

РАСЧЕТ ГИБКИХ АРОК ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

С.В. Друзяк

druzyak.sergei@gmail.com

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена методика построения упругой характеристики стержневой конструкции на всех стадиях процесса нелинейного деформирования. С помощью стержневой модели, отражающей с линейно-упругие свойства материала, решена краевая задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. В качестве метода решения нелинейной задачи выбран итерационный метод продолжения по параметру. Решение представляет собой схему предиктор — корректор. Этап предиктора состоит в экстраполяции решения с помощью полиномов Лагранжа, а этап коррекции представляет собой уточнение полученных экстраполяцией результатов с помощью модифицированного метода Ньютона. Показано сравнение полученных результатов авторской программы с результатами решения задачи в конечно-элементном комплексе ANSYS Mechanical APDL.

Ключевые слова

Метод продолжения по параметру, нелинейное деформирование, краевая задача, коразмерность, предельная точка, бифуркационная точка, упругая характеристика, прохлопывание, управляющий параметр

Поступила в редакцию 26.09.2022

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022

Введение. Предопределение возможного поведения гибких элементов в процессе их нелинейного деформирования является особенно важной задачей в тех случаях, когда в процессе эксплуатации работа всей машины будет зависеть от того, как именно деформируется упругая деталь. Так, не допускается, чтобы вытесняющая мембрана ракеты в процессе работы изогнулась каким-либо иным образом, кроме того, какой был задан ей конструкторами. В противном случае может быть нарушена непрерывность или скорость подачи топлива, а это, в свою очередь, может привести к самым разным негативным последствиям. О потребности в таких исследованиях поведения систем в закритической области можно прочитать в работах [1, 2].

Представим визуализацию процесса в трехмерном пространстве (рис. 1). По осям отложим нагрузку P и прогиб ν в характерной точке, а также угол поворота в характерной точке арки θ . При симметричной потере устойчивости вся кривая равновесных состояний лежит в плоскости $P-\nu$, параметр θ остается нулевым. При несимметричной форме кривая уходит по углу θ (см. рис. 1), получает пространственную траекторию и после полного прохлопывания арки начинает сближаться с симметричным решением.

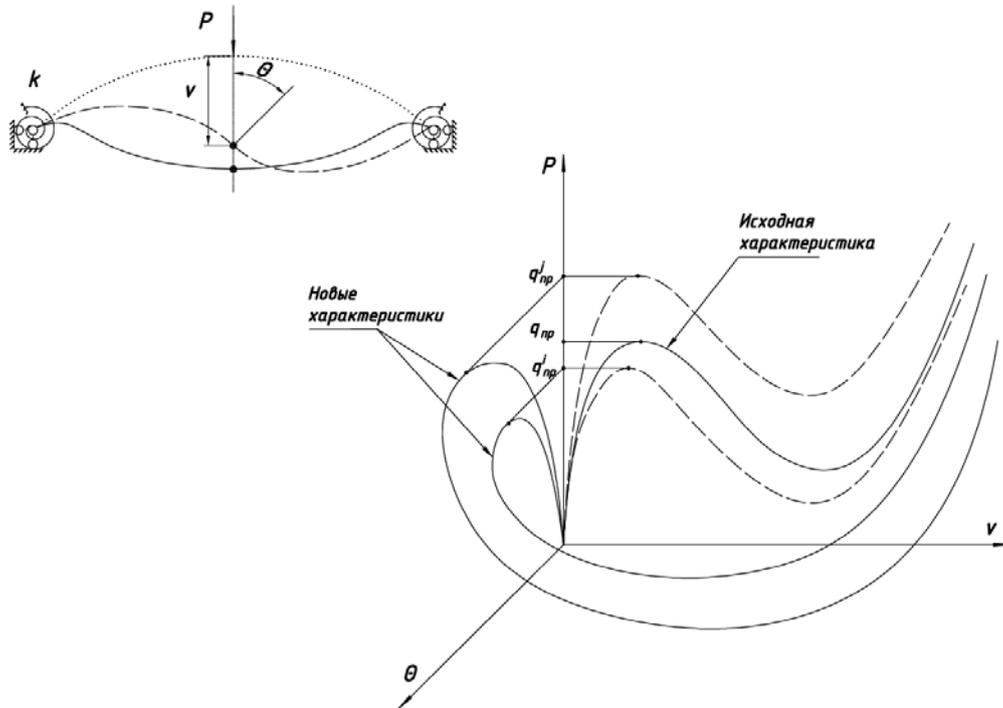


Рис. 1. Схематичное представление процесса ветвления упругой характеристики для актуальной расчетной схемы ($q_{пр}^n$ — проекции предельных точек упругих характеристик)

