УДК 519.217.2 DOI: 10.18698/2541-8009-2022-02-774

МОДЕЛИРОВАНИЕ В MATLAB ДВИЖЕНИЯ АВТОМАШИН НА РЕГУЛИРУЕМОМ ПЕРЕКРЕСТКЕ

Д.Н. Минина

daria.minina1@outlook.com
SPIN-код:

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Статья посвящена исследованию математической модели движения автомашин на регулируемом перекрестке. Математическая модель необходима для улучшения регулирования транспортного потока и повышения пропускной способности перекрестка. Для моделирования движения на перекрестке с четырьмя полосами движения выбрана и реализована в системе MATLAB математическая модель, в которой движение автомашин моделируется с помощью марковских цепей с непрерывным временем. Проведено несколько замеров на перекрестках в Москве и Екатеринбурге и получены значения средней длины очереди на регулируемых перекрестках. Представлен анализ полученных результатов, выполнено сравнение математической модели с полученными экспериментальными данными, вычислено среднеквадратичное отклонение между реальными данными и результатами математического моделирования.

Ключевые слова

Математическая модель, регулируемый перекресток, система массового обслуживания, движение на перекрестке, марковский процесс, светофорная сигнализация, MATLAB

Поступила в редакцию 24.01.2022
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022

Введение. Эффективная организация движения автотранспорта на регулируемом перекрестке, т. е. на перекрестке со светофорами или регулировщиками, — одна из актуальнейших проблем современной транспортной системы. В настоящее время детально разработано описание движения как отдельной автомашины, так и потока автотранспорта в целом [1]. Однако выбор компактной математической модели движения транспорта на перекрестке остается актуальной задачей при расчете параметров работы светофора.

В Российской Федерации наиболее часто применяют однопрограммное регулирование светофорной сигнализацией [2], когда параметры работы светофора на перекрестке рассчитывают для пикового периода и поддерживают неизменными в течение суток. Это может приводить к неоптимальной организации движения не в час пик. Для повышения пропускной способности перекрестков с помощью динамического управления сигналами светофора предназначена система «Умный светофор» [3], активное использование которой в Москве началось в конце прошлого десятилетия. Система способна предсказывать транспортную ситуацию на 15–30 минут вперед и заранее вырабатывать эффективный план управления трафиком. В настоящий момент аналогичные системы повсеместно внедряются в таких странах, как США, Великобритания, Дания и др. Для реализации подобной системы необходима математическая модель, которая наиболее приближена к реальной ситуации на дороге и учитывает интенсивность входного потока в определенный момент времени. Цель данной статьи — исследование математической модели и ее сравнение с реальными данными, полученными на перекрестках Москвы и Екатеринбурга.

Математическая модель регулируемого перекрестка. Исследуем описанную в статьях [4, 5] математическую модель, в которой движение автомашин на перекрестке моделируется с помощью марковских цепей. Воспользуемся моделью с непрерывным временем и сравним данные, полученные на реальных перекрестках и с помощью математической модели. Для определения интенсивности входного потока используем подход, аналогичный описанному в работе [6], где высчитывается длина очереди на перекрестках Индии и предлагаются решения для снижения интенсивности входного потока. Отметим, что существуют другие подходы и модели, например модель на основе марковских цепей с дискретным временем [7].

Стохастический процесс (процесс, поведение которого не является детерминированным) обладает марковским свойством, если условное распределение вероятностей будущих состояний процесса зависит только от нынешнего состояния, а не от последовательности событий, которые предшествовали этому. Процесс, обладающий этим свойством, называют марковским процессом. В построении математической модели примéним марковские процессы и примем допущение, что выбору подлежит лишь режим переключения светофора (время отображения зеленого и красного сигналов), который считается постоянным на достаточно большом промежутке времени.

Рассмотрим более подробно систему массового обслуживания S (СМО), описывающую проезд в одну сторону. Обслуживанием будем считать проезд автомашины перекрестка, более точно — пересечение стоп-линии и освобождение места для проезда следующей автомашины. Для расчета характеристик системы при движении автомашин в одну сторону по одной полосе можно применять одноканальную модель системы массового обслуживания с ограниченной очередью.

