УДК 519.8 DOI: 10.18698/2541-8009-2017-4-74

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ: ЗАДАЧА О ДОСТИЖЕНИИ МНОЖЕСТВА

Р.Ю. Крысяев roman-krysyaev@yandex.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Работа посвящена задаче о достижении случайно блуждающей частицей некоторого множества. Рассмотрены определение случайного блуждания как марковского случайного процесса и характеристики траекторий функционалов случайных блужданий. Представлены стационарное распределение и предельные характеристики случайного блуждания. Поставлена задача о достижении множества. Решена задача о достижении горизонтальной прямой. Найдено выражение для поиска вероятности попадания во множество. Описано предельное поведение координаты попадания, плотность распределения которой стремится к плотности распределения Стьюдента. Представлены результаты распределения момента первого попадания во множество. Получено выражение для «нормы» марковского оператора. Дана оценка момента времени первого попадания в предельном случае

Ключевые слова

Марковские процессы, случайные блуждания, траектории блуждания, стационарное распределение, предельные характеристики, функциональное уравнение, распределение Стьюдента, линейный оператор

Поступила в редакцию 16.03.2017

В рамках исследования модели случайного блуждания особый интерес представляет задача о достижении множества. Наиболее показательными в данном случае являются примеры блуждания на плоскости и задача о достижении множества, лежащего не ниже горизонтальной прямой.

Основные понятия и формулы. Рассмотрим случайное блуждание как марковский случайный процесс [1], при котором некоторый случайный объект меняется с течением времени k, $\xi = \xi(k)$ блуждания частицы с конечным или счетным числом возможных состояний, когда поведение системы до какого-либо момента времени t и при известном состоянии $x = \xi(t)$ не зависит от ее поведения до этого момента. Точки множества $X,$ на котором происходит случайное блуждание, в данном случае представляют собой различные состояния системы.

Итак, дано случайное блуждание $\left\{\xi_k : \xi_0 = x_0, \xi_1 = x_1, ..., k = 0,1,2,...\right\}$ на конечном либо счетном множестве $X = \left\{1,2,...,N\right\}$, также называемом пространством состояний случайного блуждания. Блуждание задается вероятностью перехода системы из состояния x в состояние y за один шаг [2]:

$$q\left(x \mid y\right) = q\left(x, y\right) = P\left\{\xi_{n+1} = y \mid \xi_n = x\right\}$$

и распределением случайной точки ξ_0, т. е. $p_0 = P\{\xi_0 = x\}$. Таким образом, случайный процесс $\{\xi_k, k \geq 0\}$ полностью определен. Наиболее важным является случай, когда функция $p_0(x)$ имеет вид:

$$p_0(x) = \begin{cases} 0, x \neq a; \\ 1, x = a. \end{cases}$$

Пусть $C(x), x \in X$ — линейное пространство функций [2] с «нормой», тогда

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)| = \max_{1 \leq i \leq N} |f_i|. \quad (1)$$

Согласно [2], обозначим линейный оператор Q, также называемый марковским оператором и действующий в пространстве функций, как

$$(Qf)(x) = \sum_{y \in X} q(x \mid y) f(y), f \in C(x).$$

Далее найдем его «норму»:

$$\|Q\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Qf\|}{\|f\|}, \quad f \in C(x), \quad x \in X.$$

Используя (1), получим

$$\|Q\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\max\limits_{1 \leq i \leq N} \left| \sum\limits_{j=1}^{N} q_{ij} f_j \right|}{\max\limits_{1 \leq i \leq N} |f_i|} \leq \max_{1 \leq i \leq N} \frac{\max\limits_{1 \leq j \leq N} |f_j| \left| \sum\limits_{j=1}^{N} q_{ij} \right|}{\max\limits_{1 \leq i \leq N} |f_i|} = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^{N} q_{ij} \right| = 1. \quad (2)$$

Очевидно, что

$$(Qf)(x) = \mathrm{M}\left(f(\xi_k) \mid \xi_{k-1} = x\right), k = 1, 2, ..., x \in X.$$

Запишем функцию $f(x)$ в виде $f = \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(N) \end{pmatrix}$. Отсюда следует, что пространство C можно отождествить с R^N. Определим скалярное произведение функций f и g:

$$(f, g) = \sum_{1 \leq i \leq N} f_i g_i.$$

Распределение вероятностей точки $\xi_k, k \geq 0,$ запишем в виде $p_k = \left(p(1), ..., p(N)\right)$.

Введем матрицу переходных вероятностей

$$Q = \begin{pmatrix} q(1|1) & \cdots & q(1|N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q(N|1) & \cdots & q(N|N) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, действие оператора Q сводится к произведению матрицы переходных вероятностей Q и вектора значений функции f.

Характеристики функционалов траекторий случайного блуждания. Пусть P_n — распределение вероятностей случайной точки ξ_n из марковской цепи $\xi_0, \xi_1, \ldots$; тогда p_n — вектор-строка вида $p_n = (p_n(1), \ldots, p_n(N))$, где $p_n(y) = P\{\xi_n = y\}, y \in \{1, \ldots, N\} = X$.

Выразим p_n через p_0 и Q. Согласно формуле полной вероятности,

$$p_n(y) = \{\xi_n = y\} = \sum_{x \in X} P\{\xi_{n-1} = x\} P\{\xi_n = y \mid \xi_{n-1} = x\} = \sum_{x \in X} p_{n-1}(x) q(x, y) = \sum_{x=1}^{N} p_{n-1}(x) q(x, y).$$

Последняя часть выражения аналогична произведению строки и матрицы:

$$p_n = p_{n-1} Q.$$

Отсюда получим распределение случайной точки $\xi_n : p_n = p_0 Q^n, n = 1, 2, \ldots$.

