

**ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ
ЗЕМЛИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ БАЛЛИСТИКИ**

Д.С. Колесникова

kolesnikovads@student.bmstu.ru

SPIN-код: 9804-9257

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрены различные гравитационные модели, используемые при расчетах траекторий движения летательных аппаратов (ЛА). Проведен сравнительный анализ подходов к определению полного вектора напряженности гравитационного поля, соответствующего различным моделям, аппроксимирующим поверхность Земли: сферы, двухосного эллипсоида Красовского и общеземного эллипсоида. Предложены математические модели расчета ускорения силы тяжести согласно трем рассмотренным методикам. Сформирована математическая модель движения ЛА класса «поверхность — поверхность», позволяющая оценить точность попадания в район указанной цели для различных гравитационных моделей. Выполнена оценка методических погрешностей моделей Земли. Сформулированы рекомендации по целесообразности использования той или иной модели.

Ключевые слова

Полный вектор напряженности гравитационного поля, аномаль-летательных аппаратов (ЛА). Проведен сравнительное гравитационные поле, общий анализ подходов к определению полного вектора земной эллипсоид, эллипсоид Кра-напряженности гравитационного поля, соответствующего различным моделям, аппроксимирующим по-фигуры Земли, математическое моделирование, траектория летательного аппарата

Поступила в редакцию 23.08.2021

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021

Проблема определения полного вектора напряженности гравитационного поля до настоящего времени остается одной из важнейших в перечне факторов, определяющих создание высокоточного навигационного обеспечения полета ракет различных классов. Эта задача особенно актуальна для баллистических ракет, дальность действия которых превышает 5500 км, а требуемый уровень точности составляет примерно 300 м по предельному отклонению [1]. Основная сложность таких задач заключается в отсутствии возможности точной топографической привязки на поверхности Земли. Следующая сложность обусловлена необходимостью вычисления на борту ракет значения гравитационного ускорения для решения задачи инерциальной навигации. Ввиду того что инерциальные навигационные системы не могут измерять возмущения, связанные с аномалиями гравитационного поля Земли, любое отклонение траектории, вызванное некорректностью математического моделирования гравитационного ускорения, не будет зафиксировано навигационными приборами и приведет к появлению некомпенсируемых погрешностей.

Гравитационная модель Земли напрямую зависит от точности аппроксимации ее поверхности. К настоящему времени создано большое количество различных

схем, описывающих земную поверхность, которые различаются используемыми в них геодезическими постоянными и характеристиками гравитационного поля.

В основном значение и направление силы тяжести определяет сила притяжения, которая значительно превышает центробежную силу, вызванную вращением Земли. Тем не менее для повышения точности решения геодезических задач необходимо учитывать ее влияние. Помимо этого сила тяжести в данной точке поверхности Земли не остается постоянной с течением времени. Изменения силы тяжести принято подразделять на периодические и непериодические. Среди периодических главными являются приливные изменения, вызванные влиянием гравитационных полей Луны и Солнца, которые достигают $2 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$ [2]. Непериодические изменения, такие как вулканическая деятельность, землетрясения, перемещения воздушных масс, могут достигать 10^{-5} м/с^2 [2]. Следовательно, математические модели гравитационного поля Земли в задачах баллистики и навигации должны обладать высокой точностью. Однако при оценке того или иного подхода к определению напряженности гравитационного поля важно иметь в виду, что потенциально высокая точность не всегда обеспечивает необходимую оперативность расчетов. Поэтому при составлении математических моделей необходимо анализировать факторы, учет которых является целесообразным в рамках решаемой задачи. Наиболее простой моделью, описывающей гравитационное поле Земли, является плоскопараллельное гравитационное поле, которое применяют при расчете траекторий сравнительно небольших дальностей. В такой модели кривизной земной поверхности пренебрегают и ускорение свободного падения полагают постоянной величиной.

Следующей по уровню сложности является модель шара (ньютоновского потенциала), в которой поверхность геоида аппроксимируется шаром и отсутствует учет влияния полюсного и экваториального сжатия, а также неравномерность распределения твердых масс в теле Земли.

Далее по сложности идут модели эллипсоидов вращения (двухосных эллипсоидов). Большое распространение среди них получили гравитационные модели, в которых Земля рассматривается в качестве референц-эллипсоида, параметры которого наилучшим образом соответствуют поверхностям тех или иных территорий. На основе гравиметрических исследований и обработки обширных градусных измерений территории СССР, США и Западной Европы, полученных в 1940 г. была создана модель эллипсоида Ф.Н. Красовского.

Исследованиями установлено, что общая фигура Земли наилучшим образом характеризуется трехосным эллипсоидом, однако ввиду малого экваториального сжатия эту модель используют сравнительно редко.

Целью данной работы является анализ различных гравитационных моделей, используемых при расчете траекторий движения летательного аппарата (ЛА) и учитывающей геодезические данные последних лет о параметрах Земли.

Для достижения поставленной в работе цели были решены следующие задачи:

1) выполнены обзор и анализ существующих и широко используемых в задачах баллистики гравитационных моделей;

2) создана математической модели движения ЛА с использованием следующих гравитационных моделей:

- сферической модели с центральным гравитационным полем;
- гравитационной модели ПЗ-90;
- нормальной «по Красовскому» модели;

3) оценены погрешности вычисления ускорения силы тяжести по полученным моделям гравитационного поля, выполнены их анализ и сравнение.

