УДК 519.63 DOI: 10.18698/2541-8009-2021-10-744

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ЩЕЛЕВОМ ЗАЗОРЕ

Д.И. Алексеев alekseev_d@internet.ru
SPIN-код: 9070-4522

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федераци

Аннотация

При течении в каналах простой геометрии решение уравнений Навье — Стокса может быть получено аналитически. Однако для большинства практически важных случаев течения в сложных технических объектах их решение может быть получено лишь с использованием численных методов. Такой подход был реализован в данной статье на примере плоского слоистого стабилизированного движения потока в канале. Для этого на базе алгоритма SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) создана программа на языке Pascal, которая позволяет итерационным методом получить сходящееся решение с точностью до 2 %. По результатам работы выполнено сравнение численного решения с точным.

Ключевые слова

Слоистое движение, плотность, динамическая вязкость, численные методы, граничные условия, шахматная сетка, градиент давления, сходимость решения

Поступила в редакцию 17.09.2021

Введение. Определение закономерностей поведения потока жидкости в каналах различного рода является одной из главнейших задач гидродинамики и тепломассообмена. В основе ее решения лежат дифференциальные уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности [1], которые современные программы позволяют решать численными методами. Стоит учитывать, что для проверки адекватности методики численного решения необходимо проводить процедуры его верификации на задачах, имеющих аналитические решения и валидации по данным физических экспериментов. Целью работы является получение опыта реализации численного решения методом контрольного объема [2] и его верификация.

Постановка задачи. Для большей наглядности рассмотрим плоское слоистое стабилизированное течение несжимаемой жидкости в щелевом зазоре, которое в технической литературе называют плоским течением Пуазёйля [3]. Такой вид движения, как правило, встречается в различных системах охлаждения, применяемых во многих технических приспособлениях, что дает основания для детального рассмотрения данного вопроса.

Основа численного решения любой задачи гидродинамики состоит в разбиении рассматриваемой расчетной области на контрольные объемы. Размеры и форма контрольных объемов определяют точность решения, их выбирают по результатам анализа используемой материальной математической модели и характера течения. В центре каждого контрольного объема располагают узловые точки, в которых и вычисляют искомые параметры. В совокупности все контрольные объемы образуют расчетную сетку.

Рассматривая плоское течение Пуазёйля, проще всего использовать равномерную сетку, т. е. сетку, у которой для декартовой системы координат расстояния между соседними узловыми точками вдоль осей Ox и Oy равны между собой (рис. 1). В этом случае границы контрольных объемов лежат посередине между расчетными точками, что, как будет видно в дальнейшем, позволяет упростить процесс расчета. На основе такого разбиения было решено рассмотреть произвольную квадратную область плоского канала: его ширина $2H$ и длина L составили 40 мм. Расстояние между узлами принято равным 5 мм.

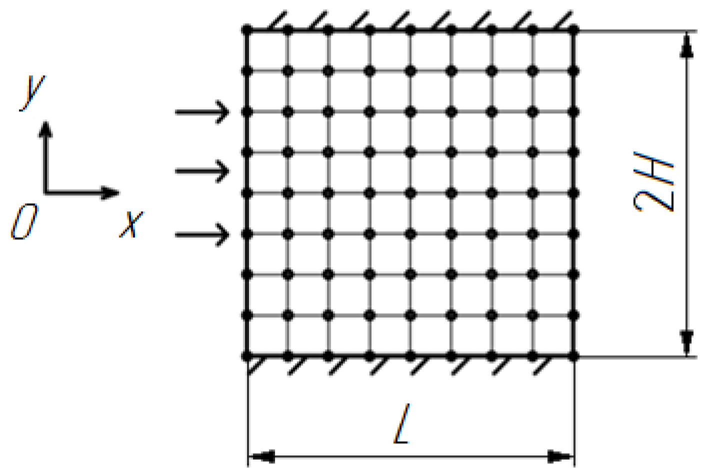

Рис. 1. Расчетная область

Течение воды моделируется при параметрах, близких к нормальным (плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, динамическая вязкость $\mu = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ Па · с).

