

## ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫВЕДЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ОРБИТУ

И.Е. Горохов

gorokhovie@mail.ru

SPIN-код: 2569-1731

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Рассмотрен метод оптимального выведения космического аппарата на геостационарную орбиту, который позволяет минимизировать расходы ресурсов. Приведена математическая модель движения центра масс ракеты-носителя. Для поиска оптимального управления были рассмотрены принцип максимума Л.С. Понтрягина, метод динамического программирования и метод, основанный на малой вариации параметров. Выбран метод поиска оптимального управления путем вариации параметра. Изучены следующие численные методы решения краевой задачи: метод Ньютона и его модификации; метод стрельбы; метод конечных разностей. С помощью встроенных функций MATLAB получен закон управления по углу тангажа и траектории движения ракеты-носителя в экваториальной плоскости. Проведено моделирование движения космического аппарата классическим методом Рунге — Кутты четвертого порядка с постоянным шагом интегрирования.

### Ключевые слова

Оптимальное управление, космический аппарат, выведение на орбиту, угол тангажа, краевая задача, геостационарная орбита, принцип максимума Понтрягина, система дифференциальных уравнений, критерий оптимальности, ракета-носитель

Поступила в редакцию 25.05.2020

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020

---

**Введение.** В современном мире огромное внимание уделяется освоению космоса. Любой космический полет сопровождается выведением космического аппарата на орбиту, поэтому очень важным вопросом, связанным с траекторией полета, является вопрос ее оптимизации, т. е. определения такой траектории, при движении по которой критерий оптимальности (высота орбиты, масса полезного груза и т. д.) достигает своего максимального (минимального) значения.

Цель исследования — изучение методов оптимального выведения космического аппарата на геостационарную орбиту, которые позволяют минимизировать расходы ресурсов.

Для достижения сформулированной в работе цели необходимо решить следующие задачи:

- разработать математическую модель движения центра масс ракеты-носителя;
- получить закон изменения угла тангажа.

В данной работе использованы следующие подходы и методы решения задачи: принцип максимума Л.С. Понтрягина, численные методы решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, методы решения краевых задач.

Различают три основных типа выведения космического аппарата на орбиту: полностью активный вывод (прямое выведение), баллистический вывод, эллиптический вывод.

При прямом выведении имеется лишь один активный участок, параметры движения в конце которого должны совпадать с требуемыми орбитальными параметрами движения космического аппарата. Этот тип вывода по сравнению с двумя последующими типами является менее экономичным, поскольку с увеличением продолжительности активного участка возрастает расход энергии на преодоление гравитационных сил. По этому методу целесообразно выводить космический аппарат только на низкие (до 400 км) орбиты. При этом важное значение приобретают вопросы выбора оптимальной программы движения ракеты-носителя, обеспечивающей минимум расхода энергии [1–13].

В качестве объекта управления выберем ракету-носитель Falcon 9. Это двухступенчатая ракета, спроектированная и изготовленная компанией SpaceX для надежной и безопасной транспортировки спутников и космического корабля Dragon на орбиту. Falcon 9 — первая ракета орбитального класса, способная к полету.

Характеристики ракеты-носителя: высота 70 м; диаметр 3,7 м; масса 549 054 кг; масса топлива 8 300 кг [14].

Модель движения центра масс ракеты-носителя в векторной форме можно представить как

$$a_0 = \frac{A^{-1}P_c + G_0}{m},$$

где  $A$  — матрица направляющих косинусов;  $P_c$  — тяга маршевого двигателя в связанной с ракетой системе координат;  $G_0$  — вектор гравитационных сил;  $m$  — масса [11].