Возможность использования перечисленных моделей достигается путем решения проблемы Стокса для земного эллипсоида. Из теоремы Стокса следует принципиальная возможность определения потенциала силы тяжести, если известны форма уровенной поверхности, общая масса тела и угловая скорость вращения. Само решение проблемы Стокса заключается в определении функций, удовлетворяющих общим свойствам потенциальных функций, которые позволят определить значение силы тяжести как во внешнем пространстве, так и на поверхности эллипсоида [3]. Доказательство теоремы приведено в [4].

Общеземной эллипсоид по параметрам Земли 1990 г. По аналогии вращения Земли вокруг своей оси в качестве модели, описывающей форму земной поверхности, рассматривается эллипсоид. В модели ПЗ-90 в качестве независимых параметров, однозначно определяющих фигуру общеземного эллипсоида и нормальное гравитационное поле Земли, выбраны следующие геодезические постоянные: геоцентрическая гравитационная постоянная с учетом атмосферы ($fM = 398\,600,4418 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$), угловая скорость вращения Земли ($\omega = 7,292\,115 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}$). Большая полуось общеземного эллипсоида ($a = 6\,378\,136 \text{ м}$) и сжатие общеземного эллипсоида ($\alpha = 1 / 298,257\,84$) [5].

Геодезические постоянные, характеризующие геометрические и физические особенности Земли в целом, вычислены с использованием значений фундаментальных геодезических постоянных: ускорение нормальной силы тяжести на экваторе и на полюсе общеземного эллипсоида (ОЗЭ) $\gamma_a = 62\,636\,861,4 \text{ мГал}$, $\gamma_b = 983\,218,8 \text{ мГал}$, коэффициенты в формуле ускорения нормальной силы тяжести $\beta = 0,005\,302\,4$, $\beta_1 = 0,000\,005\,8$. Среднеквадратичная погрешность определения взаимного положения пунктов на ОЗЭ составляет $0,005 \dots 0,010 \text{ м}$ [5].

Гравитационный потенциал можно представить в виде бесконечного ряда так называемых сферических функций. Он описывается следующей формулой:

$$W = \frac{fM}{\rho} - \frac{fM}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n J_n^0 P_n(\sin \varphi) + \frac{fM}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(\sin \varphi) (A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda) + \frac{\Omega^2}{2} \rho^2 \cos \varphi. \quad (1)$$

где $f = (6,67 \pm 0,01) \cdot 10^{-11}$ — гравитационная постоянная $\text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$; M — масса Земли, кг; ρ — радиус-вектор рассматриваемой точки, м; a — большая полуось, м; $n = 2 \dots \infty$ — индекс суммирования (порядок присоединённых функций Лежандра); $m = 0 \dots n$ — индекс суммирования (индекс присоединённых функ-

ций Лежандра); φ — геоцентрическая широта рассматриваемой точки, рад; J_n^0 — зональные гармоники (A_n^0); $P_n(\sin \varphi) = P_{n0}(\sin \varphi)$ — главные сферические функции (основные многочлены Лежандра); $P_n^m(\sin \varphi)$ — присоединенные сферические функции порядка n с индексом m ; λ — геоцентрическая долгота рассматриваемой точки, рад; A_n^m — тессеральные гармоники порядка n с индексом m , B_n^m — секторальные гармоники порядка n с индексом m ; $\Omega_3 = 7,292 \cdot 10^{-5}$ — угловая скорость вращения Земли, c^{-1} .

Такое представление функции на сфере аналогично разложению в ряд Фурье для одномерных функций. Коэффициентами разложения в данном случае являются $P_n^m(\sin \varphi)$ — полностью нормированные полиномы Лежандра степени n и порядка m . Их подробное определение дано в [1, 4].

Проанализируем слагаемые формулы (1). Первое представляет собой потенциальное поле сферы. Второе слагаемое, зависящее только от широты, вносит поправку на эллиптичность и является регулярной функцией. Третье слагаемое, зависящее от широты и долготы, является нерегулярной функцией. Последнее слагаемое связано с влиянием центробежной силы.

Коэффициенты $P_n(\sin \varphi)$, A_n^m , B_n^m называют зональными, секторальными и тессеральными гармониками, они позволяют учитывать смешанные широтные и долготные аномалии [1]. Точность баллистических расчетов определяется типом используемых гармоник и количеством членов разложения.

В ходе вычисления зональных гравитационных моментов было выявлено, что одна из гармоник на 3 порядка больше остальных. Это послужило причиной, по которой гравитационный потенциал стали разделять на нормальный, который описывается достаточно простыми элементарными функциями, и аномальный, которых не может быть точно вычислен, а может быть с достаточной точностью оценен при учете как можно большего числа членов разложения.

Согласно теории инерциальной навигации [6], ускорение свободного падения на поверхности ОЗЭ вычисляется как производная потенциальных функций нормального и аномального гравитационных полей:

$$g_0 = \gamma_0 + \Delta g,$$

где γ_0 — ускорение нормальной силы тяжести, определяемая нормальным потенциалом ОЗЭ; Δg — поправка к нормальной силе тяжести, характеризующая аномальное гравитационное поле Земли.