Для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_r), x_i \in X$. Найдем

$$\mathrm{M} f(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_{k+r}) = \sum_{x_0, \ldots, x_{k+r}} p_0(x_0) q(x_0, x_1) \ldots q(x_{k+r-1}, x_{k+r}) f(x_{k+1}, \ldots, x_{k+r}).$$

Каждая переменная x_i принимает все значения из множества $X = \{1, \ldots, N\}$. Просуммируем по $x_{k+1}, \ldots, x_{k+r}$ при фиксированных $x_0, \ldots, x_k$. Выделив из выражения, стоящего под знаком суммы, слагаемые, содержащие $x_{k+1}, \ldots, x_{k+r}$, получаем

$$\sum_{x_{k+1} \ldots, x_{k+r}} q(x_k, x_{k+1}) \ldots q(x_{k+r-1}, x_{k+r}) f(x_{k+1}, \ldots, x_{k+r}).$$

Введем оператор $Q_r : C_r(X) \to C(X)$, где $C_r(X)$ — пространство функций $f(x_1, \ldots, x_r)$.

$$(Q_r f)(x) = \sum_{x_i \in X} q(x, x_1) q(x_1, x_2) \ldots q(x_{r-1}, x_r) f(x_1, \ldots, x_r).$$

Очевидно, что

$$(Q_r f)(x) = \mathrm{M}\left(f(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_{k+r}) \mid \xi_k = x\right), k = 0, 1, 2, \ldots, x \in X.$$

Можно заметить, что $(Q_r f)(x_k)$ присутствует в выражении $\mathrm{M}f\left(\xi_{k+1},\ldots,\xi_{k+r}\right)$. Просуммировав по переменным $x_0, x_1,\ldots, x_k$, получим

$$\sum_{x_0,\ldots,x_k} p_0(x_0)q(x_0,x_1)\ldots q(x_{k-1},x_k)(Q_r f)(x_k).$$

Данное выражение представляет собой перемножение матриц, в итоге получаем

$$\mathrm{M}f\left(\xi_{k+1},\ldots,\xi_{k+r}\right)=p_0Q^k\left(Q_r f\right).$$

В частности, для функции одной переменной $\mathrm{M}f\left(\xi_{k+1}\right)=p_0Q^{k+1}f$. Для удобства, заменив $k+1$ на k, получаем

$$Mf\left(\xi_k\right)=p_0Q^k f\ .$$

В качестве первого примера рассмотрим некоторую подобласть $A\in X$ и для каждого момента времени $n=1,\ 2,\ldots$ введем случайную величину τ_n — время, в течение которого блуждающая частица находилась во множестве A от момента времени 1 до момента n. Иными словами, τ_n — количество тех номеров $k\in\{1,\ldots,n\}$, для которых $\xi_k\in A$. Нужно найти $\mathrm{M}\tau_n$. Для этого введем функцию-индикатор множества A

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1,\ x\in A;\\ 0,\ x\notin A.\end{cases}$$

Тогда $\tau_n=\sum_{i=1}^{n}\chi_A\left(\xi_i\right)$. Используя ранее полученную формулу для математического ожидания функции одной переменной, получим

$$\mathrm{M}\tau_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\chi_A\left(\xi_k\right)=p_0\sum_{k=1}^{n}Q^k\chi_A\ .$$

Окончательно запишем

$$\mathrm{M}\tau_n=p_0\left(\sum_{k=1}^{n}Q^k\right)\chi_A.$$

Рассмотрим более сложный пример. Например, множества $A\subset X$, $B\subset X$, $A\cap B\neq 0$ и введем случайную величину θ_n — количество переходов частицы из A в B за первые n шагов. Эта величина представляет собой количество тех номеров $k\in\{1,\ldots,n\}$, для которых $\xi_k\in A$, $\xi_{k+1}\in B$. Нужно найти $\mathrm{M}\theta_n$. Вводя функции-индикаторы $\chi_A(x)$ и $\chi_B(x)$, получим $\theta_n=\sum_{k=1}^{n}\chi_A\left(\xi_k\right)\chi_B\left(\xi_{k+1}\right)$, откуда

$$M\theta_n = \sum_{k=1}^{n} M\left(\chi_A\left(\xi_k\right)\chi_B\left(\xi_{k+1}\right)\right) = p_0 \sum_{k=0}^{n-1} Q^k Q_2\left(\chi_A\left(x_1\right)\chi_B\left(x_2\right)\right),$$

где $Q_2\left(\chi_A\left(x_1\right)\chi_B\left(x_2\right)\right)$ — оператор $Q_r f$, примененный к произведению функций $\chi_A\left(x_1\right)\chi_B\left(x_2\right)$ как к функции от двух аргументов.

$$Q_2\left(\chi_A\left(x_1\right)\chi_B\left(x_2\right)\right)\left(x\right) = \sum_{x_1, x_2} q\left(x_1 \mid x\right) q\left(x_2 \mid x\right)\chi_A\left(x_1\right)\chi_B\left(x_2\right) = \sum_{\substack{x_1 \in A \\ x_2 \in B}} q\left(x, x_1\right) q\left(x, x_2\right).$$