Задавшись размерами канала и типом жидкости, необходимо установить граничные условия для скорости и давления:

– на стенках канала реализуется условие прилипания жидкости [4] ($U(x, y)$, $V(x, y)$ — компоненты вектора скорости в направлении оси Ox и Oy соответственно):

$$U(x, \pm H) = V(x, \pm H) = 0;$$

– поперечные компоненты вектора скорости при стабилизированном течении отсутствуют:

$$V(x, y) = 0.$$

Перепад давления должен быть таким, чтобы число Рейнольдса [5] для данного канала было меньше 1000, поскольку течение Пуазейля является ламинарным:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot 2HU_{\text{ср}}}{\mu} \Rightarrow U_{\text{ср}} = 0{,}0125 \text{ м/с}, \tag{1}$$

где $U_{\text{ср}}$ — средняя скорость по сечению канала в направлении оси *Ox*.

Потери давления в канале определяются из соотношения Дарси — Вейсбаха [6]:

$$\frac{dp}{dx} = \lambda_{\text{тр}} \frac{1}{d_{\text{г}}} \frac{\rho U_{\text{ср}}^2}{2}, \tag{2}$$

где dp/dx — градиент давления на рассматриваемом участке; $\lambda_{\text{тр}}$ — коэффициент гидравлического трения; $d_{\text{г}}$ — гидравлический диаметр, $d_{\text{г}} = 2H$.

Для ламинарного движения жидкости в плоском канале $\lambda_{\text{тр}}$ определяется из соотношения

$$\lambda_{\text{тр}} = \frac{96}{\mathrm{Re}} = 0{,}096. \tag{3}$$

Подстановка соотношений (1) и (3) в (2) дает следующий результат:

$$\frac{dp}{dx} = 0{,}1875 \text{ Па}.$$

Для данной задачи градиент давления

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{L},$$

где p_1 — давление на входе; p_2 — давление на выходе. Для удобства примем $p_2 = 0$ Па, тогда $p_1 = 0{,}0075$ Па.

Описание алгоритма. Осуществив разбиение расчетной области, для каждого контрольного объема необходимо записать разностные уравнения [7], которые, в сущности, имеют тот же физический смысл, что и уравнения Навье — Стокса. Они должны связать значения искомых параметров потока в любой рассматриваемой группе узловых точек. Основными параметрами для расчета будут скорость и давление в канале. Однако прежде чем записать эти разностные уравнения, необходимо сделать одно важное замечание: сетка для нахождения поля скорости должна быть смещена относительно сетки для поля давления в шахматном порядке (рис. 2). Такое допущение позволит избежать получения нефизического распределения поля скорости.

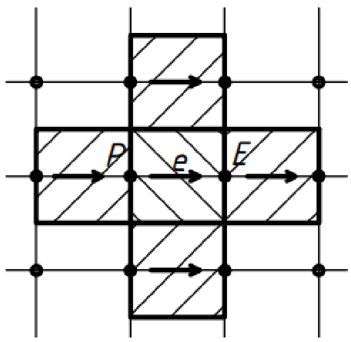

Рис. 2. Шахматный порядок расположения ячеек расчетной сетки для расчета скорости потока *U*

Запишем уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности для данной задачи:

$$\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}=-\frac{dp}{dx}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial x}=0, \tag{5}$$

где J_x и J_y представляют собой зависимости

$$\begin{gathered} J_x=\rho UU-\mu\frac{\partial U}{\partial x}; \\ J_y=-\mu\frac{\partial U}{\partial y}. \end{gathered} \tag{6}$$