С достаточной для баллистических расчетов точностью ускорение нормальной силы тяжести можно представить в виде [5]:

$$\gamma_0(B, H) \cong \gamma_0(B, H_{=0})(1 + f_1 H + f_2 H \sin^2 \beta + f_3 H^2) + \delta \gamma_a;$$

где B — геодезическая широта, рад; H — геодезическая высота, м; $\gamma_0(B, H_{=0})$ — ускорение нормальной силы тяжести при нулевой геодезической высоте,

$$\gamma_0(B, H_{=0}) = \gamma_a(1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B); \quad (2)$$

вспомогательные коэффициенты:

$$f_1 = -\frac{2}{\alpha}(1 + \alpha + m); \quad f_2 = \frac{4}{a}\alpha; \quad f_3 = \frac{3}{\alpha^2};$$

$$m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_a}; \quad \beta = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}; \quad \beta_1 = \frac{\alpha\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{8};$$

$\delta\gamma_a$ — поправка в ускорение нормальной силы тяжести за притяжение атмосферы на уровне моря, мГал:

$$\delta\gamma_a = -0,87e^{-0,116H^{1,047}}.$$

Формула (2) носит название уравнения Клеро [4], формулы Пицетти — Сомильяна [4, 7, 8] или уточненной формулы Клеро [8].

В качестве модели аномального ГПЗ используется модель в виде потенциала притяжения 60 точечных масс (ТМ-60), которая получена аппроксимацией возмущающего потенциала, соответствующего модели ПЗ-2002/70с до 36-й степени [5].

Значение возмущающего потенциала на поверхности Земли и в любой точке внешнего пространства определяют по формуле

$$T = fM \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i}{r_i},$$

где N — количество точечных масс; ε_i — значение точечной массы, выраженное в единицах массы Земли M ($\varepsilon_i = \frac{m_i}{M}$); r_i — расстояние между i -й точечной массой и заданной точкой, м.

Смешанную аномалию силы тяжести Δg вычисляют в сферическом приближении:

$$\Delta g(\rho, \varphi, \lambda) \cong fM \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{R^2 - \rho_i^2 - 3r_i^2}{2Rr_i^3},$$

где ρ, φ, λ — сферические геоцентрические координаты заданной точки; $\rho_i, \varphi_i, \lambda_i$ — сферические геоцентрические координаты i -й точечной массы; R — средний радиус Земли ($R = 6\,371\,000$ м); r_i — расстояние от i -й точечной массы до заданной точки с координатами ρ, φ, λ ,

$$r_i = \sqrt{\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos \psi};$$

$$\cos \psi = \sin \varphi_i \sin \varphi + \cos \varphi_i \cos \varphi \cos(\lambda_i - \lambda).$$

Характеристики гравитационной модели ПЗ-90 представлены для геоцентрической системы координат (СК) $O_{ПЗ}X_{ПЗ}Y_{ПЗ}Z_{ПЗ}$ [9]. Эта и другие СК, используемые в модели, изображены на рис. 1.

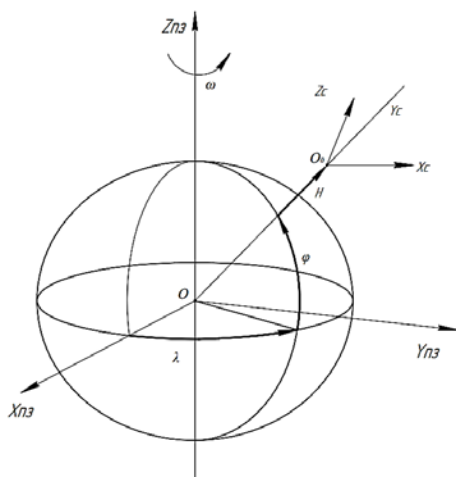


Рис. 1. Системы координат, используемые в модели:

$O_0X_cY_cZ_c$ — стартовая; $OX_{ПЗ}Y_{ПЗ}Z_{ПЗ}$ — сферическая земная; φ, λ — географическая широта и долгота ЛА; H — высота полета над поверхностью ОЗЭ

Для того чтобы записать проекции ускорения свободного падения на оси стартовой СК (СтСК), необходимо воспользоваться следующими соотношениями [6, 10]:

$$\begin{cases} g_{x_c} = \Omega_3^2 \left[H \cos \varphi + r'_p \cos \varphi' \left(1 - \frac{r_p'^2}{r_p^2} \right) \right] \sin \varphi; \\ g_{y_c} = g_0 \frac{r_p'}{r_p} - \Omega_3^2 \left[H \cos \varphi + r'_p \cos \varphi' \left(1 - \frac{r_p'^2}{r_p^2} \right) \right] \cos \varphi; \\ g_{z_c} = \sqrt{g_0 \frac{r_p'^4}{r_p^4} + \Omega_3^4 (r'_p + H)^2 + 2\Omega_3^2 g_0 \frac{r_p'^2}{(R_3^2 + H)} (r'_p + H) - g_0^2}, \end{cases}$$

где r_p — модуль радиус-вектора, проведенного в рассматриваемую точку, расположенную на высоте H над поверхностью эллипсоида, м; r_p' — модуль радиус-вектора, проведенного из геометрического центра сфероида в точку P' , м; g_0 — модуль вектора сил ньютоновского тяготения Земли; φ' — геоцентрическая широта рассматриваемой точки.