Этой модели соответствует система однородных дифференциальных уравнений шестого порядка. Введем переменные состояния

$$\begin{cases} x_1 = x; \\ x_2 = y; \\ x_3 = z; \\ x_4 = V_x; \\ x_5 = V_y; \\ x_6 = V_z. \end{cases}$$

Тогда система дифференциальных уравнений в скалярной форме может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4; \\ \dot{x}_2 = x_5; \\ \dot{x}_3 = x_6; \\ \dot{x}_4 = P_x + G_x; \\ \dot{x}_5 = P_y + G_y; \\ \dot{x}_6 = P_z + G_z. \end{cases}$$

Также следует учесть, что масса ракеты-носителя изменяется, поскольку расходуется топливо. Скорость расхода топлива можно описать уравнением

$$\frac{dm}{dt} = -\mu,$$

где  $\mu$  — расход топлива.

Для выведения космического аппарата на орбиту необходим закон управления. Поскольку угол рыскания и угол крена принимают малые значения, управление может осуществляться по углу тангажа [8].

Зададим значение угла тангажа как управляющее воздействие

$$\varphi = U_\varphi(t).$$

Итоговая система дифференциальных уравнений в скалярной форме состоит из семи уравнений и может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4; \\ \dot{x}_2 = x_5; \\ \dot{x}_3 = x_6; \\ \dot{x}_4 = \frac{P \cos(U_\varphi(t))}{x_5} - \frac{Mfx_1}{r^3}; \\ \dot{x}_5 = \frac{P \sin(U_\varphi(t))}{x_5} - \frac{Mfx_2}{r^3}; \\ \dot{x}_6 = \frac{-P\psi}{x_5} - \frac{Mfx_3}{r^3}; \\ \frac{dm}{dt} = -\mu, \end{cases}$$

где  $m$  — масса земли;  $f$  — гравитационная постоянная;  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  — расстояние до центра земли;  $\mu$  — расход топлива.

Для поиска оптимального управления рассмотрим принцип максимума Л.С. Понтрягина и основные сложности решения краевых задач.

Рассмотрим задачу определения оптимального управления по расходу топлива для объекта, описываемого системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3; \\ \dot{x}_2 = x_4; \\ \dot{x}_3 = \frac{P \cos(U_\varphi(t))}{x_5} - \frac{Mf x_1}{r^3}; \\ \dot{x}_4 = \frac{P \sin(U_\varphi(t))}{x_5} - \frac{Mf x_2}{r^3}; \\ \dot{x}_5 = -\mu, \end{cases} \quad (1)$$

где — масса земли;  $f$  — гравитационная постоянная;  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  — расстояние до центра земли;  $\mu$  — расход топлива.

Управление  $U_\varphi(t)$  полагают ограниченным, поскольку оно напрямую определяет угол тангажа,  $|U_\varphi(t)| \leq \frac{\pi}{2}$ . Тогда минимизируемый функционал имеет вид

$$J(U_\varphi(t)) = \int_{t_0}^{t_k} |U_\varphi(t)| dt.$$

Начальные условия выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} x_1(0) = x(0) = 0; \\ x_2(0) = y(0) = 6\,371\,000; \\ x_3(0) = V_x(0) = 0; \\ x_4(0) = V_y(0) = 0; \\ x_5(0) = m(0) = 549\,054. \end{cases} \quad (2)$$

Конечное состояние описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1(T) = x(T) = -6\,371\,000; \\ x_2(T) = y(T) = 0; \\ x_3(T) = V_x(T) = 0; \\ x_4(T) = V_y(T) = -3\,073. \end{cases} \quad (3)$$

Запишем функцию Гамильтона  $H$  для рассматриваемой задачи, полагая  $p_0 = -1$ :

$$H = -|U_\varphi(t)| + P_1 x_3 + P_2 x_4 + P_3 \left( \frac{P \cos(U_\varphi(t))}{x_5} - \frac{Mfx_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}^3} \right) + P_4 \left( \frac{P \sin(U_\varphi(t))}{x_5} - \frac{Mfx_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}^3} \right) - P_5 \mu$$

или

$$H = -|U_\varphi(t)| + P_3 \frac{P \cos(U_\varphi(t))}{x_5} + P_4 \frac{P \sin(U_\varphi(t))}{x_5} + \Phi,$$

где  $\Phi$  — функция, не зависящая от управления.