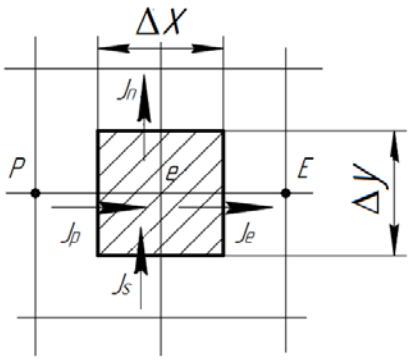

Рис. 3. Контрольный объем для определения скорости *U*

Проинтегрируем (4) и (5) по контрольному объему, изображенному на рис. 3:

$$J_e-J_p+J_n-J_s=(p_P-p_E)\Delta y; \tag{7}$$

$$(\rho U)_e\Delta y-(\rho U)_p\Delta y=0, \tag{8}$$

где p_P, p_E — давление в точках *P* и *E* соответственно (см. рис. 3).

Умножим уравнение (8) на U_e и вычтем его из уравнения (7):

$$\begin{gathered}(J_e-(\rho U)_e\Delta yU_e)-(J_p-(\rho U)_p\Delta yU_e)+ \\ +J_n-J_s=(p_P-p_E)\Delta y.\end{gathered} \tag{9}$$

Представляя значение скорости *U* на грани контрольного объема как некоторое средневзвешенное значение между соседними узлами, а также учитывая характер изменения скорости между ними, перепишем уравнение (9) в виде

$$a_eU_e=a_{es}U_{es}+a_{ew}U_{ew}+a_{en}U_{en}+\Delta y(p_P-p_E),$$

где $a_e, a_{es}, a_{ew}, a_{en}$ — коэффициенты, равные соответственно $a_e=a_{es}+$ $+a_{ew}+a_{en}$, $a_{es}=a_{en}=\mu$, $a_{ew}=\rho\Delta y\frac{2U_{ew}U_e}{U_{ew}+U_e}$; U_{es}, U_{ew}, U_{en} — значения скорости *U* в контрольных объемах, находящихся соответственно снизу, слева и сверху от рассматриваемого; $\Delta y(p_P-p_E)$ — сила давления.

Произвольно задав начальное приближение поля скорости, итерационным путем (методом Гаусса — Зайделя [8]) скорректируем его с учетом имеющегося поля давления, которое на первой итерации тоже является произвольным. На основе полученного поля скорости для каждой узловой точки рассчитаем поправку для поля давления, которое также следует скорректировать. Дискретный аналог для поправки поля давления запишем в виде

$$(d_e + d_w)p'_P = d_e p'_E + d_w p'_W + U_w - U_e,$$

где p'_P, p'_W — значения поправки в точках, находящихся соответственно справа и слева от рассматриваемой (аналогично для U_e, U_w); d_e, d_w — коэффициенты, равные

$$d_e = \frac{\Delta y}{a_e};\; d_w = \frac{\Delta y}{a_w}$$

Коэффициент a_w определяется аналогично a_e, а потому для корректировки поля давления необходима информация от большего числа точек (рис. 4).

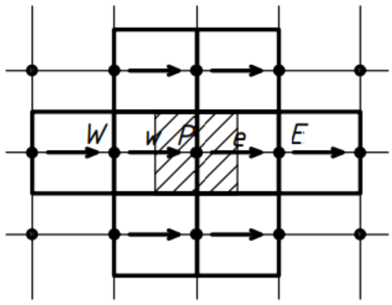

Рис. 4. Сетка для корректировки поля давления p'

После суммирования поправки и исходного давления в каждой точке расчетной сетки получим скорректированное поле давления:

$$p = p^* + p'.$$

Далее с учетом значений поправки давления выполним вторичную корректировку поля скорости с помощью уравнений типа

$$U_e = U_e^* + d_e(p'_P - p'_E),$$

где U_e^* — значение скорости на предыдущей итерации.

Действия, описанные в этом алгоритме, будем повторять до тех пор, пока значения для поправки давления во всех расчетных точках сетки будут пренебрежимо малы $(p' \to 0)$. Это и будет критерием сходимости данного метода.