Связь между геоцентрической и географической широтами имеет вид

$$\operatorname{tg} \varphi' = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi.$$

Радиус-векторы r_p и r_p' определяются соотношениями

$$r_p' = \sqrt{\frac{a^2(1 - e^2)}{\sin^2 \varphi' + (1 - e^2) \cos^2 \varphi'}};$$

$$r_p^2 = r_p'^2 + H^2 + 2r_p'H \cos(\varphi - \varphi').$$

Нормальная «по Красовскому» модель. Константы, принятые в гравитационной модели эллипсоида Красовского: угловая скорость вращения Земли ($\omega = 7,292\ 116 \cdot 10^{-5}$ рад/с), большая полуось эллипсоида Красовского ($a = 6\ 378\ 245$ м), ускорение силы тяжести на экваторе ($g_e = 9,780\ 49$ м/с²).

Среднеквадратичное отклонение поверхности эллипсоида Красовского от поверхности геоида не превышает 40 м, а максимальные отклонения составляют не более 150 м [11].

Напряженность регуляризованного поля тяготения Земли в данной модели определяется в проекциях на оси геоцентрической сопровождающей системы координат (правой ортогональной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$) и на оси географической сопровождающей системы координат (правой ортогональной системы координат $Ox_2y_2z_2$) (рис. 2).

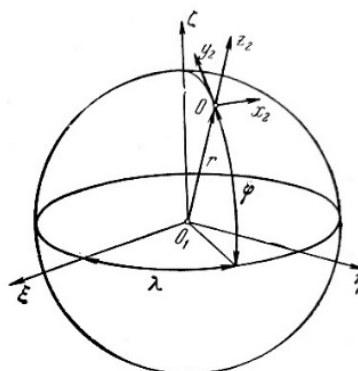


Рис. 2. Системы координат, используемые в модели

Географическая сопровождающая система координат (ГССК) — СК с началом в центре масс ЛА (O) и осями $OY_{ГС}$ (направлена вдоль местной вертикали), $Ox_{ГС}$ (лежит в плоскости горизонта и направлена по касательной к местному меридиану на север), $Oz_{ГС}$ (направлена по касательной к местной параллели на Восток).

Геоцентрическая сопровождающая система координат (ГцССК) — СК с началом в центре масс Земли и осями $OY_{ГС}$ (направлена вдоль радиус-вектора, соединяющего геометрический центр Земли и точку вблизи поверхности Земли), $Ox_{ГС}$ (лежит в плоскости меридиана и направлена к северному полушарию), $Oz_{ГС}$ (дополняет систему до правой тройки векторов).

Для определения проекций полного вектора гравитационного ускорения на оси выбранных СК необходимо определить следующие функции [12].

Первый (e) и второй (e_2) эксцентриситеты эллипсоида Красовского

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; \quad e_2 = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

где a, b — большая и малая полуоси эллипсоида соответственно, м.

Основные сфероидические функции ($W_{гд}$ — первая основная сфероидическая геодезическая функция, $V_{гд}$ — вторая основная сфероидическая геодезическая функция):

$$W_{\text{гд}} = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}; \quad V_{\text{гд}} = \sqrt{1 + e_2^2 \cos^2 B}.$$

Главные радиусы кривизны поверхности эллипсоида вращения

$$R_{\varphi} = \frac{a(1 - e^2)}{W_{\text{гд}}^3}; \quad R_{\lambda} = \frac{a}{W_{\text{гд}}}.$$

Геодезический радиус-вектор положения центра масс ЛА в ГцССК

$$r_{\text{гд}} = \sqrt{(R_{\lambda} + H)^2 \cos^2 B + (R_{\lambda}(1 - e^2) + H)^2 \sin^2 B}.$$

Приведенная геодезическая широта ($u_{\text{гд}}$) и гравитационная геоцентрическая широта ($\varphi_{\text{гр}}$)

$$u_{\text{гд}} = \text{arctg}\left(\frac{a}{b} \text{tg} B\right); \quad \varphi_{\text{гр}} = \text{arctg}\left(\frac{b}{a} \text{tg} B\right).$$

Второй гравитационный эксцентриситет эллипсоида Клеро

$$l_{\text{гр}} = \sqrt{\frac{e^2}{1 - e^2}}.$$

Второй гравитационный эксцентриситет софокусного эллипсоида Клеро

$$l_{1\text{гр}} = \sqrt{\frac{2(a^2 - b^2)}{(r_{\text{гд}}^2 - (a^2 - b^2)) + \sqrt{r_{\text{гд}}^4 + (a^2 - b^2)^2 - 2r_{\text{гд}}^2(a^2 - b^2)\cos\varphi_{\text{гр}}}}}.$$

Произведение плотности Земли $D = 5,52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ и гравитационной постоянной Земли $\mu_{\text{гр}} = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$

$$D\mu_{\text{гр}} = \frac{\Omega_3^2 l_{\text{гр}}^3}{2\pi((3 + l_{\text{гр}}^2)\text{arctg}(l_{\text{гр}}) - 3l_{\text{гр}})}.$$

