, 2003.
- [3] Olsson M.G. Spherical pendulum revisited. *Am. J. Phys.*, 1981, vol. 49, no. 6, pp. 531–534. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.12666>
- [4] Miles J.W. Resonant motion of a spherical pendulum. *Physica D*, 1984, vol. 11, no. 3, pp. 309–323. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(84\)90013-7](https://doi.org/10.1016/0167-2789(84)90013-7)
- [5] Awrejcewicz J. Classical mechanics. Dynamics. New York, Springer, 2012.
- [6] Зоммерфельд А. Механика. М., НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
- [7] Заика В.В., Масленников А.Л. Математическое моделирование сферического маятника в сферической системе координат. *Политехнический молодежный журнал*, 2019, № 9. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2019-9-522>
- [8] Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б. О проблематике синтеза координирующих систем автоматического управления. *Известия ЮФУ. Технические науки*, 2012, № 3, с. 172–180.
- [9] Фархатдинов И.Г., Подураев Ю.В., Дж.-Х. Ю. Экспериментальное исследование позиционного, скоростного и комбинированного позиционно-скоростного режимов управления в системах дистанционного управления мобильными роботами. *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2010, № 1, с. 70–78.
- [10] Амосов А.А., Дубинский Ю.А. Копченова Н.В. Вычислительные методы. М., Лань, 2014.
- [11] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., Бином. Лаборатория знаний, 2017.
- [12] Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т. 1. М., Наука, 1977.
- [13] Прохоров А.М., ред. Физическая энциклопедия. Т. 4. М., Большая российская энциклопедия, 1994.

**Заика Валерия Владимировна** — студентка кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Масленников Андрей Леонидович** — ассистент кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

### Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Заика В.В., Масленников А.Л. Математическое моделирование однозвенного сферического маятника в декартовой системе координат. *Политехнический молодежный журнал*, 2020, № 01(42). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2020-01-566>

---

## SINGLE-JOINT SPHERICAL PENDULUM MATHEMATICAL MODELING IN CARTESIAN COORDINATE SYSTEM

V.V. Zaika

zaikavv@student.bmstu.ru

SPIN-code: 1733-0115

A.L. Maslennikov

amas@bmstu.ru

SPIN-code: 7087-6303

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

**Abstract**

*Mathematical model of the  $n$ -link spherical pendulum could be used as a mathematical model of different technical systems, including biotechnical systems. Mathematical or physical spherical pendulum model could be used in different problems. In this paper the derivation of mathematical models of the mathematical and the physical single-joint spherical pendulum in spherical coordinate system is shown. Two cases are considered for both systems: without and with dissipation. Numerical simulation is realized utilizing explicit Runge-Kutta 4-th order method.*

**Keywords**

*Spherical pendulum, mathematical spherical pendulum, physical spherical pendulum, dissipation, modeling, mathematical model, numerical ODE integration, Runge-Kutta method*

Received 18.10.2019

© Bauman Moscow State Technical University, 2019

**References**

- [1] Ryabina K.E., Isaev A.P. Biomechanics of erect posture maintaining (review of equilibrium control models). *Vestnik YuUrGU. Seriya Obrazovanie, zdavookhranenie, fizicheskaya kul'tura* [Bulletin of the South Ural State University. Ser. Education, health, physical culture], 2015, vol. 15, no. 4, pp. 93–98. DOI: <https://doi.org/10.14529/ozfk150417> (in Russ.).
- [2] Dubrovskiy V.I., Fedorova V.N. *Biomekhanika* [Biomechanics]. Moscow, Vlados-press Publ., 2003 (in Russ.).
- [3] Olsson M.G. Spherical pendulum revisited. *Am. J. Phys.*, 1981, vol. 49, no. 6, pp. 531–534. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.12666>
- [4] Miles J.W. Resonant motion of a spherical pendulum. *Physica D*, 1984, vol. 11, no. 3, pp. 309–323. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(84\)90013-7](https://doi.org/10.1016/0167-2789(84)90013-7)
- [5] Awrejcewicz J. *Classical mechanics. Dynamics*. New York, Springer, 2012.
- [6] Zommerfel'd A. *Mekhanika* [Mechanics]. Moscow, NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika" Publ., 2001 (in Russ.).
- [7] Zaika V.V., Maslennikov A.L. Single-joint spherical pendulum mathematical modeling in spherical coordinate system. *Politekhnichestkiy molodezhnyy zhurnal* [Politechnical student journal], 2019, no. 9. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2019-9-522> (in Russ.).
- [8] Filimonov A.B., Filimonov N.B. Concerning the problems of synthesis of coordinated systems of automatic control. *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2012, no. 3, pp. 172–180 (in Russ.).
- [9] Farkhatdinov I.G., Poduraev Yu.V., Dzh.-Kh. Yu. Experimental study of position, speed and combined position-speed control in the teleoperation of mobile robot. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2010, no. 1, pp. 70–78 (in Russ.).

- [10] Amosov A.A., Dubinskiy Yu.A. Kopchenova N.V. Vychislitel'nye metody [Computational methods]. Moscow, Lan' Publ., 2014 (in Russ.).
- [11] Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow, Binom. Laboratoriya znaniy Publ., 2017 (in Russ.).
- [12] Kil'chevskiy N.A. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. T. 1 [Theoretical mechanics course. Vol. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1977 (in Russ.).
- [13] Prokhorov A.M., ed. Fizicheskaya entsiklopediya. T. 4 [Physical encyclopedia. Vol. 4]. Moscow, Bol'shaya rossiyskaya entsiklopediya Publ., 1994 (in Russ.).

**Zaika V.V.** — Student, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Maslennikov A.L.** — Teaching Assistant, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Please cite this article in English as:**

Zaika V.V., Maslennikov A.L. Single-joint spherical pendulum mathematical modeling in cartesian coordinate system. *Politekhnicheskyy molodezhnyy zhurnal* [Politechnical student journal], 2020, no. 01(42). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2020-01-566.html> (in Russ.).