Рассмотрим производную Гамильтониана по управлению

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{u}{|u|} - P_3 \frac{P \sin u}{x_5} + P_4 \frac{P \cos u}{x_5}.$$

Управление  $u^*$ , доставляющее максимум функции Гамильтона, определяется следующим образом:

$$u^* = \begin{cases} u = \frac{\pi}{2} & \text{при } P_3 < 0 P_4 \geq 0; \\ u = -\frac{\pi}{2} & \text{при } P_3 \geq 0 P_4 \geq 0; \\ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} & \text{при } P_3 < 0 P_4 < 0; \\ -\frac{\pi}{2} \leq u \leq 0 & \text{при } P_3 \geq 0 P_4 < 0. \end{cases}$$

Запишем уравнения для вспомогательных переменных:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = Mf \left( \frac{P_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{p_4 x_1 x_2 + p_3 x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right); \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = Mf \left( \frac{P_4}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{p_3 x_1 x_2 + p_3 x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right); \\ \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -p_1; \\ \dot{p}_4 = -\frac{\partial H}{\partial x_4} = -p_2; \\ \dot{p}_5 = -\frac{\partial H}{\partial x_5} = \frac{P}{x_5^2} (p_3 \cos u + p_4 \sin u). \end{cases} \quad (4)$$

Поскольку нам известны условия в конечный момент времени, можно записать

$$\begin{cases} p_1(T) = 1; \\ p_2(T) = 1; \\ p_3(T) = 1; \\ p_4(T) = 1; \\ p_5(T) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Необходимые условия оптимальности при использовании принципа максимума позволяют сформулировать краевую задачу, состоящую из систем дифференциальных уравнений (1) и (4) и граничных условий (2), (3) и (5). Искомая экстремаль должна содержаться среди решений краевой задачи.

Из условия максимума гамильтониана не может быть получен закон оптимального управления углом в аналитическом виде, поэтому его определение сопряжено с необходимостью решения трансцендентных уравнений на каждом шаге интегрирования системы дифференциальных уравнений. Метод Ньютона и его модификации — одни из самых старых и наиболее распространенных методов отыскания нулей трансцендентных функций [3].

В силу ряда причин метод Ньютона не является универсальным методом расчета оптимальных программ на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [1]. В качестве альтернативы к методу Ньютона построим семейство кривых, удовлетворяющих решению краевой задачи, управление в которых не является оптимальным. Затем, оценив минимизируемый функционал для каждой кривой, выберем кривую, наиболее близкую к искомой (однако отметим, что управление при этом не будет являться оптимальным) [9].

Для построения семейства кривых будем применять встроенные методы решения краевых задач в математическом пакете MATLAB. Для решения краевых задач используется функция `bvp4c`, она решает краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений  $\dot{y} = f(y, x)$ .

Решение  $\dot{y} = f(y, x)$ , удовлетворяющее на заданном отрезке этому уравнению и граничным условиям, наложенным на значение функции и ее производной на концах отрезка, ищется в форме сеточной функции. Отрезок делится точками  $t_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < t_k$  и каждой точке  $x_i$  ставится в соответствие точка  $y_i$ . С учетом начальных значений  $x_1$  и  $y_1$  путем аппроксимации производной  $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x}$  в каждой точке сетки разностным отношением  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  строится система уравнений, из которой находятся значения  $x_i$ . В процессе ее решения сетка  $x_i$  может перестраиваться (в частности, сгущаться), при решении используется матрица-якобиан  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .

Для обращения к функции необходимо задать: функцию, вычисляющую вектор правых частей; функцию, вычисляющую вектор граничных условий,

компоненты которого представляют собой выражения, обращающиеся в нуль в начальной или конечной точке.

Сложность получения решения с помощью встроенной функции заключается в том, что необходимо задать гипотетическое решение в виде вектора, для всех точек сетки или в виде функции в форме  $y = \text{quess}(x)$ . Заметим, что выбор начального вектора или вида вспомогательной функции полностью зависит от интуиции пользователя и оказывает существенное влияние на решение задачи [3].