Пусть T — продолжительность цикла светофора (период функции $\mu(t)$), g — продолжительность зеленой фазы. Интенсивность обслуживания $\mu(t)$ можно задать периодической функцией

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0, & t - \left[\dfrac{t}{T}\right] T < g; \\ 0, & t - \left[\dfrac{t}{T}\right] T > g, \end{cases} \tag{1}$$

где $\left[\dfrac{t}{T}\right]$ — целая часть числа $\dfrac{t}{T}$; μ_0 — интенсивность проезда перекрестка при разрешающем сигнале светофора (сколько в среднем автомашин может проехать перекресток в данном направлении за 1 с при включенном разрешающем сигнале); t — время, с.

В качестве среднего времени обслуживания θ было выбрано среднее количество автомашин, пересекающих перекресток в данном направлении за единицу времени для случая, когда автомашин следуют одна за другой. Тогда интенсивность обслуживания $\mu = \theta^{-1}$.

Построим математическую модель движения на перекрестке, считая, что он образован пересечением двух однополосных дорог (встречное движение не учитывается). Рассмотрим подробно, как происходит изменение состояния системы на одной из пересекающихся дорог.

Основными параметрами описанной системы являются: T — длина полного цикла светофора; λ — интенсивность входного потока (авт/с); μ_0 — интенсивность потока обслуживания в «зеленой» фазе (авт/с); Q_0 — максимальная длина очереди; n — количество автомашин в очереди.

Рассматриваемая СМО (рис. 1) может находиться в следующих состояниях:

S_0 — отсутствие автомашин в данном направлении непосредственно перед стоп-линией; S_1 — одна автомашина совершает проезд; S_2 — одна автомашина совершает проезд перекрестка и одна находится перед ним и т. д.; S_n — все места в очереди заняты, т. е. участок дороги от предыдущего до рассматриваемого перекрестка (квартал в городских условиях) заполнен автомашинами.

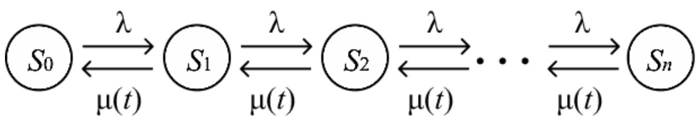

Рис. 1. Граф состояний системы

Через $p_i(t)$ обозначена вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_i. Естественно, выполняется условие нормировки:

$$p_0(t) + p_1(t) + \ldots + p_{n+1}(t) = 1. \tag{2}$$

В соответствии с теорией марковских цепей с непрерывным временем, необходимо составить дифференциальные уравнения Колмогорова:

$$\begin{cases} \dot{p}_0 = -\lambda p_0 + \mu(t) p_1; \\ \dot{p}_1 = -\lambda p_1 - \mu(t) p_1 + \lambda p_0 + \mu(t) p_2; \\ \dot{p}_n = -\lambda p_n - \mu(t) p_n + \lambda p_{n-1} + \mu(t) p_{n+1}; \\ \ldots \\ \dot{p}_{n+1} = -\lambda p_n - \mu(t) p_{n+1}. \end{cases} \tag{3}$$

Далее через $q(t)$ обозначается $(n+2)$-мерный вектор вероятностей состояний в момент времени *t*. Систему (3) можно записать как

$$\dot{q} = \left(\lambda A + \mu(t)B\right)q, \tag{4}$$

где $\mu(t)$ определяется равенством (1), матрицы A и B размерности $(n+2)\times(n+2)$ в системе (4) имеют вид соответственно

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Система дифференциальных уравнений (3) с условием нормировки (2) однозначно определяет вероятности состояний системы, если известно начальное распределение вероятностей:

$$q(0) = (p_0 \; p_1 \cdots p_n). \tag{6}$$

Система дифференциальных уравнений (3) может быть решена, например, с помощью пакета MATLAB. В MATLAB предусмотрены встроенные функции для решения дифференциальных уравнений с разными начальными условиями, например ode45, ode23; также MATLAB решает матричные уравнения, не вычисляя инверсию матрицы, что делает MATLAB удобным и точным инструментом для решения данной задачи [8]. В программной реализации зададим матрицы *A* и *B*, где количество состояний системы определяет количество строк и столбцов (в рассматриваемом случае — семь). В начальном распределении вероятностей (6) зададим $p_0 = 1$, остальные вероятности примем равными нулю. С помощью функции ode23 решим дифференциальные уравнения; равенство (4), время моделирования и начальное распределение вероятностей являются аргументами данной функции. Программная реализация модели в MATLAB представлена на Github [9].