Для реализации условия стабилизированного течения значения скорости потока на входной границе расчетной области следует принимать равными соответствующим значениям на выходной границе этой же области.

Результаты расчета. На основе алгоритма SIMPLE была создана программа на языке Pascal, результатом которой является матрица скоростей:

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.03277	0.03268	0.03288	0.03133	0.03061	0.03239	0.03294	0.03219
0.05524	0.05513	0.05527	0.05521	0.05504	0.05510	0.05526	0.05522
0.06972	0.06972	0.06971	0.06970	0.06971	0.06972	0.06971	0.06970
0.07447	0.07446	0.07447	0.07446	0.07445	0.07445	0.07447	0.07447
0.06946	0.06938	0.06950	0.06936	0.06922	0.06936	0.06949	0.06938
0.05536	0.05538	0.05534	0.05491	0.05494	0.05536	0.05537	0.05504
0.03241	0.03241	0.03241	0.03194	0.03193	0.03238	0.03243	0.03212
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Из полученного распределения видно, что все столбцы матрицы практически идентичны, а потому поток можно считать установившимся. Среднее отклонение значений в строке составляет 1,43 %, максимальное — 7 %. Сходимость решения была достигнута на 18-й итерации цикла.

Сравнение с точным решением. Для этой задачи существует и точное решение, которое записывается в следующем виде:

$$U(x,y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(H^2 - y^2),$$

С учетом ранее полученных значений p_1 и p_2 точное решение принимает окончательный вид:

$$U(y) = 187{,}5(0{,}0004 - y^2).$$

Сравнение решения, полученного с помощью алгоритма SIMPLE, с точным решением, представлено на рис. 5. При построении зависимости для численного решения в силу дискретного характера полученных результатов использовалось полиномиальное интерполяционное сглаживание [9]. Как видно на графике, отклонение составляет менее 5 %.

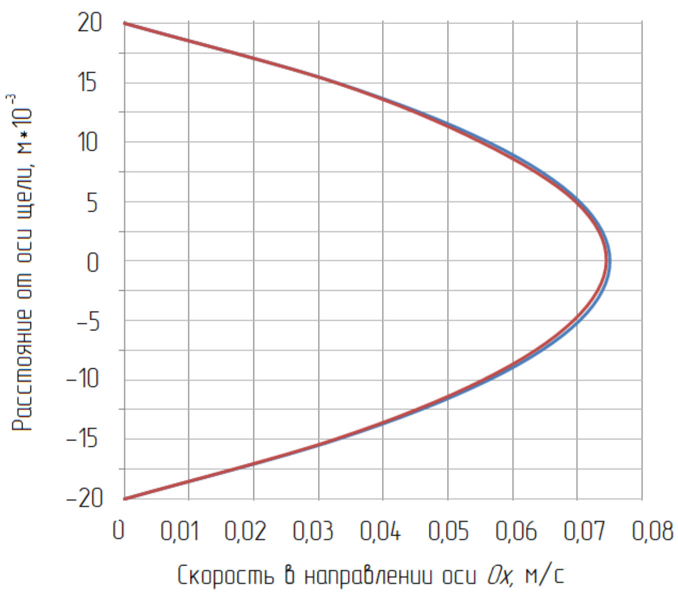

Рис. 5. График распределения скорости в канале (*синим* цветом обозначено точное решение, *красным* — решение, полученное с помощью алгоритма SIMPLE)

Выводы. В результате проведенных исследований:

– реализована методика численного моделирования стабилизированного течения в каналах с использованием метода контрольного объема. Дано подробное описание способа корректировки поля давления и скорости при переходе между последовательными итерациями;

– в целях верификации методики получено численное решение задачи о течении Пуазейля;

– выполнено сравнение численного решения с аналитическим. Показано, что погрешность численного решения не превышает 5 %.

Литература

[1] Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М., Мир, 1981.

