УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ НЕПРЕРЫВНОЙ ПОИСКОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ РОЯ ЧАСТИЦ

Ю.В. Ямченко yamchenko.y.v@yandex.ru
А.С. Андрусенко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Представлен стохастический метод прямого поиска — метод роя частиц. Рассмотрены модификации данного метода: ранжированный алгоритм FIPS и алгоритм с дополнением графа соседства частиц. Исследована эффективность разработанного алгоритмического и программного обеспечения. Результаты исследования могут быть использованы при выборе наиболее эффективного алгоритма оптимизации, основанного на методе роя частиц

Ключевые слова

Глобальная оптимизация, метод роя частиц, ранжированный алгоритм FIPS, безусловная оптимизация

Поступила в редакцию 20.06.2016

Введение. В физике, химии, молекулярной биологии и других прикладных науках процесс проектирования интеллектуальных систем управления сводится к решению ряда задач непрерывной глобальной оптимизации. Особенностями таких задач являются нелинейность, недифференцируемость, мультимодальность, овражность целевой функции, высокая размерность пространства поиска, сложная топология области допустимых значений и др. Поэтому разработать универсальный метод решения задач глобальной оптимизации на данном этапе развития науки не представляется возможным.

В настоящее время чаще всего встречаются такие сложные задачи, в которых точные математические методы слабо применимы или не применимы, например, задачи экономического прогнозирования, моделирования политической ситуации, размещения и рекламирования конкурирующих товаров и др. Это связано с такими особенностями, как проблемы высокой вычислительной сложности и априорной неопределенности (информация о проблеме может быть трудноформализуемой или неформализуемой). При решении подобных задач принято использовать эвристические методы, предполагающие намеренное введение элемента случайности в алгоритм поиска [1–6].

В 1980-е годы в целях эффективного решения задач глобальной оптимизации начали разрабатывать стохастические поисковые методы, получившие название популяционные (ПМ). Их относят к классу эвристических, т. е. таких, для которых сходимость к глобальному решению не доказана, однако экспериментально установлено, что в большинстве случаев у них существует решение. ПМ предполагают одновременную обработку нескольких вариантов решения задачи оптимизации, в отличие от классических «траекторных» поисковых методов, в которых в области поиска эволюционирует только один вариант. Основаны ПМ решения задачи глобальной оптимизации на моделировании коллективного поведения самоорганизующихся живых или неживых систем, взаимодействующие элементы которых в общем случае называют агентами.

Основными особенностями ПМ являются децентрализованность, взаимодействие и простота поведения агентов. Наиболее известные ПМ решения задачи глобальной оптимизации — метод пчелиного роя, метод колонии муравьев, метод роя частиц (Particle Swarm Optimization, PSO) [7].

Метод оптимизации с помощью роя частиц был предложен в 1995 г. Джеймсом Кеннеди и Расселом Эберхартом в работе [8] для графического моделирования хореографии стаи птиц и развит для решения прикладных задач. Он принадлежит к классу стохастических методов прямого поиска и не требует вычисления градиента целевой функции, что позволяет использовать его в тех случаях, когда вычисление невозможно или имеет высокую вычислительную сложность.

Известно большое число модификаций «канонического» метода роя частиц. В данной работе исследованы эффективность канонического алгоритма роя частиц и его модификации. Параллельные варианты метода роя частиц, основанные на островной модели параллелизма, например алгоритм Dynamic Sociometry Particle Swarm Optimization, DSPSO, не рассматривались [9].

В первой части настоящей работы представлена постановка задачи, во второй — схема канонического алгоритма PSO и его используемые модификации, в третьей проведено исследование эффективности рассматриваемых алгоритмов с помощью вычислительного эксперимента.

Постановка задачи. Рассмотрим детерминированную непрерывную задачу глобальной безусловной минимизации:

$$\min_{X\in R^{|X|}} f(X) = f(X^*) = f^*,$$

где $f(X)\in R^1$ — скалярная целевая функция (критерий оптимальности); $f(X^*) = f^*$ — искомое экстремальное значение целевой функции; $X = (x_1, x_2, ..., x_{|X|}) \in R^{|X|}$; $|X|$ — мерный вектор варьируемых параметров; $R^{|X|}$ — $|X|$ — мерное арифметическое пространство.

Канонический метод роя частиц и его модификации. Множество частиц в каноническом методе обозначим $S = [s_i, i \in [1:|S|]]$, где $|S|$ — число частиц в рое S. Координаты частицы s_i в момент времени t определяет вектор $X_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, ..., x_{i,|X|})$, а ее скорость — вектор $V_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, ..., v_{i,|X|})$. В момент времени $(t+1)$ координаты частицы s_i найдем по вектору $X'_i = (x'_{i,1}, x'_{i,2}, ..., x'_{i,|X|})$. Начальные координаты частицы s_i равны $X_i(0)$; $i \in [1:|S|]$ [10].