Выполним моделирование длины очереди в соответствие с практическими данными, полученными на реальных перекрестках в Москве и Екатеринбурге, и сравним полученные результаты с представленной теоретической моделью.

Получение практических данных. В Москве на протяжении трех дней (27–29 апреля 2021 г.) измеряли длину очереди автомашин на пересечении улиц 5-я Парковая и Первомайская с 14:00 до 15:00 (рис. 2). Основная дорога имела четыре полосы движения, измерения проводили на двухполосной второстепенной дороге, при этом долю потока в 75 % наблюдали на основной дороге. Длину очереди на второстепенной дороге измеряли вручную до последней секунды красного сигнала светофора в соответствии с рекомендациями [10].

Длина очереди на перекрестке не превышала пропускную способность перекрестного движения и, следовательно, не препятствовала движению автомашин на перекрестке.

Рис. 2. Изображение перекрестка в г. Москве на карте 2ГИС

Длина полного цикла светофора на перекрестке T = 94 с, длительность «зеленой» фазы g = 55 с. Поток автотранспорта на второстепенной дороге сильный, однако времени «зеленой» фазы достаточно для того, чтобы весь автотранспорт за время g проехал. Интенсивность входного потока λ = 0,31 авт/с, интенсивность выходного потока μ_0 = 0,6 авт/с.

К концу «зеленой» фазы очереди на второстепенной дороге не оставалось, значение $Q(t)=0$. Интенсивность входного потока постоянно менялась, среднее время проезда перекрестка составляло 4 с. Длительность «зеленой» и «красной» фаз за наблюдаемый период не изменялась и позволяла не скапливаться длинной очереди на подъезде к перекрестку.