Коэффициент напряженности поля тяготения внутри эллипсоида

$$P_{0\text{гр}} = 2\pi B\mu_{\text{гр}} \frac{1 + l_{\text{гр}}^2}{l_{\text{гр}}^2} \left(\text{arctg} l_{\text{гр}} - \frac{l_{\text{гр}}}{1 + l_{\text{гр}}^2} \right).$$

Вспомогательный коэффициент в выражении для потенциальной функции тяготения

$$C_{\text{гр}} = \frac{g_e + \Omega_3^2 a - P_{0\text{гр}} a}{2\pi D\mu_{\text{гр}} a}.$$

Относительное смещение софокусных эллипсоидов

$$v_{\text{гп}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{l_{\text{гп}}^2} - b^2.$$

Отношение центростремительной силы, возникающей вследствие вращения Земли, к силе тяжести на экваторе

$$q_{\text{гп}} = \frac{\Omega_3^2 a}{g_e}.$$

Проекции на оси $OY_{\text{ГЦС}}$ и $OZ_{\text{ГЦС}}$ могут быть разложены в достаточно быстро сходящиеся ряды по степеням эксцентриситета. Высокая скорость сходимости обусловлена малостью эксцентриситета Земли e . При разложении с точностью до четвертой степени аналитические выражения проекций вектора напряженности поля тяготения Земли на оси ГЦССК приобретают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_{OX_{\text{ГЦС}}} = \frac{g_e}{2} (q_{\text{гп}} - e^2) \left(\frac{a}{b}\right)^4 \sin 2\varphi_{\text{гп}} \left(1 + e^2 \frac{7e^2 - 30q_{\text{гп}}}{14(q_{\text{гп}} - e^2)}\right) \times \\ \times \left(1 + \left(\frac{-21e^2 + 30q_{\text{гп}}}{14(q_{\text{гп}} - e^2)} + \sin^2 \varphi_{\text{гп}} \frac{7e^2 - 10q_{\text{гп}}}{2(q_{\text{гп}} - e^2)}\right) e^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2\right); \\ F'_{OY_{\text{ГЦС}}} = -g_e \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} + q_{\text{гп}} \left(\frac{3}{2} - \frac{15}{28} e^2\right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + q_{\text{гп}} \left(\frac{3}{2} - \frac{15}{28} e^2\right) - \sin^2 \varphi_{\text{гп}}\right) \left(\frac{3e^2}{2} - \frac{3e^4}{4} + q_{\text{гп}} \left(-\frac{3}{2} - \frac{45}{14} e^2\right)\right) \right) \left(\frac{a}{b}\right)^2; \\ F'_{OZ_{\text{ГЦС}}} = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Относительная погрешность при вычислении вектора напряженности поля тяготения Земли по упрощенным формулам в процентах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta F_{OX_{\text{ГЦС}}} = \frac{F_{OX_{\text{ГЦС}}} - F'_{OX_{\text{ГЦС}}}}{F_{OX_{\text{ГЦС}}}} \cdot 100 \% = 0,005\ 362\ 62 \% ; \\ \Delta F_{OY_{\text{ГЦС}}} = \frac{F_{OY_{\text{ГЦС}}} - F'_{OY_{\text{ГЦС}}}}{F_{OY_{\text{ГЦС}}}} \cdot 100 \% = 0,000\ 487\ 852 \% . \end{array} \right.$$

Система (3) в проекциях на оси ГССК:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{OX_{\text{ГСС}}} = F'_{OX_{\text{ГЦС}}} \cos(B - \varphi_{\text{гп}}) - F'_{OY_{\text{ГЦС}}} \sin(B - \varphi_{\text{гп}}); \\ F_{OY_{\text{ГСС}}} = F'_{OX_{\text{ГЦС}}} \sin(B - \varphi_{\text{гп}}) + F'_{OY_{\text{ГЦС}}} \cos(B - \varphi_{\text{гп}}); \\ F_{OZ_{\text{ГСС}}} = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Для перехода в СтСК необходимо вектор (4) умножить справа на матрицу перехода от ГССК к СтСК [9].

Модель сферической Земли с центральным гравитационным полем. При составлении математической модели движения ЛА, описывающей пространственную траекторию применительно к сферической модели Земли, ускорение свободного падения в первом приближении представляют направленным к центру Земли и изменяющимся по закону

$$g = g_0 \left(\frac{R_3}{r} \right)^2.$$

После разложения в ряд с последующим отбрасыванием членов ускорение можно переписать в виде

$$g(h) \approx g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R_e} \right),$$

где второе слагаемое называется поправкой за свободный воздух и представляет собой величину, которую необходимо скорректировать, чтобы привести измеренные значения к поверхности геоида.

В данной задаче в качестве радиуса Земли примем значение среднего радиуса эллипсоида Бесселя, равного 6 370 291,091 м [2]. В проекциях на оси прямоугольной СтСК выражения для вычисления вектора напряженности поля тяготения примут вид

$$\begin{cases} g_{x_c} = g_0 \sin \gamma; \\ g_{y_c} = g_0 \cos \gamma; \\ g_{z_c} = 0, \end{cases}$$

где

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y + R_3} \right).$$

Ускорение g_0 рассчитывают согласно выражению

$$g_0 = g_{0_0} (1 + \sin^2 \beta), \quad (5)$$

где $g_{0_0} = 9,780\,34 \text{ м/с}^2$ — значение ускорения свободного падения на экваторе; $\beta = 0,005\,280\,01$ — коэффициент Клеро [13].