Для вычисления нового положения и скорости частицы на каждой итерации в алгоритме PSO используют формулы:

$$X'_i = X_i + V_i; \tag{1}$$

$$V_i = b_l V_i^- + U_{|X|}(0;b_C)\oplus(X_i^* - X_i) + U_{|X|}(0;b_S)\oplus(X_i^{**} - X_i), \qquad (2)$$

где $\oplus$ — символ прямого произведения векторов; b_l, b_C, b_S — свободные параметры алгоритма; $V_i^- = V_i(t-1)$ — вектор скорости частицы, полученный на предыдущей итерации; X_i^* — вектор координат частицы s_i, соответствующий ее наилучшему значению фитнес-функции за время поиска [0; $\hat{t}$]; X_i^{**} — вектор координат соседней с данной частицы с наилучшим значением приспособленности за время поиска [0; $\hat{t}$]; $\hat{t}$ — текущий момент времени; $U_{|X|}(a;b)$ — n-мерный вектор псевдослучайных чисел, равномерно распределенных в интервале $[a;b]$.

Рекомендуемые значения свободных параметров алгоритма: b_l = 0,7298; $b_C = b_S = 1{,}49618$.

В методе PSO важным является понятие соседства частиц, которое определяется соответствующей топологией соседства. В вычислениях используют следующие топологии соседства частиц: «клика», «кольцо», «двумерный тор», «кластерная топология». Выбор определенной топологии соседства частиц влияет на интенсивность и широту поиска на итерациях алгоритма [10].

Канонический метод роя частиц проводят по следующей схеме:

1) задают значения свободных параметров алгоритма и инициализируют популяцию; счетчик числа поколений t = 1;

2) находят наилучшую локальную позицию для каждой частицы популяции, наилучшую глобальную позицию для всех соседних частиц;

3) определяют новые позиции для всех частиц роя по формулам (1), (2);

4) проверяют условие окончания итераций. Если условие выполнено, то завершают работу алгоритма. Если условие не выполнено, то увеличивают счетчик итераций $t = t + 1$.

В основе *ранжированного алгоритма FIPS* (Fully Informed Particle Swarm) лежит наблюдение, поскольку поведение особи в стае определяют соседи. В каноническом алгоритме PSO на поведение особи влияет «лучший» среди соседей. Существуют несколько вариантов алгоритма FIPS. Особенность ранжированного алгоритма FIPS заключается в задании значений фитнесс-функции по схеме:

1) для всех частиц s_{i_j}, $j \in N_i$, где N_i — множество соседей частицы с номером i, вычисляют значение фитнесс-функции $\varphi(X_{i_j}) = \varphi_{i_j}$ и упорядочивают частицы по возрастанию величины φ_{i_j};

2) первой частице в списке присваивают ранг $r_{i,1} = 0{,}5$;

3) каждой из последующих частиц списка присваивают ранг в два раза меньший, так что $r_{i,j} = 0{,}5 r_{i,j-1}$, $j \in [2 : |N_i|]$.

Отметим, что по мере роста величины $|N_i|$ сумма всех определенных рангов стремится к единице (автоматически выполняется их нормировка).

Алгоритм *FIPS* отличается от канонического алгоритма PSO функцией вычисления скоростей частиц, определяемой по формуле (2). В FIPS эта формула принимает вид

$$V_i = b_l(V_i^- + U_{|X|}(0;b_*) \oplus (X_i^* - X_i) + \sum_{j \in N_i} r_{i,j} U_{|X|}(0;b_{**}) \oplus (X_j^{**} - X_i)),$$

где b_*, b_{**} — свободные параметры алгоритма, рекомендуемые значения которых $b_* = b_{**} = 2{,}05$.

Алгоритм с дополнением графа соседства частиц DSPSO (Dynamic Sociometry PSO). Кроме алгоритмов, использующих статические топологии соседства частиц («клика», «кольцо», «двумерный тор»), известны алгоритмы, использующие динамическую топологию соседства частиц, т. е. топологию, изменяющуюся во время решения задачи оптимизации. Одним из таких алгоритмов является DSPSO, реализующий технику так называемого перехода от обзора к поиску [10].

На начальных итерациях алгоритма используют топологию соседства частиц «кольцо»; через фиксированное число итераций k в этот граф добавляют новое ребро. Выполним это следующим образом:

1) с помощью генератора натуральных случайных чисел, выбирают два числа i_1, i_2 таких, что $i_1 \neq i_2$ и частицы s_{i_1}, s_{i_2} не являются соседями в текущей топологии соседства;

2) в текущий граф соседства частиц добавляют ребро (s_{i_1}, s_{i_2}).