Преобразуем уравнения и краевые условия, сформулированные для принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Поскольку встроенные методы не позволяют пересчитывать управление на каждом шаге, необходимо задать функцию  $U_\varphi(t) = \varphi$  как дополнительную переменную состояния, тогда получим следующий вектор состояния:

$$\begin{cases} x_1 = x; \\ x_2 = y; \\ x_3 = V_x; \\ x_4 = V_y; \\ x_5 = m; \\ x_6 = U_\varphi(t) = \varphi. \end{cases}$$

Запишем также гипотетический закон изменения управления

$$\text{tg } \varphi = \text{tg } \varphi_0 - Ct.$$

Отсюда можно получить следующую зависимость:

$$\varphi = \text{arctg}[\text{tg } \varphi_0 - Ct].$$

Условие  $|\varphi| \leq \pi/2$  при таком выборе закона изменения выполняется в силу свойств функции  $\text{arctg}$ .

Запишем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3; \\ \dot{x}_2 = x_4; \\ \dot{x}_3 = \frac{P \cos x_6}{x_5} - \frac{Mfx_1}{r^3}; \\ \dot{x}_4 = \frac{P \sin x_6}{x_5} - \frac{Mfx_2}{r^3}; \\ \dot{x}_5 = -\mu; \\ \dot{x}_6 = \frac{-C}{(-Ct + \text{tg } \varphi_0)^2 + 1}, \end{cases}$$

где  $M$  — масса земли;  $f$  — гравитационная постоянная;  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  — расстояние до центра земли;  $\mu$  — расход топлива.

Начальные условия:

$$\begin{cases} x_1(0) = x(0) = -6\,371\,000; \\ x_2(0) = y(0) = 0; \\ x_3(0) = V_x(0) = 0; \\ x_4(0) = V_y(0) = 0; \\ x_5(0) = m(0) = 549\,054. \end{cases}$$

Конечное состояние описывается системой

$$\begin{cases} x_1(T) = x(T) = 0; \\ x_2(T) = y(T) = -35\,786\,000; \\ x_3(T) = V_x(T) = 0; \\ x_4(T) = V_y(T) = -3\,073. \end{cases}$$

Для получения более точного решения необходимо задать Якобиан в аналитическом виде:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3GMx_1^2}{r^5} - \frac{GM}{r^3} & \frac{3GMx_1x_2}{r^5} & 0 & 0 & \frac{P \cos x_6}{x_5^2} & -\frac{P \sin x_6}{x_5^2} \\ \frac{3GMx_2^2}{r^5} - \frac{GM}{r^3} & \frac{3GMx_1x_2}{r^5} & 0 & 0 & \frac{P \sin x_6}{x_5^2} & -\frac{P \cos x_6}{x_5^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

С помощью функции `bvp4c` получим решение краевой задачи в зависимости от коэффициента  $C$ .

Семейство кривых для различных значений  $C$  представлено на рис. 1.

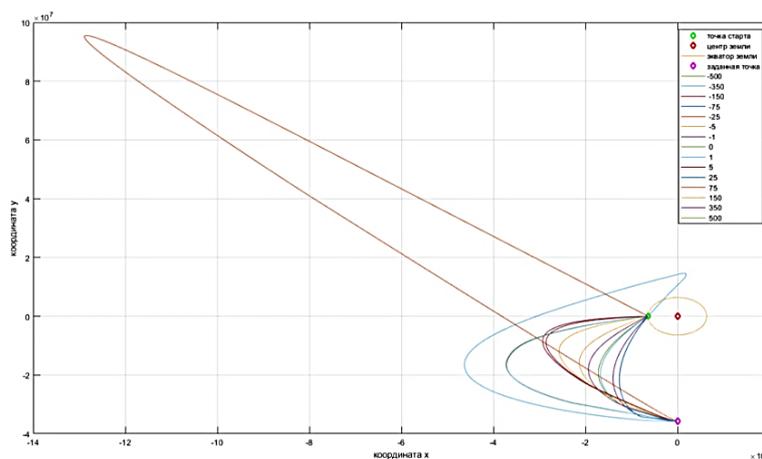


Рис. 1. Решения, полученные с помощью функции `bvp4c`

Сравним эти решения с решениями, полученными с помощью функции `bvr5c`, которые представлены на рис. 2.