Стационарное распределение вероятностей. Рассмотрим случайное блуждание $\xi_0, \xi_1, \ldots$, задаваемое распределением p_0, $x \in X = \{1, \ldots, N\}$ и марковской матрицей $\{q(x, y)\}$. Распределение случайной точки $\xi_n, n \geq 1$ задается вектором $p_n = p_0 Q^n$. Распределение l называется стационарным [3], если все последующие распределения p_n совпадают с ним, т. е. все случайные точки ξ_n имеют одинаковое распределение. Следовательно, условие существования стационарного распределения выглядит следующим образом:

$$l = lQ.$$

Транспонировав данное выражение, получим

$$Q^T l^T = l^T.$$

Это означает, что l^T — собственный вектор матрицы Q^T с собственным значением 1. Таким образом, нахождение стационарного распределения l сводится к решению линейной однородной системы уравнений, подчиненной условиям $l(k) \geq 0$, $\sum_{k=1}^{N} l(k) = 1$.

Рассмотрим характеристики функционалов траекторий случайного блуждания для стационарного распределения l. С учетом того, что $p_n = l, n = 1, 2, \ldots$ выражения примут вид

$$Mf\left(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_{k+r}\right) = lQ_r f,$$

$$Mf\left(\xi_k\right) = lf.$$

Предельные характеристики случайного блуждания. Особенностью рассматриваемых переходных функций $q(x, y)$ является их неразложимость, т. е. множество X нельзя разбить на два подмножества X_0 и X_1 (таким образом, что $X_0 \neq 0$, $X_1 \neq 0$, $X_0 \cap X_1 = 0$, $X_0 \cup X_1 = X$) такие, что $q(x, y) = 0$ при $x \in X_0$, $y \in X_1$. Это значит, что блуждающая частица, попав в некоторый момент времени в X_0, не сможет никогда его покинуть. Случайное блуждание с подобной переходной функцией называется неразложимым и характеризуется следующим свойством: для любых двух точек $u \in X$, $v \in X$ существует такая последовательность точек $x_1,\dots,x_r$, что $x_1 = u$, $x_r = v$, $q(x_i, x_{i+1}) > 0$ для любого $i \in \{1,\dots,r-1\}$. Таким образом, переход от $x_1 = u$ к $x_r = v$ возможен. Также неразложимое блуждание обладает еще одним свойством, из которого следует, что если число k достаточно велико, то все элементы матрицы Q^k положительны. В свою очередь, неразложимая матрица Q^k обладает следующим свойством: последовательность матриц Q^k, $k = 1, 2, \dots$ сходится к некоторой матрице L, имеющей вид

$$L = \begin{vmatrix} l_1 & \dots & l_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_1 & \dots & l_N \end{vmatrix}, l_k \ge 0, \sum_{k=1}^{N} l_k = 1.$$

Откуда следует, что $l = (l_1,\dots,l_N)$ — стационарное распределение вероятностей. Других стационарных распределений не существует.

Рассмотрим цепь $\xi_1, \xi_2, \dots$ с неразложимой переходной функцией Q. Пусть p_0 — произвольное начальное распределение вероятностей, а $l = (l_1,\dots,l_N)$ — стационарное распределение вероятностей. Например, марковская цепь $\eta_1, \eta_2, \dots$ с той же переходной функцией и с начальным распределением l. Пусть $f(x_1,\dots,x_r)$ — произвольная функция, $x_i \in X = \{1,\dots,N\}$. Тогда справедливо соотношение

$$\mathrm{M}\left(f\left(\xi_{k+1},\dots,\xi_{k+r}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{M}f\left(\eta_1,\dots,\eta_r\right).$$

Последняя величина имеет выражение

$$\mathrm{M}f\left(\eta_1,\dots,\eta_r\right) = \sum_{x_1,\dots,x_r} l(x_1)\,q(x_1,x_2)\dots q(x_{r-1},x_r)\,f(x_1,\dots,x_r).$$

Для функции одной переменной (т. е. $r = 1$) формула имеет вид

$$\mathrm{M}f\left(\eta_r\right) = \sum_{x} l(x)\,f(x).$$

При решении задач, связанных с предельными характеристиками случайного блуждания, часто требуется найти удельные величины, например, долю времени, проведенного частицей в некотором подмножестве. Удобно использовать для этого лемму Чезаро, согласно которой $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$, тогда $\dfrac{a_1 + \dots + a_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, где $\{a_k\}$ — числовая, векторная, матричная или иная последовательность. Ранее было показано, что $Q^k \xrightarrow[k\to\infty]{} L$, следовательно,

$$\frac{Q+\ldots+Q^n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}L.$$

Задача о достижении множества. Рассмотрим случайное блуждание $\xi_0,\xi_1,\ldots$ на некотором множестве X. Пусть задана начальная точка $\xi_0=a$, а марковский оператор Q имеет вид

$$(Qf)(x)=\sum_y q(x,y)f(y),$$

где $q(x,y)=P\{\xi_{n+1}=y\,|\,\xi_n=x\}$ — переходная вероятность.

Пусть задано множество A, тогда A' — его дополнение, точка $b\in A$. Наша задача — найти вероятность того, что на n шаге частица впервые попадет в A, причем именно в точку b.