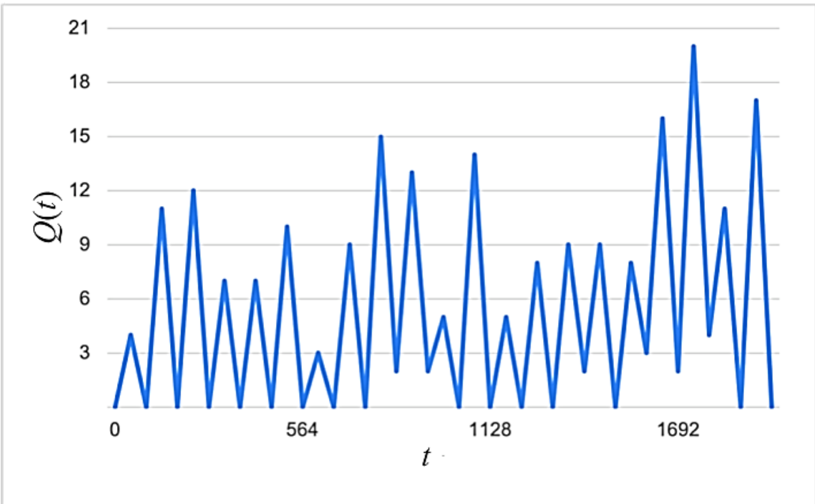

Рис. 3. Средняя длина очереди в первый день в г. Москве

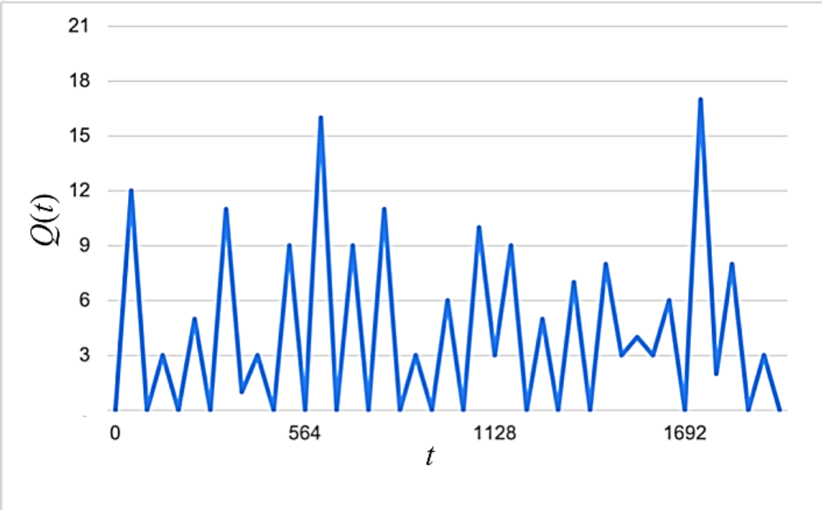

Рис. 4. Средняя длина очереди во второй день в г. Москве

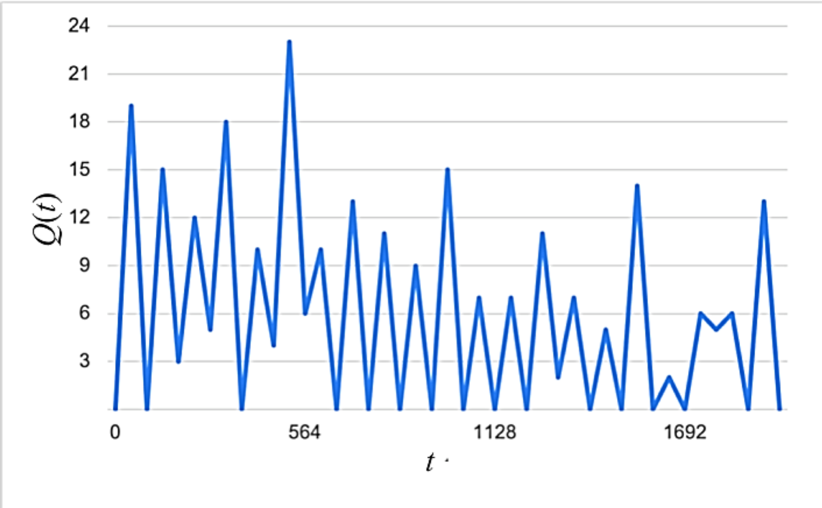

Рис. 5. Средняя длина очереди в третий день в г. Москве

На рис. 3–5 представлены графики, которые показывают реальную длину очереди на перекрестке в Москве.

Различия между ними и теоретической моделью, представленной в виде графика на рис. 6, выражаются в том, что интенсивность реального входного потока изменяется произвольным образом и в случайный момент времени на перекрестке появляется каждый раз разное количество автомашин [11]. При этом для теоретической модели были выбраны входные данные: начальное распределение вероятностей, длительность «зеленой» фазы светофора, время цикла светофора, интенсивность входного и выходного потоков.

В городе Екатеринбург был выбран перекресток равнозначных дорог, каждая из которых имеет по две полосы движения. По полосе, на которой проводили измерения, доля потока автомашин составляла порядка 47 % общего потока автомашин на перекрестке. Длину очереди измеряли 17 июня 2021 г. с 8:20 до 9:20 на пересечении улиц Учителей и Июльская (рис. 7). Длину очереди регистрировали до последней секунды «красной» фазы для полосы движения, на которой делали замеры.

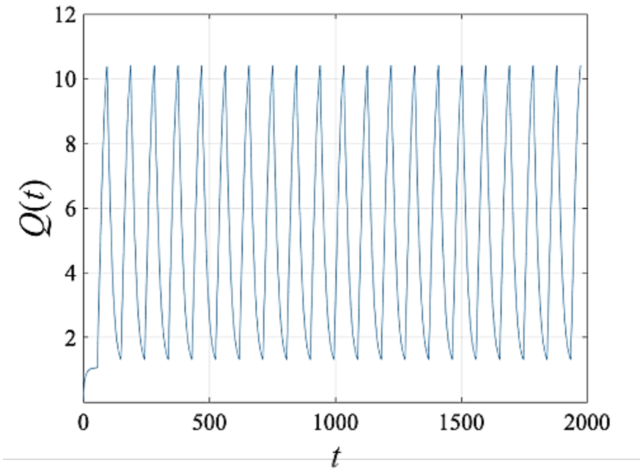

Рис. 6. Средняя длина очереди на второстепенной дороге в г. Москве в соответствии с теоретической моделью

Рис. 7. Изображение перекрестка в г. Екатеринбурге на карте 2ГИС

Длина полного цикла светофора на перекрестке T = 70 с, длительность «зеленой» фазы g = 35 с. Интенсивность входного потока λ = 0,4 авт/с, интенсивность выходного потока μ_0 = 0,2 авт/с. На рис. 8 представлен график, который показывает реальную длину очереди на перекрестке в Екатеринбурге.