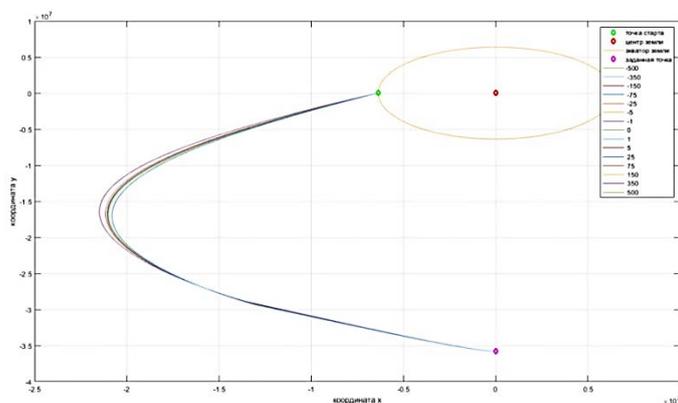


Рис. 2. Решения, полученные с помощью функции `bvr5c`

Видно, что решения, полученные с помощью функции `bvr5`, являются более устойчивыми, поэтому будем проводить поиск наилучшего решения среди кривых на рис. 2.

Необходимо выбрать решение, при котором функционал

$$J(U_\varphi(t)) = \int_{t_0}^{t_k} |U_\varphi(t)| dt$$

принимает минимальное значение.

Данные о значениях минимизируемого функционала в зависимости от константы  $C$  приведены ниже:

$C$	-500	-350	-150	-75	-25	-5	-1	0
$J(U_\varphi(t))$	4 555,28	4 555,27	4 555,22	4 555,14	4 554,84	4 553,27	4 546,72	759,21
$C$	1	5	25	75	150	350	500	
$J(U_\varphi(t))$	4545,95	4 553,16	4 554,80	4 555,13	4 555,21	4 555,26	4 555,27	

Видно, что наименьшее значение функционал принимает при  $C = 0$ , но этот вариант означает, что значение угла тангажа является константой, а значит, управление отсутствует. Поэтому рассмотрим более подробно влияние коэффициента  $C$  на минимизируемый функционал при условии, что  $-1 \leq C \leq 1$ :

$C$	-1	-0,8	-0,6	-0,5	-0,4	-0,25	-0,1
$J(U_\varphi(t))$	4 546,72	4 544,85	4 541,85	4 539,52	4 536,13	4 526,50	4 492,46
$C$	0,1	0,25	0,4	0,5	0,6	0,8	1
$J(U_\varphi(t))$	4 484,77	4 523,42	4 534,20	4 537,98	4 540,56	4 555,26	4 543,89

Видно, что наиболее близким к оптимальному будет решение, полученное при  $C = 0,1$ . Траектория активного участка выведения представлена на рис. 3.