Как видно, формула (5) во многом напоминает формулу (2). Дело в том, что сферическая модель Земли возникла много раньше, ПЗ-90 в связи с чем формула (5) является первым аналогом формулы Клеро. Отличие заключается в том, что в формуле (2) последнее слагаемое учитывает дополнительную гармонику

четвертого порядка. В данных коэффициентах учтены два фактора: центробежный эффект и эффект перетекания масс от полюсов к экватору из-за действия центробежных сил.

Связь между указанными в модели системами координат показана на рис. 3.

Формирование математической модели. Для анализа влияния гравитационной модели на траекторию ЛА рассмотрим математическую модель пространственного управляемого движения боевой ракеты класса «поверхность — поверхность».

Летательный аппарат рассматривается как абсолютно жесткое тело с неизменной массой $m = 1500$ кг и моментами инерции относительно трех координатных осей связанной системы координат: $I_x = 200$ кг/м², $I_y = 780$ кг/м², $I_z = 780$ кг/м². Геометрические размеры: $d_m = 0,95$ м, $L_{хар} = 7$ м. Координаты точки старта в системе координат Гаусса — Крюгера: $X_1 = 5\,405\,000$ м; $Y_1 = 8\,596\,000$ м; $H = 0$ м.

В процессе формирования исходной математической модели пространственного движения ЛА решение задачи навигации производится в выбранной за базовую СК, в качестве которой используется СтСК $O_0X_cY_cZ_c$ [9]. Считается, что полет ЛА проходит в стандартной (ГОСТ 4401–81 «Атмосфера стандартная. Параметры») атмосфере, при полном безветрии. Вращение Земли учитывается.

Траектории ЛА на пассивном участке траектории при использовании различных гравитационных моделей представлены на рис. 4, 5.

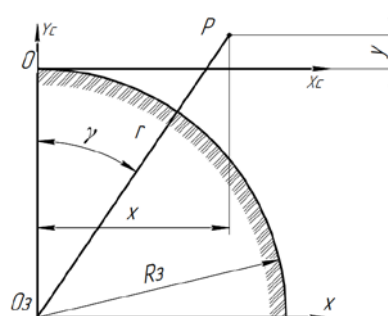


Рис. 3. Сферическая модель (γ — угол поворота радиус-вектора в СтСК $O_0X_cY_cZ_c$)

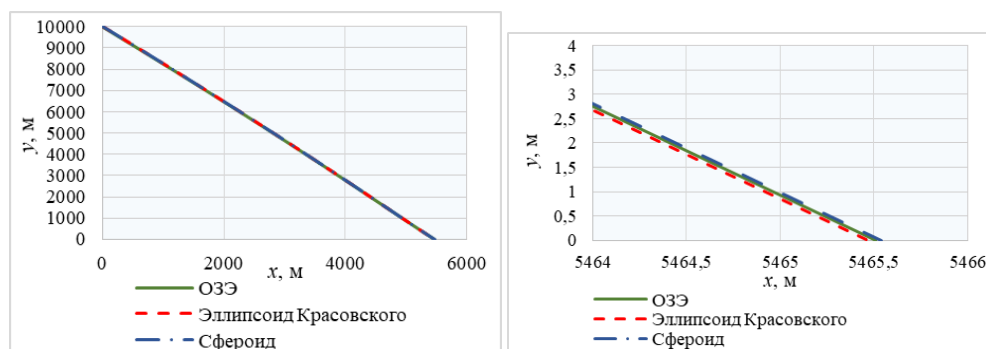


Рис. 4. Траектория ЛА в СтСК в вертикальной плоскости при использовании различных гравитационных моделей (справа в увеличенном масштабе в окрестности точки падения)

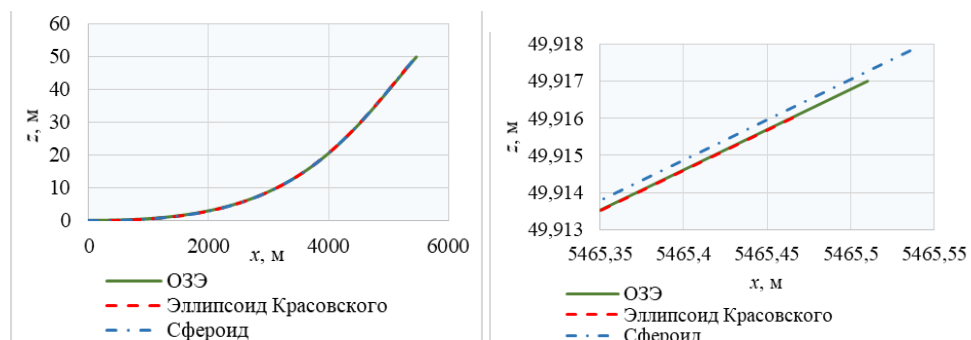


Рис. 5. Траектории ЛА в СтСК в горизонтальной плоскости при использовании различных гравитационных моделей (справа в увеличенном масштабе в окрестности точки падения)

На рис. 4, 5 видно, что координаты точки падения различаются при использовании той или иной модели. Это имеет большое значение при расчете промаха ракеты относительно точки прицеливания и построении зоны поражения. Поэтому были определены зоны поражения для рассматриваемой ракеты в зависимости от используемой гравитационной модели (рис. 6).