Для любого множества D (в том числе и точки) введем функцию-индикатор:

$$\chi_D(x)=\begin{cases}1, & x\in D;\\ 0, & x\notin D.\end{cases}$$

Искомая вероятность будет иметь следующий вид:

$$P_n(b)=P\left\{\xi_i\in A',i=1,\ldots,n-1,\xi_n=b\right\}=\sum_{x_i\in A'}q(a,x_1)q(x_1,x_2)\ldots q(x_{n-1},b). \qquad (3)$$

Рассмотрим применение оператора Q к функциям-индикаторам:

$$(Q\chi_b)(x)=\sum_y q(x,y)\chi_b(y)=q(x,b).$$

К полученной функции последовательно применим $\chi_{A'}$ (через $\chi_{A'}$ обозначены и функция, и оператор умножения на нее). Подставляя полученное выражение в (3), получим

$$P_n(b)=\sum_{x_i\in A'}(Q\chi_{A'})^{n-1}Q\chi_b=\left((Q\chi_{A'})^{n-1}Q\chi_b,\chi_a\right).$$

Для изучения $P_n(b)$ введем производящую функцию [5]:

$$F(b,z)=\sum_{n=1}^{\infty}P_n(b)z^n=z\sum_{k=0}^{\infty}(zQ\chi_{A'})^kQ\chi_b.$$

Далее применим формулу Неймана:

$$\sum\nolimits_0^\infty T_k=(I-T)^{-1}, \qquad (4)$$

где T — некоторый оператор, $\|T\|=c, c<1$.

Полагая и учитывая, что $|z| \le 1$ и $\|Q\chi_{A'}\| < 1$ (ниже будет доказано), получаем $\|zQ\chi_{A'}\| < 1$. Итак, согласно формуле (4), запишем:

$$F(b,z) = \left(z\left(I - zQ\chi_{A'}\right)^{-1} Q\chi_b, \chi_a\right).$$

Напомним, что для оператора O справедливо $(aO, b) = (a, O^T b)$, где a, b — некоторые переменные. Пусть матрица Q симметрична, тогда

$$F(b,z) = z\left(\chi_b, Q\left(I - z\chi_{A'}Q\right)^{-1} \chi_a\right). \tag{5}$$

Далее введем функцию f

$$\left(I - z\chi_{A'}Q\right)^{-1} \chi_a = f. \tag{6}$$

Отметим, что она является решением уравнения

$$\chi_a = f - z\chi_{A'}Qf .$$

Блуждание на плоскости. Рассмотрим блуждание на множестве $X = \{(x, y)\}$, $x \in Z, y \in Z$, началом блуждания будет точка $\xi_0 = a = (0,0)$. Блуждание определяется следующим образом: попав в (x, y), частица переходит в соседнюю точку с вероятностью $\frac{1}{4}$. Оператор Q задается следующим выражением:

$$Qf(x, y) = \frac{f(x+1, y) + f(x, y+1) + f(x-1, y) + f(x, y-1)}{4}.$$

Рассмотрим множество A и число m:

$$A = \{(x, y), \ y = m\},$$

а оставшееся множество точек — $A' = \{(x, y), y \ne m\}$.

Пусть b — произвольная целочисленная координата на оси x. Найдем функцию f из формулы (6):

$$\chi_{(0,0)}(x, y) = f(x, y) - z\chi_{A'}(x, y)\frac{f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1)}{4},$$

где $\chi_{(0,0)}(x, y) = \chi_0(x)\chi_0(y)$.

Отсюда справедливо следующее равенство:

$$\chi_{(0,0)}(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_0(y) e^{i\lambda x} d\lambda ,$$

где $x \in Z, y \in Z$.

Обозначим $\psi_\lambda(x, y) = \chi_0(y) e^{i\lambda x}$, тогда

$$\left(I - z\chi_{A'}Q\right)^{-1} \chi_{(0,0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(I - z\chi_{A'}Q\right)^{-1} \psi_\lambda d\lambda .$$

Будем искать подынтегральную функцию $\left(I - z\chi_{A'}Q\right)^{-1}\psi_\lambda$ в виде $u(y)e^{i\lambda x}$, где $u(y)$ — неизвестная функция. Для нее применим уравнение

$$e^{i\lambda x}\chi_0(y) = e^{i\lambda x}u(y) - z\chi_{A'} \frac{e^{i\lambda(x+1)}u(y) + e^{i\lambda(x-1)}u(y) + e^{i\lambda x}u(y+1) + e^{i\lambda x}u(y-1)}{4},$$

$$\chi_0(y) = u(y) - z\chi_{A'} \frac{e^{i\lambda}u(y) + e^{-i\lambda}u(y) + u(y+1) + u(y-1)}{4}. \tag{7}$$

Рассмотрим это разностное уравнение [6] на множествах $y \le 0$, $0 < y < m$, $y \ge m$. Пусть $y \ge m+1$, тогда

$$0 = u(y)\left(1 - \frac{z\cos(\lambda)}{2}\right) - \frac{z}{4}\big(u(y+1) + u(y-1)\big). \tag{8}$$

$$u(y) = A\theta^y, \tag{9}$$

где A — некоторая константа; θ — корень характеристического уравнения.

