

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ДРЕВОВИДНОГО ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА ШЕСТИНОГО ШАГАЮЩЕГО РОБОТА

Е.Е. Акылбеков

e.akylbekov@bk.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

### Аннотация

Предложена кинематическая схема древовидного исполнительного механизма шестиногого шагающего робота. Рассмотрены математические модели кинематики и динамики исполнительного механизма такого робота. Представлены значения модифицированных параметров Денавита—Хартенберга, матрицы достижимости звеньев исполнительного механизма и вектора  $Z$ , характеризующего пространственное расположение осей вращения кинематических пар

### Ключевые слова

Шестиногие шагающие роботы, синтез кинематической структуры, модифицированные системы координат Денавита — Хартенберга, матрица достижимости, уравнение динамики исполнительного механизма шестиногого шагающего робота

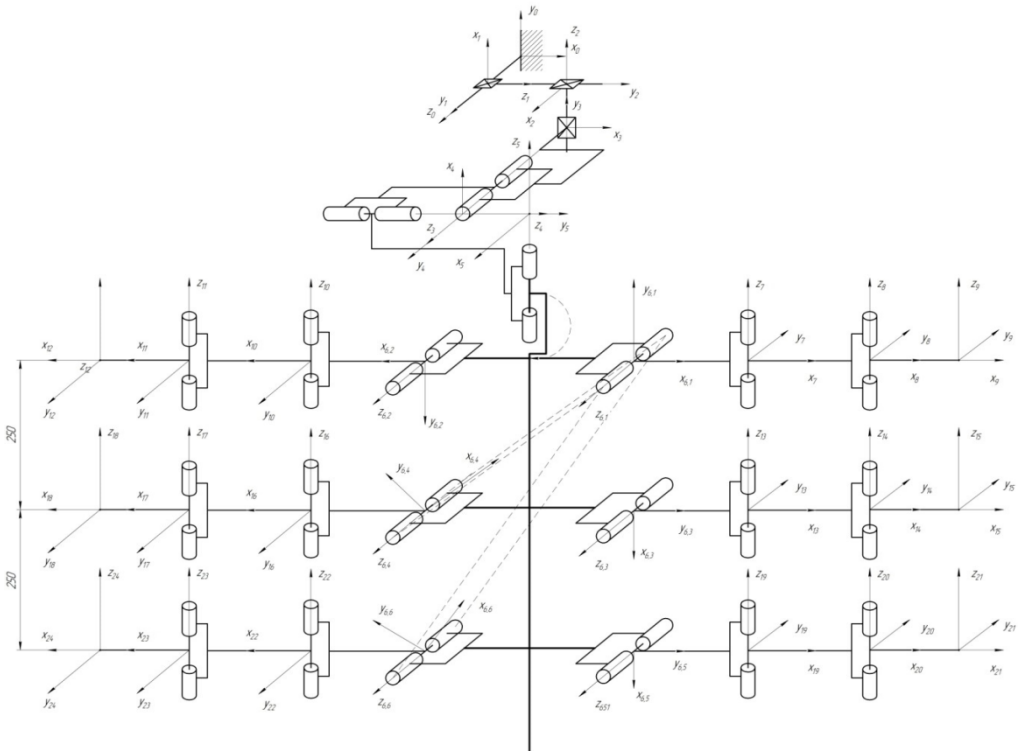
Поступила в редакцию 13.11.2016

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Для постановки и расчета задач кинематики обычно составляют расчетную кинематическую модель, в основу которой должны быть положены предполагаемые или имеющиеся геометрические размеры звеньев, их типы, количество и распределение кинематических пар. Для шагающих с помощью кинематической модели роботов, как правило, решается задача определения законов изменения обобщенных координат в степенях подвижности. Для исследования динамики робота обычно составляют динамическую модель. Динамическая модель, в отличие от кинематической, должна учитывать не только геометрические размеры звеньев и распределение кинематических пар, но и распределение масс и тензоров инерции звеньев робота [1].