Шаг k выбирают таким образом, чтобы получить из топологии соседства частиц «кольцо» топологию «клика» через $0{,}8\,t^{\max}$ итераций, где $t^{\max}$ — максимальное число итераций. Исходя из этого

$$k = \frac{1{,}6\,t^{\max}}{|X|(|X|-1)-2|X|}.$$

Затем рассмотрим другую модификацию представленных алгоритмов: установим исходное значение параметра $b_l = 0{,}9$ и уменьшим на 0,1 через каждые $k = ((0{,}8) * I^{\max} / 5)$ итераций. Таким образом, на начальных итерациях алгоритма обеспечивается широкий обзор пространства поиска, а более точная локализация минимума фитнесс-функции — ближе к завершению работы алгоритма.

Вычислительный эксперимент. Рассмотрим программную реализацию. Программа оптимизации написана на объектно-ориентированном языке C#. Для каждого из алгоритмов PSO, FIPS выбрают одну из трех топологий соседства частиц: «клика», «кольцо», «динамическая топология».

Организация вычислительного эксперимента. Число частиц в рое принимают $|S| = 80$. В качестве условия окончания поиска используют условие стагнации итерационного процесса, когда на протяжении δ_i итерации фитнесс-функция изменяет свое значение не более чем на величину ε, при этом $\delta_i = 20$; $\varepsilon = 10^{-6}$. Затем устанавливают ограничение на число итераций: $t^{\max} = 10^4$.

Тестовые функции. Для исследования эффективности алгоритмов используют следующие тестовые функции.

- Функция сферы (унимодальная функция, применяемая для тестирования программы):

$$f(X)=\sum_{i=1}^{|X|}x_i^2 \to \min.$$

Она имеет глобальный экстремум в точке $x_i=0$, $i=1...|X|$ и значение функции в точке $f^*=0$. В качестве области поиска используют множество

$$D=\{X\,|-100\le x_i\le 100\}\subset R^{|X|}.$$

- Функция Розенброка (овражная функция):

$$f(X)=\sum_{i=1}^{|X|-1}[(1-x_i)^2+100(x_{i+1}-x_i^2)^2]\to \min.$$

Она имеет глобальный экстремум в точке $x_i=1$, $i=1...|X|$. Значение функции в точке $f^*=0$. Область поиска определяют как

$$D=\{X\,|-5\le x_i\le 5\}\subset R^{|X|}.$$

- Функция Растригина (многоэкстремальная функция, имеющая большое число локальных минимумов):

$$f(X)=\sum_{i=1}^{|X|}[x_i^2-10\cos(2\pi x_i)+10]\to \min.$$

Она имеет глобальный экстремум в точке $x_i=0$, $i=1...|X|$; $f^*=0$. Затем рассматривают область поиска $D=\{X\,|-5\le x_i\le 5\}\subset R^{|X|}$.

Используя метод мультистарта с числом стартов $N=100$, в качестве критериев эффективности рассматриваемых алгоритмов имеем:

— лучшее по мультистарту достигнутое значение целевой функции f^*;

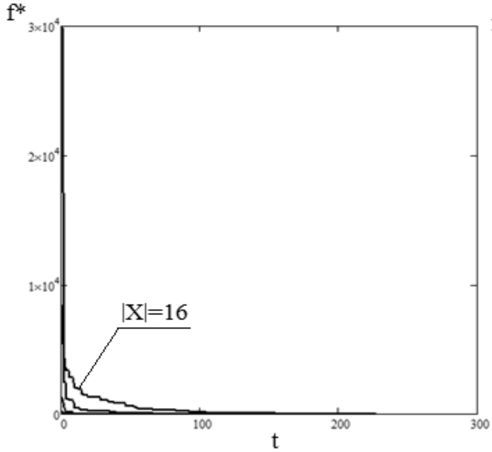
— среднюю скорость сходимости определим по формуле:

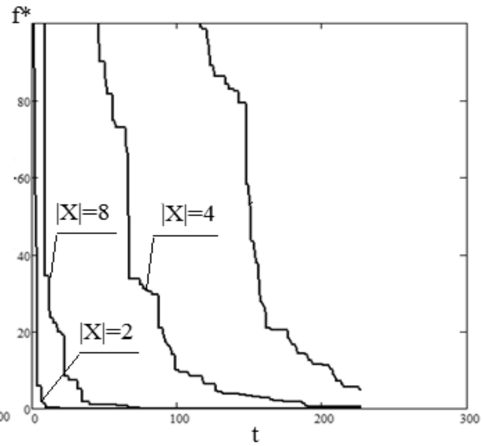
$$\overline{I}_{cx}=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}I_{cx_i},$$

здесь I_{cx_i} — скорость сходимости в i-м старте;

— оценку вероятности локализации глобального экстремума $\hat{\Omega}=\dfrac{m}{N}$, где m – число стартов, в которых достигнута заданная точность локализации глобального экстремума.