Подставим выражение (8) в формулу (9):

$$0 = A\theta^y\left(1 - \frac{z\cos(\lambda)}{2}\right) - \frac{z}{4}\left(A\theta^{y+1} + A\theta^{y-1}\right).$$

После преобразования запишем

$$0 = \left(1 - \frac{z\cos(\lambda)}{2}\right) - \frac{z}{4}\left(\theta + \theta^{-1}\right).$$

Получаем характеристическое уравнение, из которого находим

$$\theta + \frac{1}{\theta} = \frac{4\left(1 - \frac{z}{2}\cos(\lambda)\right)}{z}, \tag{10}$$

Докажем, что $u(m) = A\theta^m$, при этом пусть $y = m+1$, тогда

$$0 = A\theta^{m+1}\left(1-\frac{z\cos(\lambda)}{2}\right)-\frac{z}{4}\left(A\theta^{m+2}+u(m)\right),$$

$$u(m) = A\theta^{m+2}-\frac{4}{z}A\theta^{m+1}\left(1-\frac{z\cos(\lambda)}{2}\right) = A\theta^{m}\left(\theta^2-\frac{4}{z}\theta\left(1-\frac{z\cos(\lambda)}{2}\right)\right) =$$

$$= A\theta^{m}\left(\theta^2-\theta\left(\theta+\frac{1}{\theta}\right)\right) = A\theta^{m}.$$

Однако, $\chi_{A'}(m)=0$. Следовательно, $u(m)=0$ и $A=0$. Таким образом, $u(y)=0$ для $y \ge m$. Теперь пусть $y<0$, тогда решение ищем в виде $u(y)=D\theta^{-y}$, где D — константа.

Аналогично случаю, когда $y \ge m$, получаем $u(y)=D\theta^{-y}$ при $y \le 0$.

Далее пусть $0<y<m$. Решение ищем в виде $u(y)=M\theta^{y}+N\theta^{-y}$, где M, N — константы.

Таким же образом доказываем, что $u(y)=M\theta^{y}+N\theta^{-y}$ при $0 \le y \le m$. В итоге искомая функция $u(y)$ принимает следующий вид:

$$u(y)=\begin{cases} 0,\ y \ge m; \\ M\theta^{y}+N\theta^{-y},\ 0 \le y \le m; \\ D\theta^{-y},\ y \le 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Приводя (10) к виду квадратного уравнения, получаем два корня θ_1 и θ_2. Можно заметить, что $\theta_1 = \frac{1}{\theta_2}$.

$$\theta_1 = \frac{2}{z}-\cos(\lambda)-\frac{2\sqrt{1-z\cos(\lambda)-\frac{z^2}{4}\sin^2(\lambda)}}{z},$$

$$\theta_2 = \frac{2}{z}-\cos(\lambda)+\frac{2\sqrt{1-z\cos(\lambda)-\frac{z^2}{4}\sin^2(\lambda)}}{z}.$$

Разложим θ_1 в ряд Тейлора при $z=0$:

$$\theta_1 = \frac{2}{z}-\cos(\lambda)-\frac{2}{z}\left(1-z\cos(\lambda)-\frac{z^2}{4}\sin^2(\lambda)\right)+\ldots.$$

Можно заметить, что неопределенность, возникающая при устремлении z к нулю, устраняется. Очевидно, что в θ_2 после разложения в ряд неопределенность остается, поэтому отбрасываем θ_2 и получаем:

$$\theta=\theta_1=\frac{2}{z}-\cos(\lambda)-\frac{2\sqrt{1-z\cos(\lambda)-\frac{z^2}{4}\sin^2(\lambda)}}{z}. \qquad (12)$$

Запишем все выражения для $u(0)$ и $u(m)$: $u(0)=D$; $u(0)=M+N$; $u(m)=0$;

$$u(m)=M\theta^m+N\theta^{-m}.$$

Далее перепишем (7), учитывая, что $y=0$:

$$D\left(1-\frac{z}{2}\cos(\lambda)-\frac{z}{4}\theta\right)+M\left(-\frac{z}{4}\theta\right)+N\left(-\frac{z}{4}\frac{1}{\theta}\right)=1.$$

Получаем систему из трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} M+N=D \\ D\left(1-\frac{z}{2}\cos(\lambda)-\frac{z}{4}\theta\right)+M\left(-\frac{z}{4}\theta\right)+N\left(-\frac{z}{4}\frac{1}{\theta}\right)=1. \\ M\theta^m+N\theta^{-m}=0 \end{cases}$$

Решая систему [7], находим M, N и D.

$$\begin{cases} M=\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}\cos(\lambda)-\frac{z}{2}\theta}; \\ N=\dfrac{-\theta^{2m}}{1-\frac{z}{2}\cos(\lambda)-\frac{z}{2}\theta}; \\ D=\dfrac{1-\theta^{2m}}{1-\frac{z}{2}\cos(\lambda)-\frac{z}{2}\theta}. \end{cases}$$

Подставляя полученные значения констант в выражение (11), получим

$$u(y)=\begin{cases} \dfrac{\theta^{-y}-\theta^{-y+2m}}{1-\frac{z}{2}\cos(\lambda)-\frac{z}{2}\theta}, y\le 0; \\ \dfrac{\theta^{y}-\theta^{-y+2m}}{1-\frac{z}{2}\cos(\lambda)-\frac{z}{2}\theta}, 0\le y\le m;. \\ 0, y\ge m. \end{cases}$$

Отметим, что $u(y)=u(y,\lambda)$. Следовательно, формула для функции f примет следующий вид:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda x}u(y,\lambda)\,d\lambda .$$

Вернемся к функции $F(b,z)$. С учетом выражения (5) запишем

$$F(b,z)=z(\chi_b,Qf)=z\left(\chi_b,\frac{f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x,y+1)+f(x,y-1)}{4}\right)=$$

$$=\frac{z}{4}f(b,m-1)=\frac{z}{8\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda b}\,\frac{\theta^{m-1}-\theta^{m+1}}{1-\frac{z}{2}\cos(\lambda)-\frac{z}{2}\theta}\,d\lambda.$$