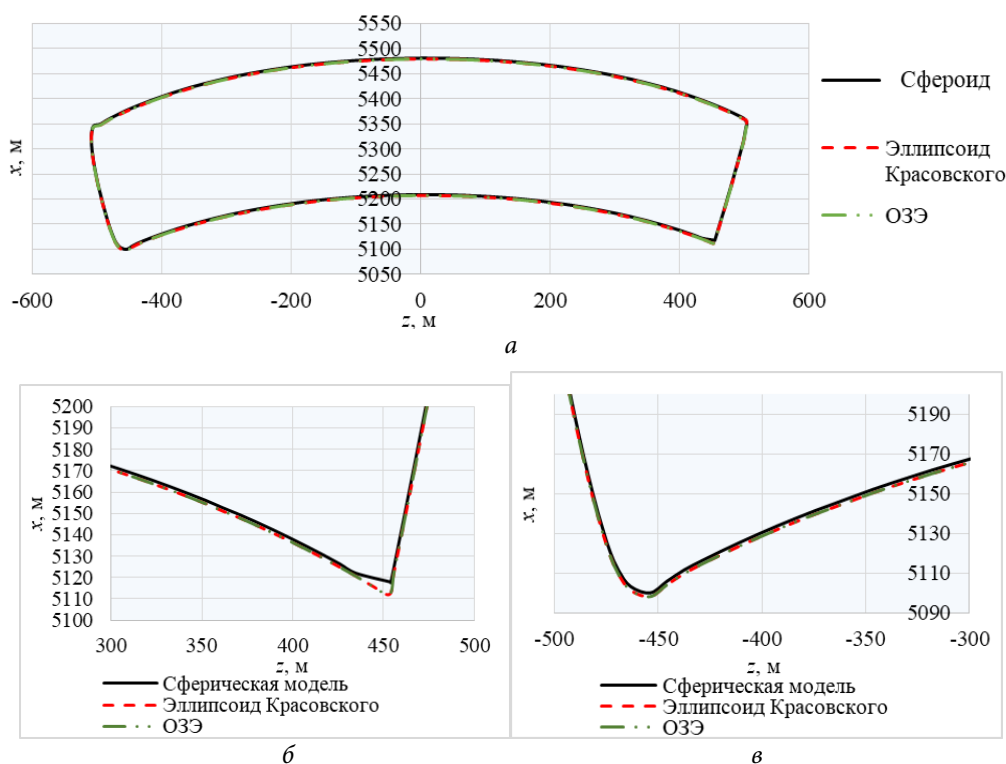


Рис. 6. Зоны поражения ракеты при использовании различных гравитационных моделей:

- a* — зоны поражения, рассчитанные согласно трем гравитационным моделям;
- б* — нижняя правая часть зон поражения в увеличенном масштабе;
- в* — нижняя левая часть зон поражения в увеличенном масштабе

На рис.4, 5 видно, что траектории движения ЛА при использовании гравитационных моделей ПЗ-90 и эллипсоида Красовского одинаковы практически на всем протяжении полета. Координаты точек падения совпадают с точностью до 0,000 1 %. Параметры траектории и координаты точки падения при использовании сферической модели Земли совпадают с параметрами траектории и координатами точки падения при использовании гравитационной модели ПЗ-90 с точностью до 0,0013 %. В рамках рассматриваемой задачи такое рассогласование моделей не вносит существенной погрешности в расчет траектории движения, однако их важность будет зависеть от того, где находится точка падения: внутри или вне зоны поражения. К примеру, на границах зоны значение промаха может достигать нескольких метров (см. рис. 6).

Выводы. Проанализировав полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

1) при составлении математических моделей движения ЛА различных классов рекомендуется анализировать целесообразность учета факторов и вносимую ими погрешность, чтобы достигнуть максимальной точности, не нарушая оперативности расчетов;

2) для предварительных расчетов полета баллистических ракет на активном участке траектории рекомендуется использовать центральное гравитационное поле, которое обеспечивает оперативность расчета при сравнительно точных результатах;

3) для ракет тактического и оперативно-тактического назначения выбор гравитационной модели в расчете траектории движения не приводит к существенной погрешности, однако для ракет данного класса предъявляют высокие требования по точности, в связи с чем для высокоточных ракет класса «поверхность — поверхность» рекомендуется использовать гравитационную модель ПЗ-90 или модель Красовского;

4) для баллистических ракет, дальность действия которых превышает 5 500 км, на пассивном участке траектории рекомендуется использование гравитационной модели ПЗ-90, наиболее точным образом описывающей гравитационное поле Земли.

Литература

- [1] Лысенко Л.Н. Наведение и наведение и навигация баллистических ракет. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007.
- [2] Комаровский Ю.А. Использование различных референц-эллипсоидов в судовождении. Владивосток, ДВГМА, 2000.
- [3] Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М., Наука, 1966.
- [4] Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. М., Физматлит, 1963.
- [5] Специализированный справочник «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11). М., Военно-топографическое управление ГШ ВС РФ, 2020.
- [6] Захарин М.И., Захарин Ф.М. Кинематика инерциальных систем навигации. М., Машиностроение, 1968.