В МГТУ им. Н.Э. Баумана проводятся научные исследования, направленные на создание шестиногих шагающих роботов. Одной из первоочередных задач при создании таких роботов является проектирование их исполнительных механизмов с электрогидравлическим следящим приводом. На рис. 1 представлена кинематическая схема древовидного исполнительного механизма шестиногого шагающего робота. Каждая конечность обладает тремя степенями подвижности. В соответствии с правилами построения модифицированной системы координаты Денавита—Хартенберга, получены численные значения параметров кинематической схемы для основных и вспомогательных систем координат, которые представлены в табл. 1 и 2, соответственно [2, 3].

Таким образом, предлагаемый метод построения модифицированной СК Денавита—Хартенберга позволяет определить значения параметров основных и вспомогательных СК древовидного ИМ шестиногого шагающего робота.



**Рис. 1.** Кинематическая схема древовидного исполнительного механизма шестинного шагающего робота и системы координат Денавита—Хартенберга

**Определение параметров Денавита—Хартенберга для всех систем координат механизма.** Параметр  $d_i$  равен расстоянию от начала  $(i - 1)$ -й системы координат до точки пересечения оси  $Z_{i-1}$  с осью  $x_i$ , измеряемому в направлении оси  $Z_{i-1}$ . Если сочленение поступательное, то  $d_i$  совпадает с обобщенной координатой.

Параметр  $a_i$  равен расстоянию от точки пересечения оси  $Z_{i-1}$  с осью  $x_i$  до начала  $i$ -й системы координат, измеряемому в направлении оси  $x_i$ . Параметр  $a_i$  является конструктивной постоянной механизма (зависит от геометрии конструкции).

Параметр  $\theta_i$  представляет собой угол, на который необходимо повернуть ось  $x_{i-1}$  вокруг оси  $Z_{i-1}$  в положительном направлении до совмещения с осью  $x_i$ . Если сочленение вращательное, то параметр  $\theta_i$  совпадает с обобщенной координатой.

Параметр  $\alpha_i$  — это угол, на который необходимо повернуть ось  $Z_{i-1}$  вокруг оси  $x_i$  в положительном направлении до совмещения с осью  $Z_i$ ,  $f(i)$  — номер звена, являющегося предыдущим (вершиной-отцом) для звена  $i$ ,  $ns(i)$  — определяет, каким по счету следующим из числа непосредственно присоединенных (звеном-сыном) является звено  $i$ .

Таблица 1

**Значения параметров Денавита—Хартенберга основных систем координат исполнительного механизма шестиного шагающего робота**

№ системы координат	$\theta_i$ , рад	$d_i$ , м	$a_i$ , м	$\alpha_i$ , рад	$f(i)$	$ns(i)$
1	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	0	1
2	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	1	1
3	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	2	1
4	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	3	1
5	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	4	1
6	$\pi/2$	0	0,400	$\pi/2$	5	1
7	0	0	0	$-\pi/2$	6	1
8	0	0	0,600	0	7	1
9	0	0	1,100	0	8	1
10	0	0	0	$\pi/2$	6	2
11	0	0	0,600	0	10	1
12	0	0	1,100	0	11	1
13	$\pi/2$	0	0	$-\pi/2$	6	3
14	0	0	0,600	0	13	1
15	0	0	1,100	0	14	1
16	$(\pi/2-0,46)$	0	0	$\pi/2$	6	4
17	0	0	0,600	0	16	1
18	0	0	1,100	0	17	1
19	$\pi/2$	0	0	$-\pi/2$	6	5
20	0	0	0,600	0	19	1
21	0	0	1,100	0	20	1
22	$(\pi/2-0,78)$	0	0	$\pi/2$	6	6
23	0	0	0,600	0	22	1
24	0	0	1,100	0	23	1

Таблица 2

**Значения параметров Денавита—Хартенберга вспомогательных систем координат исполнительного механизма шестиного шагающего робота**

№ системы координат	$\theta_i$ , рад	$d_i$ , м	$a_i$ , м	$\alpha_i$ , рад	$f(i)$	$ns(i)$
6,2	$\pi$	0	0,800	0	6	2
6,3	$-\pi/2$	0	0,400	0	6	3
6,4	0,46	0	-0,894	0	6	4
6,5	$-\pi/2$	0	0,800	0	6	5
6,6	0,78	0	-1,131	0	6	6