Преобразуем ее с помощью выражения (12):

$$\frac{\theta^{m-1}-\theta^{m+1}}{1-\frac{z}{2}\cos(\lambda)-\frac{z}{2}\theta}=\theta^m\,\frac{\frac{1}{\theta}-\theta}{1-\frac{z}{2}\cos(\lambda)-\frac{z}{2}\theta}=$$

$$=\theta^m\,\frac{\frac{2}{z}-\cos(\lambda)+\frac{2\sqrt{1-z\cos(\lambda)-\frac{z^2}{4}\sin^2(\lambda)}}{z}-\frac{2}{z}+\cos(\lambda)+\frac{2\sqrt{1-z\cos(\lambda)-\frac{z^2}{4}\sin^2(\lambda)}}{z}}{1-\frac{z}{2}\cos(\lambda)-\frac{z}{2}\left(\frac{2}{z}-\cos(\lambda)-\frac{2\sqrt{1-z\cos(\lambda)-\frac{z^2}{4}\sin^2(\lambda)}}{z}\right)}=$$

$$=\theta^m\,\frac{\frac{4\sqrt{1-z\cos(\lambda)-\frac{z^2}{4}\sin^2(\lambda)}}{z}}{\sqrt{1-z\cos(\lambda)-\frac{z^2}{4}\sin^2(\lambda)}}=\frac{4\theta^m}{z}.$$

В итоге получаем

$$F(b,z)=\frac{z}{8\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda b}\,\frac{4\theta^m}{z}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda b}\theta^m\,d\lambda .$$

Таким образом для величины

$$P_n(A)=P\left\{\xi_i\in A',i=1,\dots,n-1,\xi_n\in A\right\}$$

имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_n(A)z^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda b}\theta^m\,d\lambda. \tag{13}$$

Введем случайные величины ν и β, момент попадания и место попадания, при этом $\nu \in \{1, 2, \ldots\}$ и $\beta \in \{0 + im, \pm 1 + im, \pm 2 + im, \ldots\}$. Справедливо равенство

$$P_n(A) = P\{\nu = n, \beta = b + im\}.$$

Заметим, что $\theta = \theta(\lambda, z)$. Тогда выражение (13) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\nu = n, \beta = b + im\} z^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda b} \theta^m(\lambda, z)\, d\lambda. \tag{14}$$

Подставим $z = 1$ в равенство (14) и получим вероятность того, что $\beta = b + im$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\nu = n, \beta = b + im\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda b} \theta^m(\lambda, 1)\, d\lambda.$$

Можно заметить, что получившееся выражение представляет собой ряд Фурье [2] с коэффициентами $P\{\nu = n, \beta = b + im\}$. Учитывая это, получим

$$\theta^m(\lambda, 1) = \sum_{b=-\infty}^{\infty} P\{\nu = n, \beta = b + im\} e^{-i\lambda b},$$

т. е. $\theta^m(\lambda, 1) = M\left(z^{\nu} e^{-i\lambda\beta}\right)$, тогда

$$\mathrm{M}\left(e^{-i\lambda\beta}\right) = \left(2 - \cos(\lambda) - \sqrt{(1 - \cos(\lambda))(3 - \cos(\lambda))}\right)^m.$$

При рассмотрении предельного случая получаем неопределенность

$$\lim_{m \to \infty} \left(\mathrm{M}\left(e^{-i\lambda\beta}\right)\right) = \infty,$$

поэтому целесообразнее рассматривать нормированную случайную величину $\beta_m = \dfrac{\beta}{m}$. Таким образом,

$$\mathrm{M}\left(e^{-i\lambda\beta_m}\right) = \mathrm{M}\left(e^{-i\lambda\frac{\beta}{m}}\right) = \left(2 - \cos\left(\frac{\lambda}{m}\right) - \sqrt{\left(1 - \cos\left(\frac{\lambda}{m}\right)\right)\left(3 - \cos\left(\frac{\lambda}{m}\right)\right)}\right)^m.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{\lambda}{m} = 0$, разложим $\cos\left(\dfrac{\lambda}{m}\right)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$\cos\left(\frac{\lambda}{m}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2}{2!} + O\left(\left(\frac{\lambda}{m}\right)^4\right).$$

Используя полученное выражение, запишем

$$\mathrm{M}\left(e^{-i\lambda\frac{\beta}{m}}\right)=\left(2-\left(1-\frac{\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2}{2!}\right)-\sqrt{\left(1-\left(1-\frac{\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2}{2!}\right)\right)\left(3-\left(1-\frac{\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2}{2!}\right)\right)}\right)^m=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2-\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2\left(2+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2\right)}\right)^m=\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2-\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2\left(2+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2\right)}\right)^m=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2\left(4+\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2\right)}\right)^m.$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2\left(4+\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2\right)}\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{2m^2}-\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{\lambda^2}{m^2}+\frac{\lambda^4}{m^4}}\right)^m.$$

Как можно заметить, при устремлении m к бесконечности, слагаемые с большими степенями устремляются к нулю быстрее, чем слагаемые с меньшими степенями, в итоге получаем

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{2m^2}-\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{\lambda^2}{m^2}+\frac{\lambda^4}{m^4}}\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{\lambda^2}{m^2}}\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{|\lambda|}{|m|}\right)^m.$$