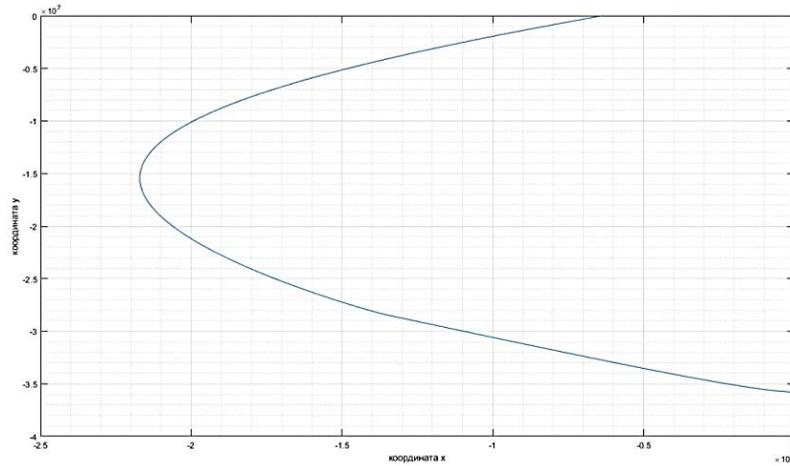


Рис. 3. Траектория активного участка выведения

Для определения дальнейшей траектории необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (1) при нулевой тяге. Моделирование этой системы реализуем *классическим методом Рунге — Кутты четвёртого порядка* с постоянным шагом интегрирования. Полученный результат представлен на рис. 4.

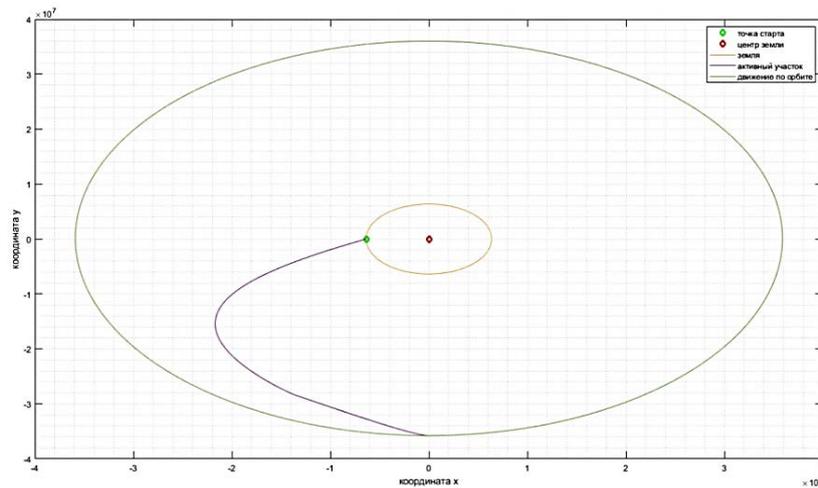


Рис. 4. Траектория движения космического аппарата

Орбита космического аппарата совпадает с геостационарной орбитой, следовательно, краевая задача решена верно. Построим график изменения угла тангажа с течением времени. Данная зависимость представлена на рис. 5.

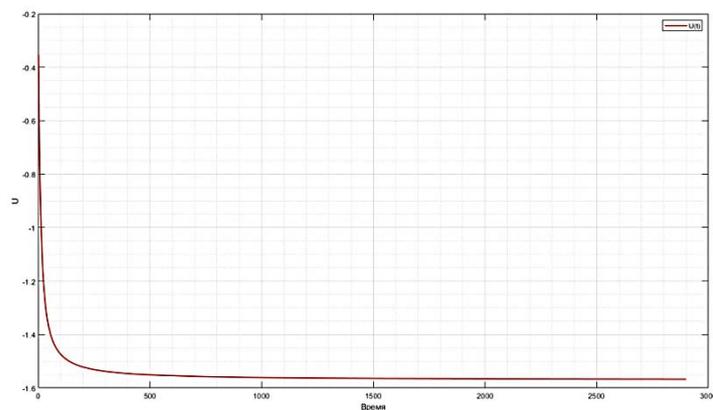


Рис. 5. График изменения угла тангажа

Сравним управление, полученное с помощью функции `bvr5c`, с оптимальным управлением для принципа максимума:

$$u^* = \begin{cases} u = \frac{\pi}{2} & \text{при } P_3 < 0, P_4 \geq 0; \\ u = -\frac{\pi}{2} & \text{при } P_3 \geq 0, P_4 \geq 0; \\ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} & \text{при } P_3 < 0, P_4 < 0; \\ -\frac{\pi}{2} \leq u \leq 0 & \text{при } P_3 \geq 0, P_4 < 0. \end{cases}$$

Видно, что полученное управление может являться оптимальным для случаев, когда

$$\begin{cases} P_3 \geq 0, P_4 < 0; \\ P_3 \geq 0, P_4 \geq 0. \end{cases}$$

Во втором случае отклонение от угла  $-\pi/2$  в начале выведения может быть связано с достаточно большим временем переходного процесса системы управления по каналу угла тангажа.