**Матрица достижимости исполнительного механизма шестиногого шагающего робота.** Матрица достижимости для исполнительного механизма шестиногого шагающего робота, где каждый элемент  $d_{ij} = 1$ , если звено  $i$  достижимо из звено  $j$ , и  $d_{ij} = 0$ , если звено  $i$  не достижимо из звена  $j$ . Древоидная кинематическая структура также может быть описана с помощью матрицы достижимости  $D$ , определяющей порядок следования звеньев исполнительного механизма друг относительно друга. Общий вид, а также численные значения матрицы достижимости  $D(24 \times 24)$  представлены ниже.

**Матрица достижимости  $D$  ( $24 \times 24$ )**

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Вектор  $Z$ , определяющий последовательность ортов осей  $Z$ , соответствующих сочленениям, соединяющим звенья исполнительного механизма робота с четырьмя звеньями-отцами имеет вид

$$Z = \begin{pmatrix} {}^0Z_1, {}^0Z_2, {}^0Z_3, {}^0Z_4, {}^0Z_5, {}^0Z_6, {}^0Z_7, {}^0Z_8, {}^0Z_9, {}^0Z_{10}, {}^0Z_{11}, {}^0Z_{12}, \\ {}^0Z_{13}, {}^0Z_{14}, {}^0Z_{15}, {}^0Z_{16}, {}^0Z_{17}, {}^0Z_{18}, {}^0Z_{19}, {}^0Z_{20}, {}^0Z_{21}, {}^0Z_{22}, {}^0Z_{23}, {}^0Z_{24} \end{pmatrix}$$

Таким образом, определены все параметры, характеризующие проектированную древовидную кинематическую структуру исполнительного механизма шестиногого шагающего робота.

Методам математического описания кинематики и динамики исполнительного механизма роботов посвящена обширная литература [2–3]. Одним из широко применяемых подходов является использование при записи кинематических соотношений матриц однородных преобразований размера (4×4). Такой подход позволяет составить уравнения в более компактной форме путем единого описания преобразований перемещений в поступательных и вращательных кинематических парах. Данный метод базируется на теории графов, преобразованиях Денавита—Хартенберга и теории матриц. При этом число параметров, входящих в матрицу  $A_i$  (матрицу перехода) относительного положения последовательных звеньев исполнительного механизма, минимально, и естественным образом определяет взаимное расположение последовательных звеньев ИМ. Вид матрицы  $A_i$  одинаков как для вращательного, так и для поступательного сочленения.

Существенным преимуществом такого метода построения связанных систем координат является то, что можно указать только четыре параметра, определяющих относительное положение двух последовательных СК  $i - 1$  и  $i$  имеет следующий вид:

$$A_i = \begin{vmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & \alpha_i \cdot \cos(\theta_i) \\ \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & \alpha_i \cdot \cos(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Здесь  $\alpha_i$  и  $\alpha_i$  всегда постоянны и определяются конструкцией исполнительного механизма робота. Один из двух других параметров ( $\theta_i$  либо  $d_i$ ) является переменным. Для вращательного сочленения величина  $\theta_i$  характеризует угол относительного поворота звеньев  $i - 1$  и  $i$ , а линейная величина  $d_i$  постоянна. Для телескопического соединения наоборот, переменной величиной является  $d_i$ . Переменную величину  $i$ -го сочленения обычно называют обобщенной координатой исполнительного механизма робота [4]. При построении кинематических моделей роботов данный метод получил наибольшее распространение среди разработчиков из-за его наглядности и привязки к конструктивным параметрам исполнительного механизма. Так, как шестиногие шагающие роботы имеют древовидную кинематическую структуру, то использование данного метода к описанию его кинематики затруднено.

Рассмотрим порядок назначения систем координат, связанных со звеньями древовидного исполнительного механизма [5]. С каждым звеном исполнительного механизма связывается столько систем координат, сколько звеньев-

сыновой оно имеет. Одна из систем координат, связанных со звеном, назначается основной, остальные являются вспомогательными. В качестве примера на рис. 2 показаны три системы координат, связанные со звеном  $i$ , имеющим три звена-сына. Все системы координат назначаются в соответствии с правилами Денавита—Хартенберга.