Известно, что указанный предел можно выразить следующей формулой:

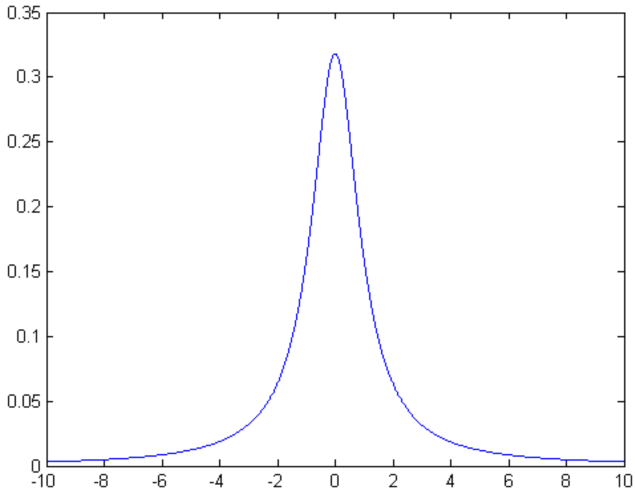
$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{|\lambda|}{|m|}\right)^m=e^{-|\lambda|}=\mathrm{M}\left(e^{i\lambda\beta_m}\right).$$

Для того, чтобы определить плотность распределения случайной величины β_m, рассмотрим обратное преобразование Фурье от характеристической функции случайной величины δ, к которой асимптотически стремится характеристическая функция β_m.

$$F^{-1}\left[M\left(e^{-i\lambda\delta}\right)\right](z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|\lambda|}e^{-iz\lambda}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda(iz+1)}d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda(iz-1)}d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{e^{-\lambda(iz+1)}}{iz+1}\right|_0^{\infty}+\left.\frac{e^{-\lambda(iz-1)}}{iz-1}\right|_{-\infty}^{0}\right)=\frac{1}{\pi\left(z^2+1\right)}.$$

Можно заметить, что полученная плотность распределения совпадает с плотностью распределения Стьюдента [1] со степенью свободы 1 (рисунок).



Плотность распределения δ

Воспользуемся следующим утверждением. Пусть существует последовательность случайных величин η_n и некоторая случайная величина τ. Если $\lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{M}\left(e^{i\lambda\eta_n}\right) = \mathrm{M}\left(e^{i\lambda\tau}\right)$, то можно утверждать, что $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau$ по характеристической функции.

Применив полученное утверждение к β_m, получаем, что $\beta_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \delta$ по характеристической функции, и $\beta_m \sim f_{\beta_m}(z) = \dfrac{1}{\pi\left(z^2+1\right)}$ при больших m.

Момент первого попадания во множество. Оценим момент первого попадания на множество A. Для этого рассмотрим исходную вероятность

$$P\left\{\xi_k \in A', k=1,\ldots,n-1, \xi_n \in A\right\} = \sum_{\substack{x_i \in A', i=1,\ldots,n-1 \\ x_n \in A}} q\left(a, x_1\right)\cdot\ldots\cdot q\left(x_{n-1}, x_n\right) =$$

$$= \sum_{\substack{x_i \in A', i=1,\ldots,n-1 \\ x_n \in X}} q\left(a, x_1\right)\cdot\ldots\cdot q\left(x_{n-1}, x_n\right)\chi_A\left(x_n\right).$$

Отметим, что часть суммы можно представить в виде действия марковского оператора на функцию-индикатор:

$$\sum_{x_n \in X} q\left(x_{n-1}, x_n\right)\chi_A\left(x_n\right) = \left(Q\chi_A\right)\left(x_{n-1}\right).$$

Проведем подобное преобразование можно с остальными частями суммы, добавив функцию-индикатор $\chi_{A'}$. Получим

$$P\left\{\xi_k \in A', k=1,\dots,n-1, \xi_n \in A\right\} = \sum_{x_i \in X} q\left(a, x_1\right) .. Q\chi_{A'} Q\chi_A =$$

$$=\left(\left(Q\chi_{A'}\right)^{n-1} Q\chi_A, \delta_a\right),$$

где $\delta_a\left(x\right)=\begin{cases}1, x=a;\\ 0, x\neq a.\end{cases}$

Обозначим полученную величину, как $p_n=\left(\left(Q\chi_{A'}\right)^{n-1} Q\chi_A, \delta_a\right)$. Рассмотрим следующие вероятности:

$P\left\{\xi_k \text{ впервые попадает в } A \text{ в момент } n\right\} = p_n$;

$P\left\{\xi_k \text{ попадает в } A \text{ до момента } n\right\} = 1 - p_n$.

Пусть ν_A — момент первого попадания в A. Очевидно, что это целочисленная неотрицательная величина. Запишем связанные с ней вероятности:

$$P\left\{\nu_A < n\right\} = 1 - p_n,$$

$$P\left\{\nu_A \geq n\right\} = p_n.$$

Далее найдем вероятность того, что первое попадание произошло ровно в момент n:

$$P\left\{\nu_A = n\right\} = P\left\{\nu_A < n\right\} - P\left\{\nu_A < n-1\right\} = p_{n-1} - p_n.$$

Таблица распределения случайной величины ν_A представлена ниже.

Распределение случайной величины ν_A

ν_A	1	…	m	…
$P\left\{\nu_A = m\right\}$	$p_0 - p_1$	…	$p_{m-1} - p_m$	…

Рассмотрим ее предельное поведение. Для этого обратимся к оператору $Q\chi_{A'}$.