**Заключение.** В рамках данной работы были исследованы методы оптимального выведения космического аппарата на геостационарную орбиту, которые позволяют минимизировать расходы ресурсов. Для этого рассмотрены способы выведения космического аппарата на орбиту, построена математическая модель движения центра масс ракеты-носителя. Для поиска оптимального управления изучен принцип максимума Л.С. Понтрягина и основные сложности решения краевых задач. С помощью встроенных функций MATLAB получен закон управления по углу тангажа и траектории движения ракеты-носителя в экваториальной плоскости.

---

**Литература**

- [1] Деменков Н.П. Вычислительные аспекты решения задач оптимального управления. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007.
- [2] Деменков Н.П., Васильев Г.Н. Управление техническими системами. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013.
- [3] Деменков Н.П. Вычислительные методы решения задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015.
- [4] Иванов Н.М., Мартынов А.И. Движение космических летательных аппаратов в атмосферах планет. М., Наука, 1985.
- [5] Константинов М.С., Мин Тейн. Метод оптимизации траектории выведения КА с электроракетной двигательной установкой на ГСО. *Вестник МАИ*, 2009, т. 16, № 5, с. 282–290.
- [6] Константинов М.С., Мин Тейн. Проектирование схем выведения космического аппарата на геостационарную орбиту при использовании химического разгонного блока и двигателей малой тяги. *Мат. XLIV науч. чтен. памяти К.Э. Циолковского*. Калуга, 2009, с. 119–120.
- [7] Константинов М.С., Мин Тейн. Метод оптимизации траектории выведения КА на ГСО при использовании электроракетной двигательной установки. *Мат. XXXIV академ. чтен. по космонавтике*. М., 2010, с. 119–120.
- [8] Летов А.М. Динамика полета и управление. М., Наука, 1969.
- [9] Мин Тейн. Оптимизация схем выведения космического аппарата на высокие рабочие орбиты. Дисс. ... канд. тех. наук. М., Моск. авиац.-технол. ин-т, 2010.
- [10] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1983.
- [11] Пупков К.А., Шахназаров Г.А. Элементы теории систем управления летательными аппаратами. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015.
- [12] Лысенко Л.Н., ред. Управление космическими полетами. М., Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009.
- [13] Выведение космического аппарата на орбиту. *helpiks.org: веб-сайт*. URL: <https://helpiks.org/1-122920.html> (дата обращения: 25.05.2019).
- [14] SpaceX: веб-сайт. URL: [www.spacex.com](http://www.spacex.com) (дата обращения: 25.05.2019).

**Горохов Илья Евгеньевич** — студент кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Научный руководитель** — Деменков Николай Петрович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:**

Горохов И.Е. Оптимизация выведения космического аппарата на орбиту. *Политехнический молодежный журнал*, 2020, № 07(48). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2020-07-628>

## OPTIMIZATION OF THE SPACECRAFT LAUNCH INTO ORBIT

I.E. Gorokhov

gorokhovie@mail.ru

SPIN-code: 2569-1731

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

---

### Abstract

*A method of optimal launching of a spacecraft into a geostationary orbit is considered, which allows minimizing resource consumption. A mathematical model of the movement of the launch vehicle center of mass is presented. To search for the optimal control, the Pontryagin's maximum method, dynamic programming method and method based on small variation of parameters. A method of searching for optimal control by varying a parameter is chosen. The following numerical methods for solving the boundary value problem have been studied: Newton's method and its modifications; shooting method; finite difference method. Using the built-in MATLAB functions, the control law for the pitch angle and the trajectory of the launch vehicle in the equatorial plane is obtained. The simulation of the spacecraft motion using the classical fourth-order Runge-Kutta method with a constant integration step is carried out.*