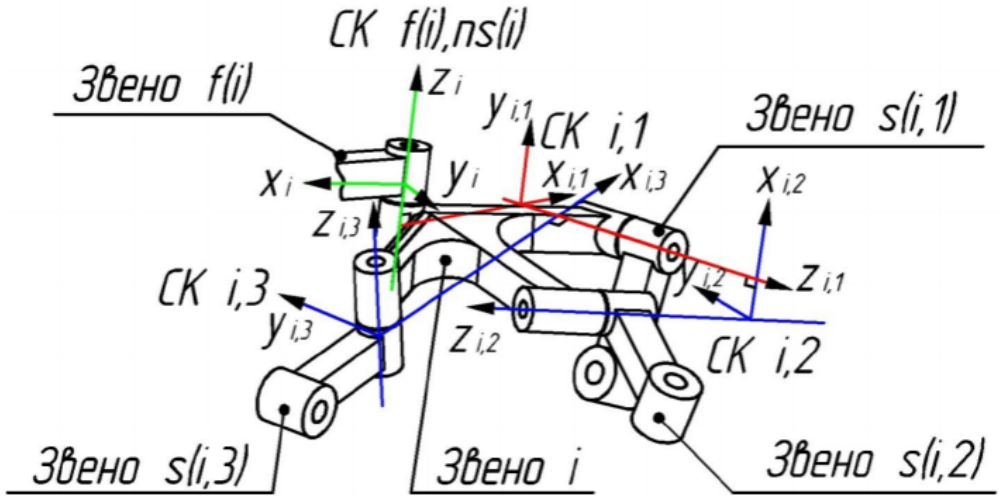


Рис. 2. Назначение систем координат (СК), связанных с ветвящимся звеном  $i$

Переход из основной системы координат звена  $i$  в СК его звена-отца  $f(i)$ , соответствующую этому звену, определяется матрицей преобразования  $A_i$ :

$$A_i = \left( \begin{array}{c|c} \frac{f(i), ns(i)}{R_i} & \frac{f(i), ns(i)}{\bar{l}_i} \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right) \text{ — матрица, задающая переход от основной системы координат звена } i \text{ к системе координат звена } f(i), \text{ соответствующей звену } i.$$

Переходы из вспомогательных систем координат в основную звена  $i$  определяется постоянными матрицами однородных преобразований  $M_{i,ns(j)}$ , где  $j$  — число звеньев-сыновей звена  $i$ .

$$M_{i,ns(j)} = \left( \begin{array}{c|c} \frac{i}{R_{i,ns(j)}} & \frac{i}{\bar{r}_{i,ns(j)}} \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right) \text{ — постоянная матрица, задающая переход от вспомогательной системы координат к основной системе координат звена } i.$$

**Уравнение динамики древовидного исполнительного механизма шестиподного шагающего робота.** Запишем кинематические и динамические зависимости для всех звеньев исполнительного механизма с древовидной кинематической структурой, а также выражения, определяющие ускорения центров масс звеньев [6]:

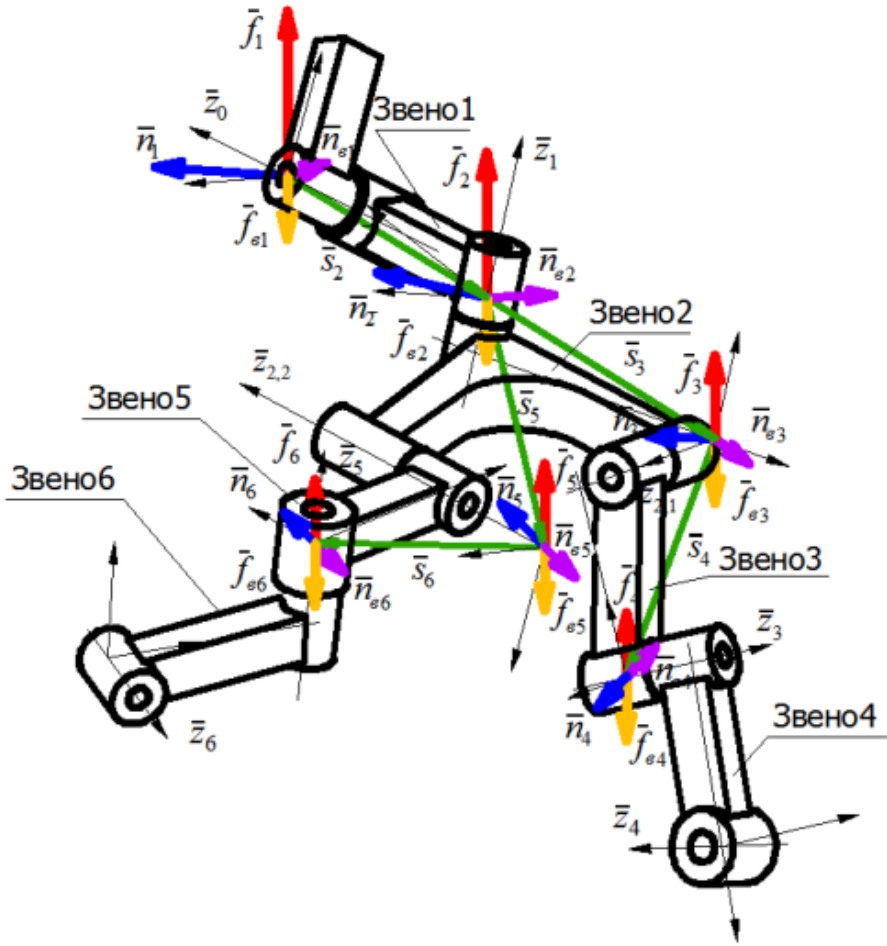


Рис. 3. Силы и моменты, действующие между звеньями древовидного исполнительного механизма робота

Рассчитаем угловые скорости и ускорения звеньев:

$${}^0w = (D \cdot {}^0z^d \cdot \sigma) \cdot \dot{q}; \tag{2}$$

$${}^0e = D \cdot {}^0z^d \cdot \sigma \cdot \ddot{q} + D \cdot \sigma \cdot \dot{q}^d \cdot {}^0\dot{z}. \tag{3}$$

Далее запишем скорости начал основных систем координат звеньев:

$${}^0v = (\Lambda^T({}^0I_D) \cdot {}^0z^d \cdot \sigma + D \cdot {}^0z^d \cdot (E - \sigma)) \cdot \dot{q}. \tag{4}$$

Найдем ускорения начал основных систем координат звеньев:

$$\begin{aligned} {}^0\dot{v} = & (\Lambda^T({}^0I_D) \cdot {}^0z^d \cdot \sigma + D \cdot {}^0z^d \cdot (E - \sigma)) \cdot \ddot{q} + \\ & + \Lambda^T({}^0I_D) \cdot {}^0\dot{z}^d \cdot \sigma + \Lambda^T({}^0\dot{I}_D) \cdot {}^0z^d \cdot \sigma + D \cdot {}^0\dot{z}^d \cdot (E - \sigma) \cdot \dot{q}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ускорения центров масс звеньев:

$$\begin{aligned}
 {}^0\bar{a}_{цм} = & \left( D \cdot {}^0z^d \cdot (E - \sigma) + \Lambda^T({}^0c_{fD}) \cdot {}^0z^d \cdot \sigma \right) \cdot \ddot{q} + \\
 & + \left( \Lambda^T({}^0c_{fD}) \cdot \Lambda^T({}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q}^d) \cdot (D - E) \cdot {}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q} + \right. \\
 & + \Lambda^T \left( \Lambda^T({}^0c_{fD}) \cdot \sigma \cdot {}^0\dot{q}^d \cdot {}^0z^d \cdot D + \Lambda^T({}^0c_{fD}) \cdot \left( (D - E) \cdot \sigma \cdot {}^0z^d \cdot {}^0\dot{q}^d \right) \right) \cdot {}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q} + \\
 & \left. + 2 \cdot D \cdot \Lambda^T \left( {}^0z^d \cdot (E - \sigma) \cdot \dot{q}^d \right) \cdot (D - E) \cdot {}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q} \right). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Силы и моменты, действующие на звенья со стороны их звеньев-отцов:

$${}^0f = D^T \cdot m^d \cdot a \cdot D^T \cdot {}^0f_g; \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 {}^0n = & - \left[ \Lambda({}^0c_{fD}) \right]^T \cdot m^d \cdot a \cdot D^T \cdot {}^0J_C^d \cdot {}^0e + D^T \cdot \Lambda({}^0w^d) \cdot {}^0J_C^d \cdot {}^0w - \\
 & - \left( D^T - E \right) \cdot \Lambda({}^0s^d) \cdot D^T \cdot {}^0f_g - D^T \cdot {}^0n_g - D^T \cdot \Lambda({}^0t^d) \cdot {}^0f_B. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Вычислим силы и моменты, развиваемые приводами:

$$\begin{aligned}
 \tau = & \sigma \cdot \left( {}^0z^d \right)^T \left[ - \left( \Lambda({}^0c_{fD}) \right)^T \cdot m^d \cdot a \cdot D^T \cdot {}^0J_C^d \cdot {}^0e + \right. \\
 & + D^T \cdot \Lambda({}^0w^d) \cdot {}^0J_C^d \cdot {}^0w - \left( D^T - E \right) \cdot \Lambda({}^0s^d) \cdot D^T + \\
 & \left. + D^T \cdot \Lambda({}^0t^d) \cdot {}^0f_B - D^T \cdot {}^0n_B \right] + (E - \sigma) \cdot \left( {}^0z^d \right)^T \left[ D^T \cdot m^d \cdot a - D^T \cdot {}^0f_g \right]. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Усилия, развиваемые приводами, выражены через обобщенные координаты и их производные. Путем группирования сомножителей при  $\dot{q}$  и  $\ddot{q}$  получены уравнения динамики исполнительного механизма роботов, имеющих древовидные кинематические структуры, определяемые матрицей достижимости звеньев  $D$ , блочным вектором  ${}^0z$  и диагональной матрицей  $\sigma$ :

$$A(q) \cdot \ddot{q} + B(q, \dot{q}) - C(q) \cdot {}^0f_g - H(q) \cdot {}^0n_g = \tau, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 \text{где } A(q) = & \sigma \cdot \left( {}^0z^d \right)^T \cdot \left( - \left( \Lambda({}^0c_{fD}) \right)^T \cdot m^d \cdot \left( D \cdot {}^0z^d \cdot (E - \sigma) + \Lambda^T({}^0c_{fD}) \cdot {}^0z^d \cdot \sigma \right) + \right. \\
 & + D^T \cdot {}^0J_C^d \cdot D \cdot {}^0z^d \cdot \sigma \left. \right) + (E - \sigma) \cdot \left( {}^0z^d \right)^T \cdot D^T \cdot m^d \cdot \left( D \cdot {}^0z^d \cdot (E - \sigma) + \Lambda^T({}^0c_{fD}) \cdot {}^0z^d \cdot \sigma \right); \\
 B(q, \dot{q}) = & \sigma \cdot \left( {}^0z^d \right)^T \cdot \left\{ - \left( \Lambda({}^0c_{fD}) \right)^T \cdot m^d \cdot \left[ \Lambda^T({}^0c_{fD}) \cdot \Lambda^T({}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q}^d) \cdot (D - E) + \right. \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & +\Lambda^T \left( \Lambda^T ({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot D + \Lambda^T ({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \left( (D-E) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right)^d \right) + \\
 & \quad + 2 \cdot D \cdot \Lambda^T \left( {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E-\boldsymbol{\sigma}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \cdot (D-E) \Big] + \\
 & + D^T \cdot {}^0\mathbf{J}_C^d \cdot D \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot \Lambda^T ({}^0\mathbf{z}^d) \cdot (D-E) + D^T \cdot \Lambda \left( D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right)^d \cdot {}^0\mathbf{J}_C^d \cdot D \Big\} \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d + \\
 & + (E-\boldsymbol{\sigma}) \cdot \left( {}^0\mathbf{z}^d \right)^T \cdot D^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot \left[ \Lambda^T ({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \Lambda^T ({}^0\mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d) \cdot (D-E) + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \cdot D \cdot \Lambda^T \left( {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E-\boldsymbol{\sigma}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \cdot (D-E) + \right. \\
 & \quad \left. + \Lambda^T \left( \Lambda^T ({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot D + \Lambda^T ({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \left( (D-E) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right)^d \right) \right] \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d ; \\
 C(\mathbf{q}) & = \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( {}^0\mathbf{z}^d \right)^T \cdot \left( (D^T - E) \cdot \Lambda ({}^0\mathbf{s}^d) \cdot D^T + D^T \cdot \Lambda ({}^0\mathbf{t}^d) \right) + (E-\boldsymbol{\sigma}) \cdot \left( {}^0\mathbf{z}^d \right)^T \cdot D^T ; \\
 H(\mathbf{q}) & = \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( {}^0\mathbf{z}^d \right)^T \cdot D^T .
 \end{aligned}$$