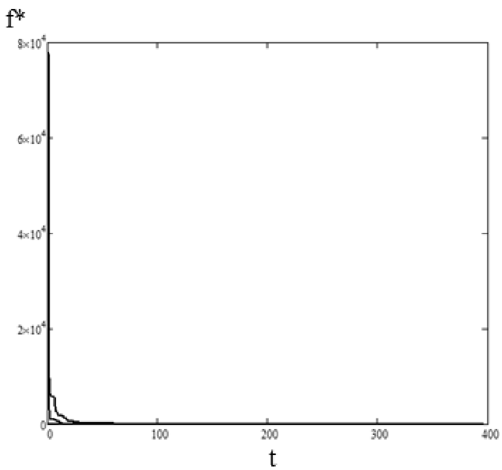
Модифицированный канонический алгоритм PSO. В этом случае используют топологию соседства «клика», т. е. соседями частицы s_i являются $|S|-1$ частиц; $i\in[1:|S|]$. Результаты исследования сходимости алгоритма PSO и критерии его эффективности представлены на рис. 1–3 и в табл. 1–3.

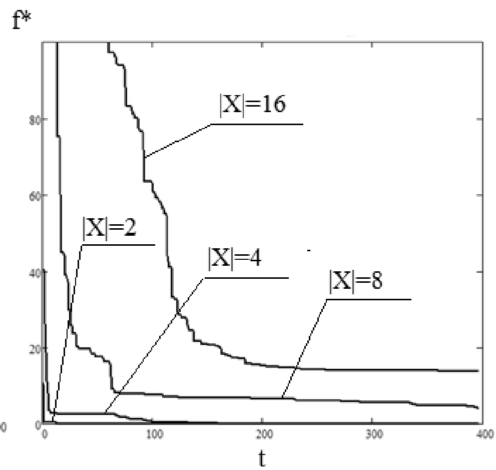




а *б*

Рис. 1. Сходимостиь алгоритма PSO: функция сферы в масштабе 1:1 (*а*) и в увеличенном масштабе (*б*)





а *б*

Рис. 2. Сходимость алгоритма PSO: функция Розенброка в масштабе 1:1 (*а*) и в увеличенном масштабе (*б*)

Таблица 1

Критерии эффективности модифицированного алгоритма PSO и функции сферы

$\lvert X\rvert$	f^*	$\overline{I}_{cx}$	$\hat{\Omega}$
2	2,44E-09	270	1,00
4	1,98E-07	358	1,00
8	5,25E-07	625	1,00
16	1,58E-06	1508	1,00

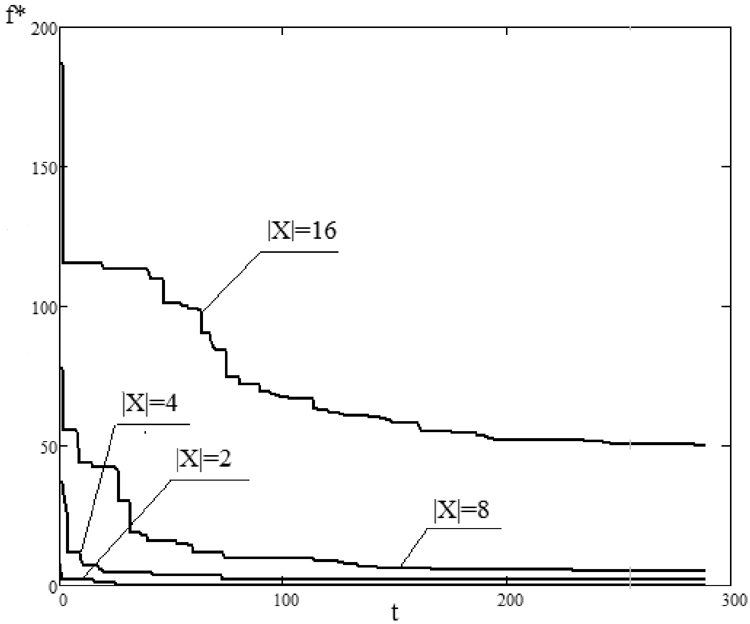


Рис 3. Сходимость алгоритма PSO: функция Растригина

Таблица 2

Критерии эффективности алгоритма PSO и функции Розенброка

$\lvert X \rvert$	f^*	$\overline{I}_{cx}$	$\hat{\Omega}$
2	1,25E-09	226	1,00
4	4,34E-08	488	0,89
8	9,99E-08	1232	0,82
16	0,46	2262	0,00

Таблица 3

Критерии эффективности алгоритма PSO и функции Растригина

$\lvert X \rvert$	f^*	$\overline{I}_{cx}$	$\hat{\Omega}$
2	7,01E-10	263	0,98
4	7,69E-07	438	0,05
8	1,98	628	0,00
16	8,95	1513	0,00

Алгоритм FIPS. В данном случае будем использовать топологию соседства «клика». Результаты исследования сходимости алгоритма *FIPS* и критерии его эффективности представлены на рис. 4–6 и в табл. 4–6.