-
- [7] Анучин О.Н., Емельянцева Г.И. Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов. СПб., ЦНИИ Электроприбор, 1999.
- [8] Грушинский Н.П. Определение силы тяжести на море. М., Недра, 1970.
- [9] ГОСТ 20058-80. Динамика ЛА в атмосфере. Термины, определения и обозначения. М., Изд-во стандартов, 1981.
- [10] Колесникова Д.С. Аномалии гравитационного поля земли в прикладных задачах баллистики. *Политехнический молодежный журнал*, 2021, № 6. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2021-06-709>
- [11] Демин В.М. Теория и практика применения карт в авиации. М., Машиностроение, 1969.
- [12] Зданович В.Г., ред. Высшая геодезия. М., Недра, 1970.
- [13] Черноботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики. М., Наука, 1965.

Колесникова Дарья Сергеевна — студентка кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Клишин Алексей Николаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Колесникова Д.С. Особенности использования гравитационных моделей земли в прикладных задачах баллистики. *Политехнический молодежный журнал*, 2021, № 09(62). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2021-09-737>

FEATURES OF THE USE OF EARTH'S GRAVITY MODELS IN APPLIED PROBLEMS OF BALLISTICS

D.S. Kolesnikova

kolesnikovads@student.bmstu.ru

SPIN-code: 9804-9257

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The author considered various gravitational models used in calculating the trajectories of movement of flying vehicles. A comparative analysis is carried out of approaches to determining the full vector of the gravitational field strength corresponding to various models approximating the Earth's surface: a sphere, Krasovsky's biaxial ellipsoid, and a common terrestrial ellipsoid. Mathematical models are proposed for calculating the acceleration of gravity according to the three considered methods. A mathematical model of the movement of a "surface-to-surface" class aircraft has been formed, which makes it possible to estimate the accuracy of hitting the area of the specified target for various gravity models. The estimation of methodological errors of the Earth models is carried out. Recommendations on the appropriateness of using a particular model are formulated.

Keywords

Total vector of gravitational field strength, anomalous gravitational field, general terrestrial ellipsoid, Krasovsky ellipsoid, Cleraud ellipsoid, model of the Earth's figure, mathematical modeling, trajectory of an aircraft

Received 23.08.2021

© Bauman Moscow State Technical University, 2021

References

- [1] Lysenko L.N. Navedenie i navedenie i navigatsiya ballisticheskikh raket [Guidance and navigation of ballistic missiles]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2007 (in Russ.).
- [2] Komarovskiy Yu.A. Ispol'zovanie razlichnykh referents-ellipsoidov v sudovozhdenii [Using different reference-ellipsoids in ship navigation]. Vladivostok, DVGMA Publ., 2000 (in Russ.).
- [3] Andreev V.D. Teoriya inertial'noy navigatsii. Avtonomnye sistemy [Theory of inertial navigation. Autonomous systems]. Moscow, Nauka Publ., 1966 (in Russ.).
- [4] Grushinskiy N.P. Teoriya figury Zemli [Theory of Earth figure]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1963 (in Russ.).
- [5] Spetsializirovannyi spravochnik «Parametry Zemli 1990 goda» (PZ-90.11) [Specialized guidebook "Earth parameters of 1990 (PZ-90.11)"]. Moscow, Voenno-topograficheskoe upravlenie GSh VS RF Publ., 2020. (in Russ.).
- [6] Zakharin M.I., Zakharin F.M. Kinematika inertial'nykh sistem navigatsii [Kinematics of inertial navigation systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968 (in Russ.).
- [7] Anuchin O.N., Emel'yantsev G.I. Integrirovannyye sistemy orientatsii i navigatsii dlya morskikh podvizhnykh ob"ektov [Integrated orientation and navigation systems for marine moving objects]. Sankt-Petersburg, TsNII Elektropribor Publ., 1999 (in Russ.).
- [8] Grushinskiy N.P. Opredelenie sily tyazhesti na more [Determination of gravity force on the sea]. Moscow, Nedra Publ., 1970 (in Russ.).

- [9] GOST 20058-80. Dinamika LA v atmosfere. Terminy, opredeleniya i oboznacheniya [State standard 20058-80. Aircraft dynamics in atmosphere. Terms, definitions and symbols]. Moscow, Izd-vo standartov Publ., 1981 (in Russ.).
- [10] Kolesnikova D.S. Anomalies of the Earth's gravitational field in applied problems of ballistics. *Politekhnicheskiiy molodezhnyy zhurnal* [Politechnical Student Journal], 2021, № 6. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2021-06-709> (in Russ.).
- [11] Demin V.M. Teoriya i praktika primeneniya kart v aviatsii [Theory and practice of using maps in aviation]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1969 (in Russ.).
- [12] Zdanovich V.G., ed. Vysshaya geodeziya [Higher geodesy]. Moscow, Nedra Publ., 1970 (in Russ.).
- [13] Chernobotarev G.A. Analiticheskie i chislennyye metody nebesnoy mekhaniki [Analytical and numerical methods of celestial mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1965 (in Russ.).

Kolesnikova D.S. — Student, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Klishin A.N., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:

Kolesnikova D.S. Features of the use of Earth's gravity models in applied problems of ballistics. *Politekhnicheskiiy molodezhnyy zhurnal* [Politechnical student journal], 2021, no. 09(62). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2021-09-737.html> (in Russ.).