В этих выражениях:

$\mathbf{m} = (m_1, m_2 \dots m_N)^T$  — матрица масс звеньев исполнительного механизма;

$\mathbf{J}_C = (J_{C_1}, J_{C_2} \dots J_{C_N})^T$  — блочная матрица тензоров инерции звеньев;

${}^0\mathbf{t}^d = \text{diag} \left( {}^0\bar{t}_1^T \quad {}^0\bar{t}_2^T \quad \dots \quad {}^0\bar{t}_N^T \right)$  — блочная диагональная матрица векторов, со-

единяющих начала систем координат звеньев  $\mathbf{f}(i)$ ,  $\mathbf{ns}(i)$  с точками, через которые проходят равнодействующие внешних сил, приложенных к звеньям  $i$ ;  ${}^0\mathbf{c}_{fD}$  — матрица, объединяющая векторы, соединяющие начала систем координат звеньев  $\mathbf{f}(i)$ ,  $\mathbf{ns}(i)$  с центрами масс звеньев  $i$ , в соответствии со взаимной достижимостью звеньев, описываемой матрицей  $\mathbf{D}$ ; правый верхний индекс  $d$  обозначает представление векторной величины в диагональном виде.

В процессе движения шестиногого шагающего робота его стопы взаимодействует с опорной поверхностью. Тогда уравнение динамики исполнительного механизма шестиногого шагающего робота с учетом воздействия внешних сил и моментов, а также наложенных внешних кинематических связей запишем в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} A(\mathbf{q}) & -J_{VR}^T(\mathbf{q}) \\ J_f(\mathbf{q}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ {}^0\mathbf{R}_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{P}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L(\mathbf{q})\mathbf{F}_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $q$  — вектор обобщенных координат исполнительного механизма;  $\boldsymbol{\tau}$  — вектор-столбец моментов, развиваемых приводами исполнительного механизма.

Значения остальных блочных векторов и матриц уравнения (11) определяются в соответствии с [7].

**Выводы.** Доказано, что для построения математической модели кинематики древовидного исполнительного механизма шестиногого шагающего робота

целесообразно использовать модифицированную систему координат Денавита—Хартенберга. Эффективным подходом к построению математической модели динамики исполнительного механизма шестиногого шагающего робота является использование модифицированной системы координат Денавита—Хартенберга и принципа Д'Аламбера, что позволяет определить движение с учетом приложенных к нему внешних сил и моментов, а также сил и моментов от наложенных на него внешних кинематических связей и вычислить возникающие при этом силы и моменты реакций этих связей.