В литературе для задач устойчивости вводятся понятия бифуркационных и предельных точек рабочей характеристики. Под предельной точкой понимают такую точку, для которой одна из величин (например, нагрузка) принимает максимальное значение. Под бифуркационной точкой понимают такую, в которой возникает возможность различной дальнейшей реализации решения, однако в контексте выполняемой работы бифуркационную точку будем трактовать как проекцию предельной точки пространственной траектории на плоскость $P-v$.

Представленная работа посвящена изучению взаимосвязи формы деформирования стержня и положения бифуркационных и предельных точек упругих характеристик. Исследование основано на предположении о том, что в реальных конструкциях всегда присутствуют несовершенства, которые могут заставить систему деформироваться тем или иным образом. Показано, что на основе полученных картин перестроек и исследовании поведения конструкции вокруг бифуркационной точки можно сделать вывод о том, как именно поведет себя система в процессе деформирования.

Метод продолжения по параметру. Основной задачей, возникающей при численном анализе процесса деформирования гибкого стержня, является опре-

деление рабочей характеристики, т. е. зависимости между перемещением характерной точки элемента и изменением приложенной к нему нагрузки P . Наиболее часто в этом случае применяют *метод продолжения по параметру*, описанный в [3]. Предположим, что в задаче имеется один параметр a , тогда систему уравнений можно записать в виде

$$F(x, a) = 0.$$

Допустим, что нужно найти решения x_i^* при значениях $a_0 < a_1 < \dots < a_N$, причем при $a = a_0$ задача решается тривиально или достаточно просто. Если x_0^* может быть вычислено и модуль $|a_1 - a_0|$ мал, то есть основания полагать, что x_0^* достаточно близко к x_1^* , чтобы быть подходящим начальным приближением для решения уравнения $F(x, a_1) = 0$. Продолжая этот процесс, используем каждое найденное решение предыдущей задачи в качестве начального приближения для решения следующей задачи — так описывается этот метод в работе [4]. Таким образом, метод продолжения решения по параметру позволяет получать достаточно хорошие начальные приближения.

При анализе многопараметрических процессов деформирования гибких стержней семейство нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в обыкновенных или частных производных сводится к многопараметрическому семейству систем нелинейных разрешающих уравнений [5–7]:

$$F(X^{(1)}, X^{(2)}) = 0.$$

В общем случае система порядка m содержит m неизвестных $X_j^{(1)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), являющихся внутренними параметрами, характеризующими состояние системы (или ее размерность), а также зависит от переменных величин $X_j^{(2)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), трактуемых как внешние или управляющие параметры, определяющие *кормазмерность* задачи.

Отметим, что решение сложной многопараметрической задачи можно свести к изучению последовательности однопараметрических задач, для которых дискретно изменяется какой-либо заранее выбранный из всего множества параметр.

Метод сегментации. Заметим, что решаемую задачу недостаточно рассмотреть как простую двухточечную, поскольку в этом случае будет получена только симметричная форма прогиба арки. Для рассмотрения несимметричных форм деформирования необходимо разделить весь интервал интегрирования на два участка-сегмента.