В 8:20 на данном перекрестке присутствует высокая интенсивность входного потока, наблюдалось нередкое нарушение правил дорожного движения (ПДД): проезд на красный свет, выстраивание автотранспорта в две очереди (одна только для поворота налево) и т. д. На рис. 9 показана теоретическая модель на основе аналогичных входных данных.

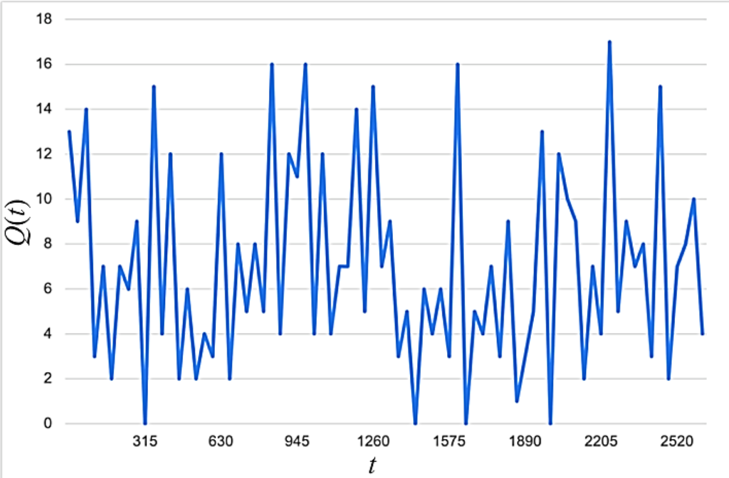

Рис. 8. Средняя длина очереди на перекрестке в г. Екатеринбурге

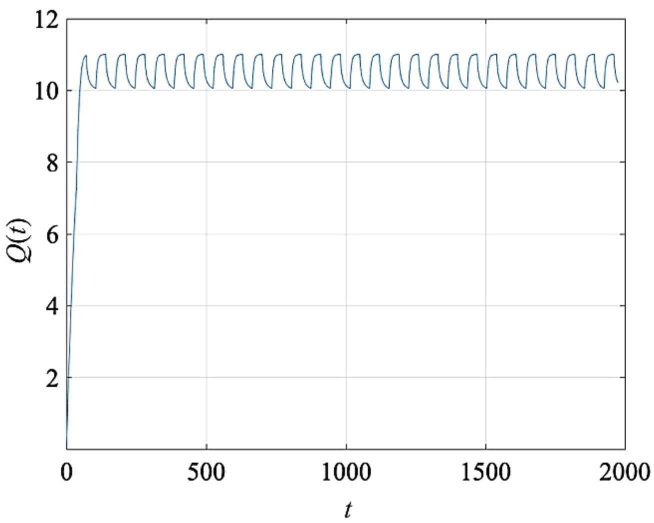

Рис. 9. Средняя длина очереди перекрестка в г. Екатеринбурге в соответствии с теоретической моделью

Сравнение результатов. Оценим расхождение практических результатов и теоретической модели с помощью величины σ — среднеквадратичного отклонения, которое определяет, на сколько в среднем отклоняются конкретные измерения от их среднего значения:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}},$$

где x_i — разность между количеством машин на перекрестке в данный момент и количеством машин в соответствии с теоретической моделью за время i-го цикла (авт); $\overline{x}$ — среднее арифметическое всех x_i (авт); n — количество циклов.

При измерении на реальных перекрестках количество циклов было принято равным 21.

Результаты сравнения теоретической модели и практических данных, вычислено среднее арифметическое и среднеквадратичное отклонение результатов каждого из дней измерений. приведены в таблице.