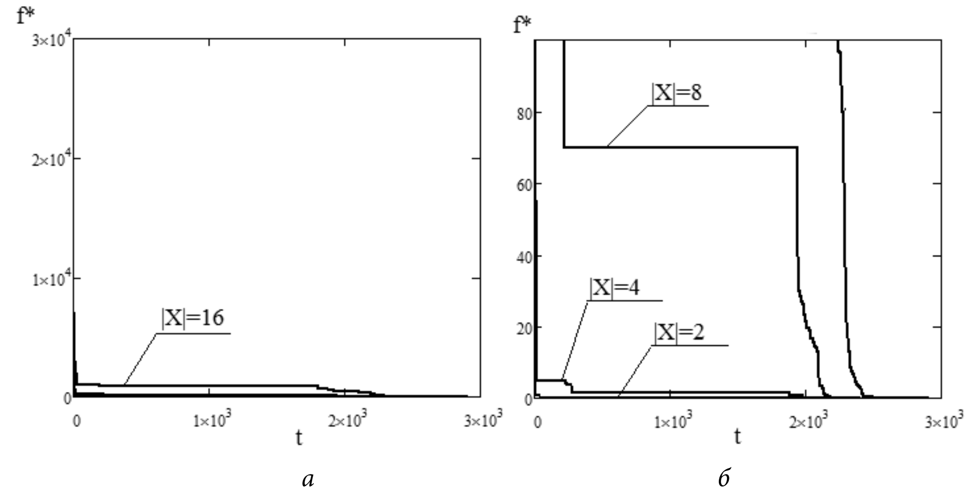


Рис. 4. Сходимость алгоритма *FIPS*: функция сферы в масштабе 1:1 (*а*) и в увеличенном масштабе (*б*)

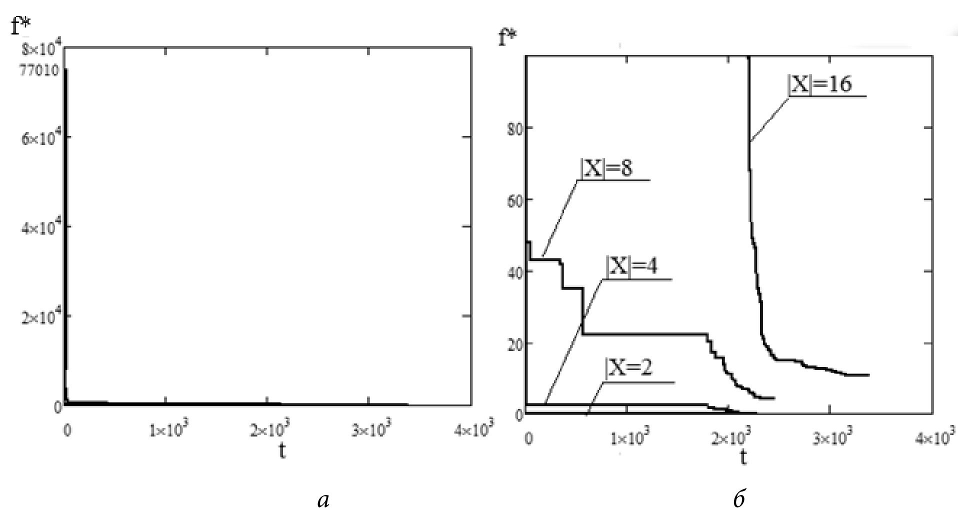


Рис. 5. Сходимости алгоритма FIPS: функция Розенброка в масштабе 1:1 (*а*) и в увеличенном масштабе (*б*)

Таблица 4

Критерии эффективности алгоритма FIPS и функции сферы

$\lvert X\rvert$	f^*	$\overline{I}_{cx}$	$\hat{\Omega}$
2	4,98E-11	2101	1,00
4	2,39E-09	2159	1,00
8	6,22E-08	2328	1,00
16	3,04E-06	2759	1,00