Точку разбиения совместим с точкой приложения сосредоточенной нагрузки. Расширим начальный вектор неизвестных, включив в него компоненты в начале второго сегмента [5]:

$$\bar{X} = \{U_n^1, V_n^1, M_n^1, u_n^2, v_n^2, \theta_n^2, U_n^2, V_n^2, M_n^2\}^T,$$

где U_n^1 — горизонтальная составляющая результирующей внутренней силы в сечении стержня в начале первого сегмента; V_n^1 — вертикальная составляющая результирующей внутренней силы в сечении стержня в начале первого сегмента; M_n^1 — внутренний момент в сечении стержня в начале первого сегмента; u_n^2 — горизонтальное перемещение сечения стержня в начале второго сегмента; v_n^2 — вертикальное перемещение сечения стержня в начале второго сегмента; θ_n^2 — угол поворота сечения стержня в начале второго сегмента; U_n^2 — горизонтальная составляющая результирующей внутренней силы в сечении стержня в начале второго сегмента; V_n^2 — вертикальная составляющая результирующей внутренней силы в сечении стержня в начале второго сегмента; M_n^2 — внутренний момент в сечении стержня в начале второго сегмента.

Теперь в роли граничных условий будут выступать условия стыковки в характерной точке — точке приложения сосредоточенной силы. Таким образом будет выполнено условие совместности перемещений теперь уже многоточечной краевой задачи, а также сохранено равновесие всех элементов конструкции.

Метод смены управляющего параметра Валишвили. Следующей сложностью, возникающей при решении краевой задачи итерационным методом продолжения по параметру, служит то обстоятельство, что метод прекрасно себя показывает на устойчивой докритической части упругой характеристики. Однако в окрестности критической точки, в которой система, преодолевая энергетический барьер, скачком переходит к несмежной форме равновесия, решение начинает расходиться. Связано это с тем, что при подходе к особой точке матрица Якоби может оказаться вырожденной.

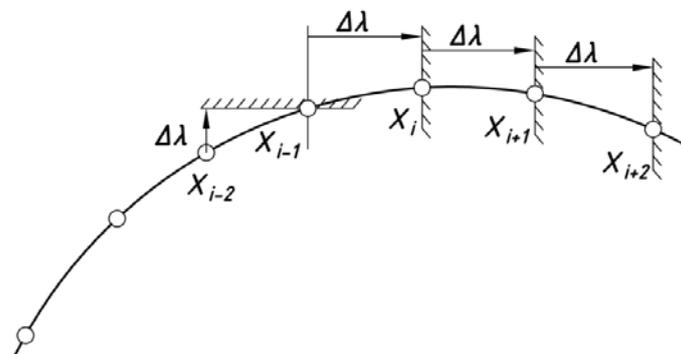


Рис. 2. Геометрическая интерпретация варианта Валишвили:

$\Delta\lambda$ — шаг по текущему параметру продолжения; X_i — вектор неизвестных в i -й точке

Задачу прохождения критических точек подробно изучил Н.В. Валишвили в работе [8] и в дальнейшем применил свои исследования к реальным задачам [9]. Предложенный им метод смены управляющего параметра заключается в том, что при подходе к окрестности критической точки нужно «перескочить» с одного управляющего параметра, например, силы, на другой — параметр изменения прогиба в центре арки, для которого в этой области критической точки не существует. Для выбора параметра продолжения на новом шаге выясняют, какая компонента получила наибольшее приращение на предыдущем шаге. Метод смены управляющего параметра получил развитие в работах [10, 11]. Геометрическая интерпретация метода Валишвили представлена на рис. 2.

Расчетная схема. Рассматриваемая стержневая система представлена на рис. 3.

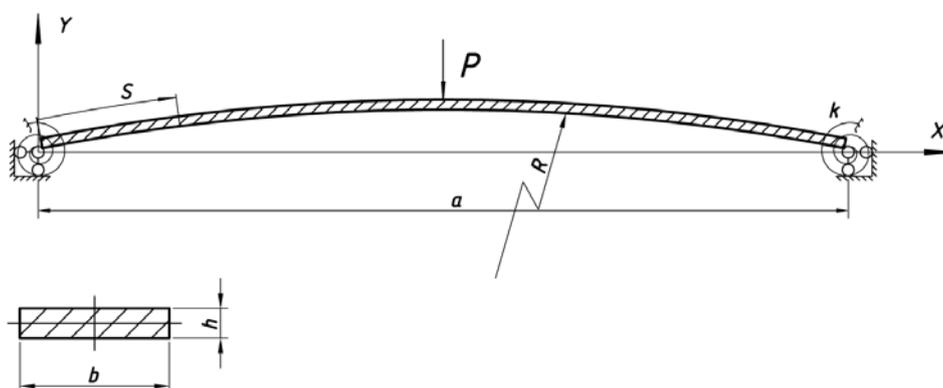


Рис. 3. Расчетная схема:

s — независимая Лагранжева координата; k — жесткость спиральной пружины, Н · мм)