### Keywords

*Optimal control, spacecraft, launch into orbit, pitch angle, boundary value problem, geostationary orbit, Pontryagin's maximum method, system of differential equations, optimality criterion, launch vehicle*

Received 25.05.2020

© Bauman Moscow State Technical University, 2020

---

### References

- [1] Demenkov N.P. Vychislitel'nye aspekty resheniya zadach optimal'nogo upravleniya [Computation aspects of solving optimum control problems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2007 (in Russ.).
- [2] Demenkov N.P., Vasil'yev G.N. Upravlenie tekhnicheskimi sistemami [Control on technical systems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2013 (in Russ.).
- [3] Demenkov N.P. Vychislitel'nye metody resheniya zadach optimal'nogo upravleniya na osnove printsipa maksimuma Pontryagina [Computational methods for solving optimum control problems based on Pontryagin's maximum principle]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2015 (in Russ.).
- [4] Ivanov N.M., Martynov A.I. Dvizhenie kosmicheskikh letatel'nykh apparatov v atmosfere planet [Motion of spacecraft in atmosphere of planets]. Moscow, Nauka Publ., 1985 (in Russ.).
- [5] Konstantinov M.S., Min Teyn. A trajectory optimization method to solve a problem of spacecraft insertion into geostationary orbit using electric thrusters. *Vestnik MAI [Aerospace MAI Journal]*, 2009, vol. 16, no. 5, pp. 282–290 (in Russ.).
- [6] Konstantinov M.S., Min Teyn. [Developing scheme for geostationary orbit insertion of spacecraft using chemical transfer orbit stage and low thrust]. *Mat. XLIV nauch. chten. pamyati K.E. Tsiolkovskogo [Proc. XLIV Sci. readings in memory of K.E. Tsiolkovsky]*. Kaluga, 2009, pp. 119–120 (in Russ.).
- [7] Konstantinov M.S., Min Teyn. [Optimization method for spacecraft injection trajectory to geostationary orbit using electric propulsion system]. *Mat. XXXIV akadem. chten. po kos-*

- 
- monavtike* [Proc. XXXIV Academ. readings on Aeronautics]. Moscow, 2010, pp. 119–120 (in Russ.).
- [8] Letov A.M. *Dinamika poleta i upravlenie* [Flight dynamics and control]. Moscow, Nauka Publ., 1969 (in Russ.).
- [9] Min Teyn. *Optimizatsiya skhem vyvedeniya kosmicheskogo apparata na vysokie rabochie orbity*. Diss. kand. tekhn. nauk [Optimization of spacecraft insertion scheme to high working orbits. Kand. tech. sci. diss.]. Moscow, Mosk. aviats.-tekhnol. in-t Publ., 2010 (in Russ.).
- [10] Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., et al. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical theory of optimum processes]. Moscow, Nauka Publ., 1983 (in Russ.).
- [11] Pupkov K.A., Shakhnazarov G.A. *Elementy teorii sistem upravleniya letatel'nymi apparatami* [Theory elements of aircraft control systems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2015 (in Russ.).
- [12] Lysenko L.N., ed. *Upravlenie kosmicheskimi poletami* [Management of space flights]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2009 (in Russ.).
- [13] *Vyvedenie kosmicheskogo apparata na orbitu* [Insertion of spacecraft to the orbit]. *helpiks.org: website* (in Russ.). URL: <https://helpiks.org/1-122920.html> (accessed: 25.05.2019).
- [14] SpaceX: website. URL: [www.spacex.com](http://www.spacex.com) (accessed: 25.05.2019).

**Gorokhov I.E.** — Student, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Scientific advisor** — Demenkov N.P., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Please cite this article in English as:**

Gorokhov I.E. Optimization of the spacecraft launch into orbit. *Politekhnichestkiy molodezhnyy zhurnal* [Politechnical student journal], 2020, no. 07(48). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2020-07-628.html> (in Russ.).