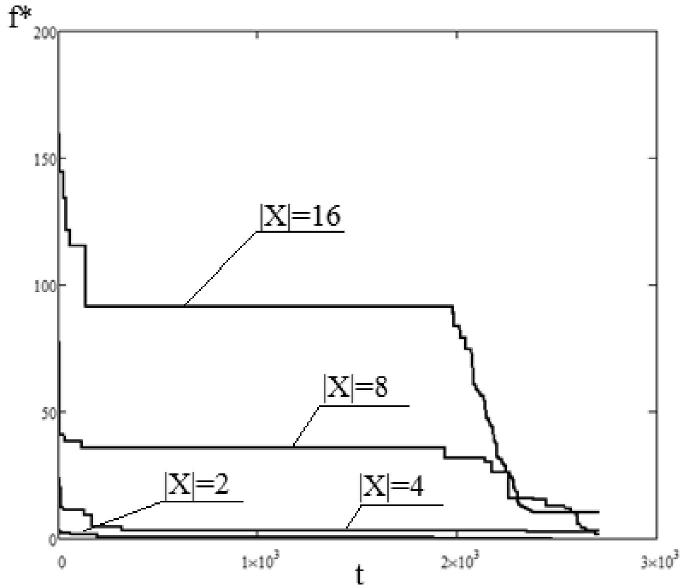


Рис. 6. Сходимости алгоритма FIPS: функция Растригина

Таблица 5

Критерии эффективности алгоритма FIPS и функции Розенброка

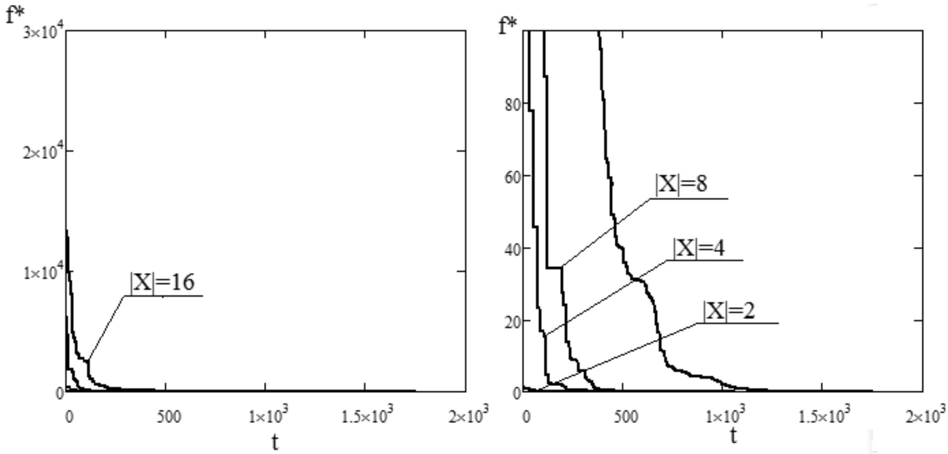
$\lvert X \rvert$	f^*	$\overline{I_{cx}}$	$\hat{\Omega}$
2	2,96E-11	2157	1,00
4	3,93E-09	2244	0,99
8	4,78E-08	2550	0,83
16	0,03	3366	0,01

Таблица 6

Критерии эффективности алгоритма FIPS и функции Растригина

$\lvert X \rvert$	f^*	$\overline{I_{cx}}$	$\hat{\Omega}$
2	6,30E-10	2396	1,00
4	8,10E-10	2968	0,75
8	3,35E-08	2868	0,03
16	1,99	3012	0,00

Алгоритм с дополнением графа соседства частиц DSPSO. Результаты исследований сходимости алгоритма DSPSO и критерии его эффективност представлены на рис. 7–9 и в табл. 7–9.



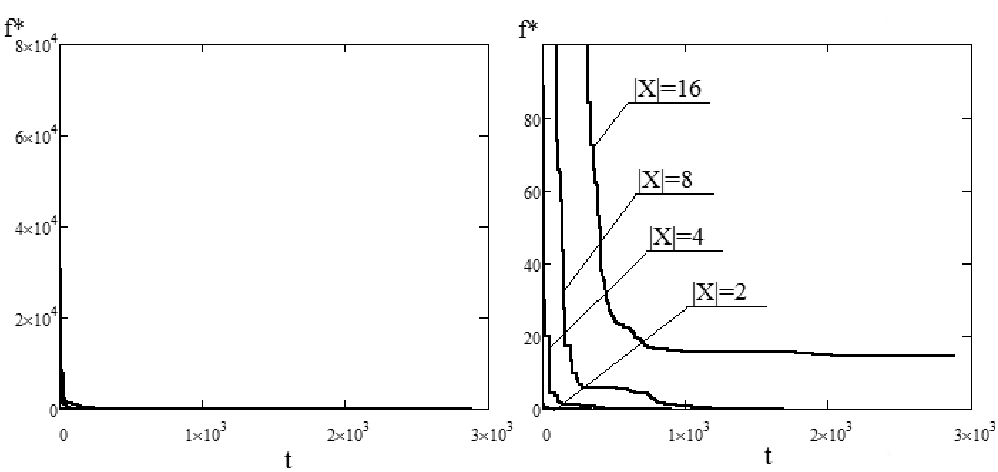
а *б*

Рис. 7. Сходимость алгоритма DSPSO: функция сферы в масштабе 1:1 (*а*) и в увеличенном масштабе (*б*)

Таблица 7

Критерии эффективности алгоритма DSPSO и функции сферы

$\lvert X \rvert$	f^*	$\overline{I}_{cx}$	$\hat{\Omega}$
2	1,14E-09	388	1,00
4	4,78E-08	625	1,00
8	3,88E-07	1055	1,00
16	1,21E-06	1821	1,00