Лемма. Пусть дан неразложимый марковский оператор $Q\chi_{A'}$. Тогда для любых достаточно больших k и любого множества A' выполняется неравенство $\left\|\left(Q\chi_{A'}\right)^k\right\| < 1$.

Доказательство леммы. Для функции $f \in R^N$ запишем

$$\left\|Q\chi_{A'}\right\| = \sup_{f\neq 0}\frac{\max\limits_{1\leq i\leq N}\left|Q\chi_{A'} f_i\right|}{\max\limits_{1\leq i\leq N}\left|f_i\right|} = \max_{1\leq i\leq N}\frac{\max\limits_{1\leq i\leq N}\left|f_i\right|\left|\sum\limits_{j=1}^{N} q_{ij}\left(\chi_{A'}\right)_j\right|}{\max\limits_{1\leq i\leq N}\left|f_i\right|} = \max_{1\leq i\leq N}\left|\sum_{j=1}^{N} q_{ij}\left(\chi_{A'}\right)_j\right| = \max_{1\leq i\leq N}\left|\sum_{j\in A'} q_{ij}\right| \leq 1.$$

В некоторых частных случаях можно получить $\left\|Q\chi_{A'}\right\| = 1$, поэтому, ввиду неразложимости оператора, рассмотрим $\left(Q\chi_{A'}\right)^k$ при $k \to \infty$.

Очевидно, что $\left\| \left(Q\chi_{A'} \right)^k \right\| = \lambda < 1, k \to \infty$.

Далее рассмотрим скалярное произведение $\left(y, \delta_a \right)$. Можно заметить, что в нашем случае оно эквивалентно a-й координате вектора y, т. е.

$$\left(y, \delta_a \right) = y_a .$$

Тогда модуль скалярного произведения имеет следующий вид:

$$\left| \left(y, \delta_a \right) \right| = \left| y_a \right| \le \left\| y \right\| .$$

Воспользуемся полученными данными, чтобы оценить искомую вероятность:

$$P\left\{ \nu_A \ge n \right\} \le \left\| \left(Q\chi_{A'} \right)^{n-1} Q\chi_A \right\| \le \left\| \left(Q\chi_{A'} \right)^{n-1} \right\| \cdot \left\| Q\chi_A \right\| .$$

Обозначим $\left\| Q\chi_A \right\| = B = \mathrm{const}$. Тогда получаем, что

$$P\left\{ \nu_A \ge n \right\} \le B\lambda^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Таким образом, вероятность того, что частица впервые попала во множество A именно в момент $n \to \infty$, стремится к нулю.

На основе результатов проведенных исследований даны асимптотические оценки искомой вероятности при больших времени блуждания и координате попадания. В дальнейшем полученные результаты можно использовать для рассмотрения других задач случайного блуждания, например, задачи о встрече частиц.

Литература

1. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы (краткий курс). М.: Наука, 1971. 288 с.
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
3. *Ито К.* Вероятностные процессы. Вып. 1 / пер. с яп. М.: ИЛ, 1960. 135 с.
4. *Spicer F., Axler S., Gehring F.W., Ribet K.A., eds.* Principles of random walk. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1976. 422 p.
5. *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть II. 4-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2002. 794 с.
6. *Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. М.: Факториал, 1998. 432 с.
7. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Аналитическая геометрия. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 388 с.

Крысяев Роман Юрьевич — магистрант кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

RANDOM WALKS: THE PROBLEM OF ATTAINING A SET

R.Yu. Krysyaev roman-krysyaev@yandex.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The work deals with the problem of a particle performing a random walk attaining a certain set. We consider the definition of a random walk as a stochastic Markov process and characteristics of random walk functional trajectories. We present a stationary distribution and limiting characteristics for random walks. We formulate the problem of attaining a set. We solve the problem of attaining a horizontal line. We found an expression to search for the probability of landing in a set. We describe the limit behaviour of the landing coordinate, the distribution density of which approaches the density of Student's t-distribution. We supply the results concerning the distribution of the moment when the particle first lands in the set. We derive an expression for the Markov operator norm. We estimate the first landing moment time for a limit case

Keywords

Markov processes, random walks, walk trajectories, stationary distribution, limiting characteristics, functional equation, Student's t-distribution, linear operator

References

[1] Rozanov Yu.A. Sluchaynye protsessy (kratkiy kurs) [Stochastic processes: short course]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 288 p. (in Russ.).

[2] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza [Elements of function theory and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 496 p. (in Russ.).

[3] Ito K. Veroyatnostnye protsessy. Vypusk I [Random processes. Iss. 1]. Moscow, IL Publ., 1960. 135 p. (in Russ.).

[4] Spicer F., Axler S., Gehring F.W., Ribet K.A., eds. Principles of random walk. 2nd ed. New York, Springer-Verlag, 1976. 422 p.

[5] Zorich V.A. Matematicheskiy analiz. Chast' II [Mathematical analysis. Part II]. Moscow, MTsNMO Publ., 2002. 794 p. (in Russ.).

[6] Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Spravochnik po integral'nym uravneniyam: Tochnye resheniya [Handbook on integral equations: exact solutions]. Moscow, Faktorial Publ., 1998. 432 p. (in Russ.).

[7] Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. Analiticheskaya geometriya [Analytic geometry]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2002. 388 p. (in Russ.).

Krysyaev R.Yu. — Master's Degree student of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University Department, Moscow, Russian Federation.