Значения показателей сравнения теоретической модели и результатов измерений

Параметр	Москва			Екатеринбург
	День 1	День 2	День 3	
σ	5,509	3,689	7,009	9,914
$\overline{x}$	3,185	3,031	3,793	3,544

В Москве характер дорожного движения более равномерный и в большей степени соответствует математической модели. В соответствии с математической моделью в Екатеринбурге перед перекрестком постоянно присутствует очередь как минимум из 10 автомашин. Текущие настройки перекрестка в Екатеринбурге не рассчитаны на высокую интенсивность входного потока, что говорит о недостаточно эффективной организации движения на перекрестке. Практические данные показывают, что участники дорожного движения стремятся быстрее проехать перекресток, при этом иногда нарушая ПДД. Указанные причины объясняют большее отклонение практических данных на перекрестке в Екатеринбурге от данных математической модели. Кроме того, использованная математическая модель накладывает ограничение на количество состояний и фиксированное значение входного потока, что неизбежно приводит к различиям с практическими данными.

Заключение. В работе исследована математическая модель, описывающая проезд автомашин через регулируемый перекресток. Приведены соотношения для нахождения стационарного периодического режима работы системы для вычисления средней длины очереди по входным параметрам. Модель, описывающая изменение интенсивности проезда в зависимости от времени с момента включения зеленого сигнала, реализована в системе MATLAB. Проведены экспериментальные исследования на реальных перекрестках, сравнение полученных данных с данными математической модели, реализованной в MATLAB, и анализ результатов. Анализ показал, что исследованная математическая модель с хорошей точностью отражает характер движения на перекрестке при условии грамотной организации движения и соблюдения участниками движения ПДД.

Литература

[1] Четверушкин Б.Н., Трапезникова М.А., Фурманов И.Р. и др. Макро- и микроскопические модели для описания движения автотранспорта на многополосных магистралях. *Труды МФТИ,* 2010, № 4, с. 163–168.

[2] Кашталинский А.С. Снижение задержек на регулируемых перекрестках с учетом временной неравномерности транспортных потоков. *Транспортное планирование*

и моделирование. Сб. тр. Межд. науч.-практ. конф. СПб., Изд-во СПбГАСУ, 2016, с. 74–82.

[3] Светофорных дел мастер: интервью с инженером службы эксплуатации. *mos.ru: веб-сайт*. URL: https://www.mos.ru/news/item/26983073/ (дата обращения: 21.04.2021).

[4] Завалищин Д.С., Тимофеева Г.А. Математическая модель регулируемого перекрестка. *Транспорт Урала*, 2008, № 2, с. 92–97.

[5] Завалищин Д.С., Тимофеева Г.А. Исследование математической модели регулируемого перекрестка. *Труды ИММ УрО РАН*, 2009, т. 15, № 4, с. 108–119.

[6] Parmar D., Gore N., Rathva D. et al. Modelling queuing of vehicles at signalized intersection. In: Transportation research. Springer, 2017, pp. 557–565. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-32-9042-6_44

[7] Бабичева Т.С. Методы теории массового обслуживания при исследовании и оптимизации движения на управляемых перекрестках. *Труды МФТИ*, 2015, № 2, с. 119–130.

[8] Документация MATLAB. *docs.exponenta.ru: веб-сайт*. URL: https://docs.exponenta.ru/matlab/index.html (дата обращения: 21.06.2021).

[9] Математическая модель движения автотранспорта на регулируемом перекрёстке. *github.com: веб-сайт*. URL: https://github.com/DariaMinina/intersection_project (дата обращения: 21.06.2021).

[10] Методические рекомендации по разработке и реализации мероприятий по организации дорожного движения. Министерство транспорта Российской Федерации. Приказ от 26 декабря 2018 года N 479.

[11] Кашталинский А.С., Малюгин П.Н., Петров В.В. Методика определения оптимальных параметров многопрограммного регулирования на изолированных перекрестках. *Вестник СибАДИ*, 2017, № 3, с. 53–62. DOI: https://doi.org/10.26518/2071-7296-2017-3(55)-53-62

Минина Дарья Николаевна — студентка кафедры «Системы автоматизированного проектирования», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Козов Алексей Владимирович, старший преподаватель кафедры «Системы автоматизированного проектирования», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Минина Д.Н. Моделирование в Matlab движения автомашин на регулируемом перекрестке. *Политехнический молодежный журнал*, 2022, № 02(67). http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2022-02-774

MODELING THE MOVEMENT OF CARS AT A REGULATED INTERSECTION IN MATLAB

D.N. Minina

daria.minina1@outlook.com
SPIN-code:

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article is devoted to the study of a mathematical model of the vehicles movement at a controlled intersection. A mathematical model is needed to improve the regulation of the traffic flow and increase the throughput of the intersection. To simulate traffic at an intersection with four lanes, a mathematical model was selected and implemented in the MATLAB system, in which the movement of vehicles is modeled using Markov chains with continuous time. Several measurements were made at intersections in Moscow and Yekaterinburg and the values of the average queue length at regulated intersections were obtained. An analysis of the results obtained is presented, a comparison of the mathematical model with the obtained experimental data is performed, and the standard deviation between the real data and the results of mathematical modeling is calculated.