а *б*

Рис. 8. Сходимость алгоритма DSPSO: функция Розенброка масштабе 1:1 (*а*) и в увеличенном масштабе (*б*)

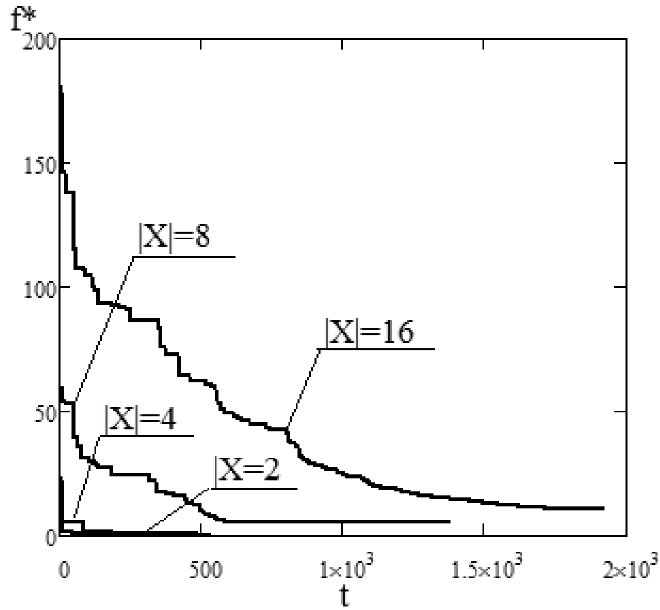


Рис 9. Сходимости алгоритма DSPSO: функция Растригина

Таблица 8

Критерии эффективности алгоритма DSPSO и функции Розенброка

$\lvert X\rvert$	f^*	$\overline{I}_{cx}$	$\hat{\Omega}$
2	1,71E-10	368	1,00
4	1,76E-08	820	1,00
8	3,01E-08	1699	0,90
16	1,95	2506	0,00

Таблица 9

Критерии эффективности алгоритма DSPSO и функции Растригина

$\lvert X\rvert$	f^*	$\overline{I}_{cx}$	$\hat{\Omega}$
2	3,31E-10	493	1,00
4	5,22E-08	929	0,37
8	0,99	1299	0,00
16	5,97	1876	0,00

Заключение. Проанализирована эффективность трех популяционных алгоритмов непрерывной глобальной оптимизации, основанных на методе роя частиц: канонический алгоритм PSO, ранжированный алгоритм FIPS, алгоритм с дополнением графа соседства частиц DSPSO. Исследования проводили на трех тестовых функциях: функции сферы, функции Растригина, функции Розенброка. Результаты исследований показали, что все алгоритмы имеют глобальный минимум функции сферы при размерности вектора варьируемых параметров, равного 2, 4, 8, 16. Алгоритм PSO с топологией клика показал более высокую скорость сходимости. Однако вероятность локализации глобального экстремума на многомерной многоэкстремальной функции Растригина у алгоритма PSO ниже, чем у остальных алгоритмов. Установлено, что ранняя сходимость алгоритма PSO обусловлена недостаточной широтой поиска алгоритма.

Алгоритм FIPS имеет самую низкую интенсивность поиска и наибольшую широту поиска, что обеспечивает высокую вероятность локализации глобального экстремума на многомерной многоэкстремальной функции Растригина по сравнению с другими алгоритмами. Данный алгоритм является единственным из рассмотренных, где с заданной точностью локализовался глобальный экстремум функции Растригина при размерности вектора варьируемых параметров равной 8.

В случае алгоритма DSPSO получены средние результаты в отношении интенсивности и широты поиска. Он обеспечил достаточно высокую вероятность локализации глобального экстремума, как в функции Растригина, так и функции Розенброка, и высокую интенсивность поиска.

При размерности вектора варьируемых параметров, равной 16, для функции Розенброка только алгоритму FIPS удалось локализовать глобальный экстремум с заданной точностью. Для функции Растригина при данной размерности вектора варьируемых параметров ни одному алгоритму это не удалось, однако все они нашли значения экстремума, близкие к оптимальным. Для функций Розенброка и Растригина наиболее близкое к оптимальному значению имеет алгоритм FIPS.

Литература

1. *Захарова Е.М., Минашина И.К.* Обзор методов многомерной оптимизации // Информационные процессы. 2014. № 3. С. 256–274.

2. *Фишер Ф.Н.* Проблемы идентификации в эконометрии. М.: Финансы и статистика, 1978. 223 с.

3. *Chia-Nan K., Ying-Pin C., Chia-Ju W.* An orthogonal-array based particle swarm optimizer with nonlinear time-varying evolution // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 191. No. 1. P. 272–279. DOI: 10.1016/j.amc.2007.02.096

4. *Qi H., Ruan L.M., Shi M., An W., Tan H.P.* Application of multi-phase particle swarm optimization technique to inverse radiation problem // Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2008. Vol. 109. No. 3. P. 476–493. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2007.07.013

5. *Хемди А. Таха.* Введение в исследование операций: в 2-х кн. Кн. 2. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 912 с.