[2] Харламов С.Н. Алгоритмы при моделировании гидродинамических процессов. Томск, Изд-во ТПУ, 2008.

[3] Александров Д.В., Зубарёв А.Ю., Исакова Л.Ю. Введение в гидродинамику. Екатеринбург, Изд-во Уральского университета, 2012.

[4] Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М., Энергоатомиздат, 1984.

[5] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1969.

[6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 4. Гидродинамика. М., Наука, 1986.

[7] Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М., Мир, 1990.

[8] Зайцев В.В. Численные методы для физиков. Приближение функций и обработка данных. Самара, Самарский университет, 2014.

Алексеев Даниил Ильич — студент кафедры «Ядерные реакторы и метериалы», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Марков Павел Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Ядерные реакторы и материалы», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Алексеев Д.И. Численное решение задачи установившегося течения жидкости в плоском щелевом зазоре. *Политехнический молодежный журнал*, 2021, № 10(63). http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2021-10-744

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF STEADY FLUID FLOW IN A FLAT SLOTTED GAP

D.I. Alekseev

alekseev_d@internet.ru
SPIN-code: 9070-4522

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

For a flow in channels of simple geometry, the solution of the Navier-Stokes equations can be obtained analytically. However, for most practically important cases of flow in complex technical objects, their solution can only be obtained using numerical methods. This approach has been implemented in this article on the example of a flat layered stabilized flow in a channel. To implement this task on the basis of the SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) algorithm, a program in the Pascal language was created, which, obtains a convergent solution with an 2% accuracy by an iterative method. Based on the results of the work, a comparison of the numerical solution with the exact one is carried out.

Keywords

Layered motion, density, dynamic viscosity, numerical methods, boundary conditions, checkerboard mesh, pressure gradient, solution convergence

Received 17.09.2021

References

[1] Temam R. Navier–Stokes equations: theory and numerical analysis. AMS Chelsea Publ., 1984. (Russ. ed.: Uravneniya Nav'ye-Stoksa. Teoriya i chislennyy analiz. Moscow, Mir Publ., 1981.)

[2] Kharlamov S.N. Algoritmy pri modelirovanii gidrodinamicheskikh protsessov [Algorithms at modelling of hydrodynamic processes]. Tomsk, Izd-vo TPU Publ., 2008 (in Russ.).

[3] Aleksandrov D.V., Zubarev A.Yu., Isakova L.Yu. Vvedenie v gidrodinamiku [Introduction into the hydrodynamics]. Ekaterinburg, Izd-vo Ural'skogo universiteta Publ., 2012 (in Russ.).

[4] Patankar S.V. Chislennye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti [Numerical methods for solving heat exchange problems and fluid dynamics]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984 (in Russ.).

[5] Schlichting H., Gersten K. Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe, G. Braun, 1982. (Russ. ed.: Teoriya pogranichnogo sloya. Moscow, Nauka Publ., 1969.)

[6] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. T. 4. Gidrodinamika [Theoretical physics. Vol. 4. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986 (in Russ.).

[7] Anderson J.D. Computational fluid dynamics. McGraw-Hill, 1995. (Russ. ed.: Vychislitel'naya gidromekhanika i teploobmen. T. 1. Moscow, Mir Publ., 1990.)

[8] Zaytsev V.V. Chislennye metody dlya fizikov. Priblizhenie funktsiy i obrabotka dannykh [Numerical methods for physicists. Functional approximations and data processing]. Samara, Samarskiy universitet Publ., 2014 (in Russ.).

Obtaining copper in the form of a dispersed metal by reduction from an aqueous acid solution

Alekseev D.I. — Student, Department of Nuclear Reactors and Power Plants, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Markov P.V., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Nuclear Reactors and Power Plants, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:
Alekseev D.I. Numerical solution of the problem of steady fluid flow in a flat slotted gap. *Politekhnicheskiy molodezhnyy zhurnal* [Politechnical student journal], 2021, no. 10(63). http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2021-10-744.html (in Russ.).