## Литература

1. Мохов А.Д. Разработка математического и программного обеспечения систем управления мобильными роботами произвольной структуры с избыточными связями / ВолГТУ: веб-сайт университета. URL: <http://www-tst.vstu.ru/nauka/dissertatsionnye-sovety/zaschita/mokhov-aleksandr-dmitrievich.html> (дата обращения: 25.02.2017)
2. Denavit J., Hartenberg R.S. Kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices // J. Appl. Mech. 1955. No. 6. P. 215–221.
3. Ковальчук А.К. Модифицированная система координат Денавита-Хартенберга для исполнительных механизмов роботов с древовидной кинематической структурой // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. № 11. С. 12–30. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/826673.html> (дата обращения 27.03.2017) DOI: 10.7463/1115.0826673
4. Ковальчук А.К., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е. Блочно-матричные уравнения движения исполнительных механизмов роботов с древовидной кинематической структурой // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2008. № 12. С. 5–21.
5. Проектирование систем приводов шагающих роботов с древовидной кинематической структурой / Л.А. Каргинов, А.К. Ковальчук, Д.Б. Кулаков, С.Е. Семенов, В.В. Яроц. М.: Рудомино, 2013. 111 с.
6. Ковальчук А.К. и др. Основы теории исполнительных механизмов шагающих роботов. М.: Рудомино, 2010. 167 с.

**Акылбеков Ербол Ергалиевич** — магистрант кафедры «Гидромеханика, гидромашин и гидропневмоавтоматика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Научный руководитель** — А.К. Ковальчук, канд. техн. наук, доцент кафедры «Гидромеханика, гидромашин и гидропневмоавтоматика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

## MATHEMATICAL MODEL FOR KINEMATICS AND DYNAMICS OF A TREE-LIKE ACTUATOR FOR A HEXAPOD WALKING ROBOT

E.E. Akylbekov

e.akylbekov@bk.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

### Abstract

We propose a kinematic diagram of a tree-like actuator for a hexapod walking robot. We consider mathematical models for actuator kinematics and dynamics of this type of robot. We supply modified Denavit—Hartenberg parameter values, a reachability matrix for the actuator links and the Z vector that characterises where the rotation axes of kinematic pairs are located in three dimensions

### Keywords

Hexapod walking robots, synthesis of kinematic structures, modified Denavit—Hartenberg coordinates, reachability matrix, dynamic equation of a hexapod walking robot actuator

© Bauman Moscow State Technical University, 2017

### References

- [1] Mokhov A.D. Razrabotka matematicheskogo i programmnoy obespecheniya sistem upravleniya mobil'nymi robotami proizvol'noy struktury s izbytochnymi svyaziyami [Development of mathware and software for control systems of free structure mobile robots with excessive interconnections]. VolGTU: university website. URL: <http://www-tst.vstu.ru/nauka/dissertatsionnye-sovety/zaschita/mokhov-aleksandr-dmitrievich.html> (accessed 25.02.2017) (in Russ.).
- [2] Denavit J., Hartenberg R.S. Kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *J. Appl. Mech.*, 1955, no. 6, pp. 215–221.
- [3] Koval'chuk A.K. Modified Denavit-Hartenberg coordinate system for robot actuating mechanisms with tree-like kinematic structure. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education. BMSTU], 2015, no. 11, pp. 12–30. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/826673.html> (accessed 27.03.2017) (in Russ.) DOI: 10.7463/1115.0826673
- [4] Koval'chuk A.K., Kulakov D.B., Semenov S.E. Block- matrix motion equation of robot actuating mechanisms with tee-like kinematic structure. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2008, no. 12, pp. 5–21 (in Russ.).
- [5] Karginov L.A., Koval'chuk A.K., Kulakov D.B., Semenov S.E., Yarots V.V. Proektirovanie sistem privodov shagayushchikh robotov s drevovidnoy kinematicheskoy strukturoy [Engineering walking robot actuating system with tree-like structure]. Moscow, Rudomino Publ., 2013. 111 p. (in Russ.).
- [6] Koval'chuk A.K. et al. Osnovy teorii ispolnitel'nykh mekhanizmov shagayushchikh robotov [Theory fundamentals of walking robot actuating mechanism]. Moscow, Rudomino Publ., 2010. 167 p. (in Russ.).

**Akylbekov E.E.** — Master's Degree student of Fluid Mechanics, Hydraulic Machines and Hydraulic and Pneumatic Automation Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Scientific advisor** — A.K. Kovalchuk, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor of Fluid Mechanics, Hydraulic Machines and Hydraulic and Pneumatic Automation Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.