6. *Jie J., Han Ch., Zeng J.* An extended mind evolutionary computation model for optimizations // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 185. No 2. P. 1038–1049. DOI: 10.1016/j.amc.2006.07.037

7. *Карпенко А.П., Селиверстов Е.Ю.* Глобальная безусловная оптимизация роем частиц на графических процессорах архитектуры CUDA // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2010. № 4. С. 188–191. DOI: 10.7463/0410.0142202

8. *Kennedy J., Eberhart R.C.* Particle swarm optimization // Proc. of IEEE Int. Conf. on Neural Networks. Vol. 4. Australia, IEEE Service Center, Piscataway, NJ. 1995. P. 1942–1948.
9. *Карпенко А.П., Селиверстов Е.Ю.* Обзор методов роя частиц (*PSO*) для задачи глобальной оптимизации // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2009. № 3. DOI: 10.7463/00309.0116072
10. *Карпенко А.П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. 446 с.

Ямченко Юрий Владимирович — бакалавр кафедры «Системы автоматизированного проектирования», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Андрусенко Александр Сергеевич — бакалавр кафедры «Системы автоматизированного проектирования», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научные руководители — А.П. Карпенко, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой «Системы автоматизированного проектирования» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация; Соколянский В.В., доцент кафедры «Экономика и бизнес», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

STUDY OF CONTINUOUS SEARCH OPTIMIZATION ALGORITHM EFFICIENCY BY PARTICLE SWARM

Yu.V. Yamchenko yamchenko.y.v@yandex.ru
A.S. Andrusenko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The study presents a stochastic method of direct search — a method of particle swarm. We examined modifications of this method: a ranking FIPS algorithm and the algorithm with the addition of the graph of particles neighborhood. Moreover, we studied the efficiency of the developed knoware and software. The results of the study can be used in choosing the most effective optimization algorithm based on the method of particle swarm

Keywords

Global optimization, method of particle swarm, ranked FIPS algorithm, unconstrained optimization

References

[1] Zakharova E.M., Minashina I.K. Review of multidimensional optimization techniques. *Informatsionnye protsessy* [Information processes], 2014, no. 3, pp. 256–274 (in Russ.).
[2] Fisher F.N. Problemy identifikatsii v ekonometrii [Identification problem in econometrics]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1978. 223 p. (in Russ.).
[3] Chia-Nan K., Ying-Pin C., Chia-Ju W. An orthogonal-array based particle swarm optimizer with nonlinear time-varying evolution. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, vol. 191, no. 1, pp. 272–279. DOI: 10.1016/j.amc.2007.02.096
[4] Qi H., Ruan L.M., Shi M., An W., Tan H.P. Application of multi-phase particle swarm optimization technique to inverse radiation problem. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 2008, vol. 109, no. 3, pp. 476–493. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2007.07.013
[5] Hamdy A. Taha. Operations research: an introduction (7th Edition). Prentice Hall, 2002. (Russ. ed.: Vvedenie v issledovanie operatsiy. Kn. 2. Moscow, “Vil'yams” Publishing house, 2005. 912 p.)
[6] Jie J., Han Ch., Zeng J. An extended mind evolutionary computation model for optimizations. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, vol. 185, no. 2, pp. 1038–1049. DOI: 10.1016/j.amc.2006.07.037
[7] Karpenko A.P., Seliverstov E.Yu. Global unconstrained particle swarm optimization on graphics processors with CUDA arhitecture. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2010, no. 4, pp. 188–191 (in Russ.). DOI: 10.7463/0410.0142202
[8] Kennedy J., Eberhart R.C. Particle swarm optimization. *Proc. of IEEE Int. Conf. on Neural Networks*. Vol. 4. Australia, IEEE Service Center, Piscataway, NJ. 1995, pp. 1942–1948.
[9] Karpenko A.P., Seliverstov E.Yu. Review of the particle swarm optimization method (PSO) for a global optimization problem. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2009, no. 3 (in Russ.). DOI: 10.7463/00309.0116072

[10] Karpenko A.P. Sovremennye algoritmy poiskovoy optimizatsii. Algoritmy, vdokhnovlennye prirodoy [Modern search optimization algorithms. Algorithms, inspired by nature]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2014. 446 p. (in Russ.).

Yamchenko Yu.V. — Bachelor of the Department of Computer-aided design, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Andrusenko A.S. — Bachelor of the Department of Computer-aided design, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisors — A.P. Karpenko, Dr. Sci. (Phys.- Math.), Head of the Department of Computer-aided design, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.; V.V. Sokolyanskiy, Assoc. Professor of the Department of Economics and business, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.