Keywords

Mathematical model, controlled intersection, queuing system, traffic at the intersection, Markov process, traffic signaling, MATLAB

Received 24.01.2022
© Bauman Moscow State Technical University, 2022

References

[1] Chetverushkin B.N., Trapeznikova M.A., Furmanov I.R. et al. Macro- and microscopic models for description of transport motion on multilane roads. *Trudy MFTI* [Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology], 2010, no. 4, pp. 163–168 (in Russ.).

[2] Kashtalinskiy A.S. [Reducing delays on signaled crossings taking into account time irregularity of traffic]. *Transportnoe planirovanie i modelirovanie. Sb. tr. Mezhd. nauch.-prakt. konf.* [Ttransport Planning and Modeling. Proc. Int. Sci.-Pract. Conf.]. Sankt-Petersburg, Izd-vo SPbGASU Publ., 2016, pp. 74–82 (in Russ.).

[3] Svetofornykh del master: interv'yu s inzhenerom sluzhby ekspluatatsii [Master of treaffic lights: interview with exploitation engineer]. *mos.ru: website* (in Russ.). URL: https://www.mos.ru/ news/item/26983073/ (accessed: 21.04.2021).

[4] Zavalishchin D.S., Timofeeva G.A. Mathematical analysis of a signalled crossing. *Transport Urala* [Transport of the Urals], 2008, no. 2, pp. 92–97 (in Russ.).

[5] Zavalishchin D.S., Timofeeva G.A. Study on mathematical model of a signaled crossing. *Trudy IMM UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of RAS], 2009, vol. 15, no. 4, pp. 108–119 (in Russ.).

[6] Parmar D., Gore N., Rathva D. et al. Modelling queuing of vehicles at signalized intersection. In: Transportation research. Springer, 2017, pp. 557–565. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-32-9042-6_44

[7] Babicheva T.S. Use of queuing theory at research and traffic optimization on the signal-controlled road intersections. *Trudy MFTI* [Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology], 2015, no. 2, c. 119–130 (in Russ.).

[8] MATLAB documentation. *docs.exponenta.ru: website* (in Russ.). URL: https://docs.exponenta.ru/ matlab/index.html (accessed: 21.06.2021).
[9] Matematicheskaya model' dvizheniya avtotransporta na reguliruemom perekrestke [Mathematical model of traffic on a signaled crossing]. *github.com: website*. URL: https://github.com/DariaMinina/intersection_project (accessed: 21.06.2021).
[10] Metodicheskie rekomendatsii po razrabotke i realizatsii meropriyatiy po organizatsii dorozhnogo dvizheniya [Methodological recommendations on development and realization of traffic organization efforts]. Ministerstvo transporta Rossiyskoy Federatsii. Prikaz ot 26 dekabrya 2018 goda N 479 [Ministry of Transport of the Russian Federation. Decree of 26 December 2018 No 479] (in Russ.).
[11] Kashtalinskiy A.S., Malyugin P.N., Petrov V.V. Method of determining optimal multi-program control parameters on isolated intersections. *Vestnik SibADI* [The Russian Automobile and Highway Industry Journal], 2017, no. 3, pp. 53–62. DOI: https://doi.org/ 10.26518/2071-7296-2017-3(55)-53-62 (in Russ.).

Minina D.N. — Student, Department of Computer-Aided Design Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Kozov A.V., Senior Lecturer, Department of Computer-Aided Design Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:
Minina D.N. Modeling the movement of cars at a regulated intersection in Matlab. *Politekhnicheskiy molodezhnyy zhurnal* [Politechnical student journal], 2022, no. 02(67). http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2022-02-774.html (in Russ.).