Геометрические и механические характеристики системы указаны ниже:

Материал	Низкоуглеродистая сталь
Размер основания a , мм	30,75
Радиус кривизны R , мм	85
Высота стержня h , мм	0,15
Ширина стержня b , мм	10
Модуль упругости E , Мпа	$2,1 \cdot 10^5$
Коэффициент Пуассона μ	0,25

Размеры стержня выбирают таким образом, чтобы не допустить изгиба в плоскости, перпендикулярной плоскости XU .

Результаты расчета. При решении поставленной задачи будем отталкиваться от предположения о том, что в реальных системах могут присутствовать те или иные факторы, способные повлиять на форму деформирования конструкции. В качестве таких факторов выберем: а) влияние способа закрепления,

б) наличие эксцентриситета при приложении силы. Рассмотрим каждый из факторов по отдельности. При этом каждый раз при получении несимметричной деформации будем повторять расчет, заставляя систему деформироваться симметрично (этого можно достичь, запретив поворот срединного сегмента стержня). И наоборот, если система сама по себе будет деформироваться симметрично, добьемся того, чтобы она непременно деформировалась асимметрично. Сравнивая упругие характеристики для «натуральной» и «вынужденной» формы деформирования, можно сделать выводы о преимуществе той или иной формы по взаимоположению предельных и особых точек этих упругих характеристик.

Влияние жесткости конструкции на форму потери устойчивости. Оценим, как жесткость системы влияет на ее способность деформироваться тем или иным образом. Построим графики, на которых изображена форма прогиба стержня при различных значениях жесткости спиральной пружины. Случаю нулевой жесткости при этом будет соответствовать неподвижное шарнирное закрепление. При значительном увеличении жесткости мы получим арку, жестко защемленную по обоим краям. Значения жесткости, полученные между этими крайними положениями, дадут нам систему промежуточной жесткости. Для наглядности на рис. 4–6 показаны как устойчивые, так и неустойчивые равновесные состояния.

На рис. 6 изображены случаи деформирования при различных значениях жесткости k .

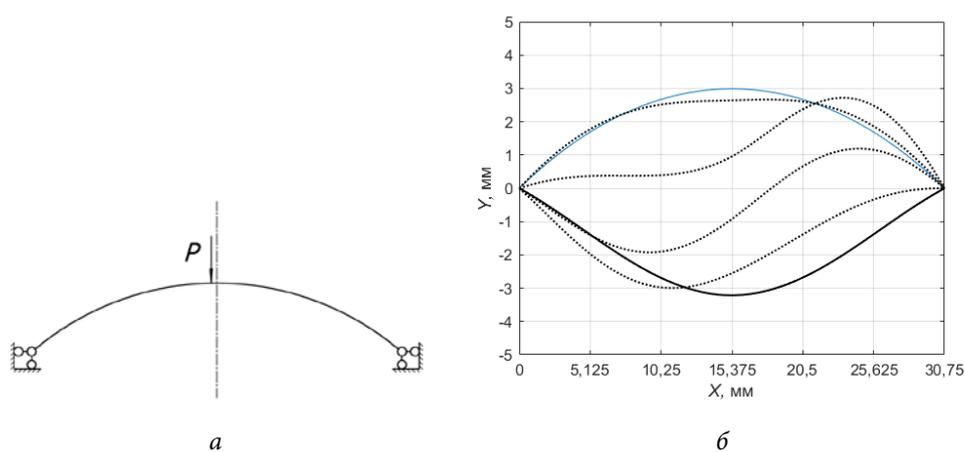


Рис. 4. Изменение формы деформированного стержня при неподвижном шарнирном закреплении:

a — схема деформирования; *b* — зависимость прогиба в характерной точке арки от прикладываемой силы

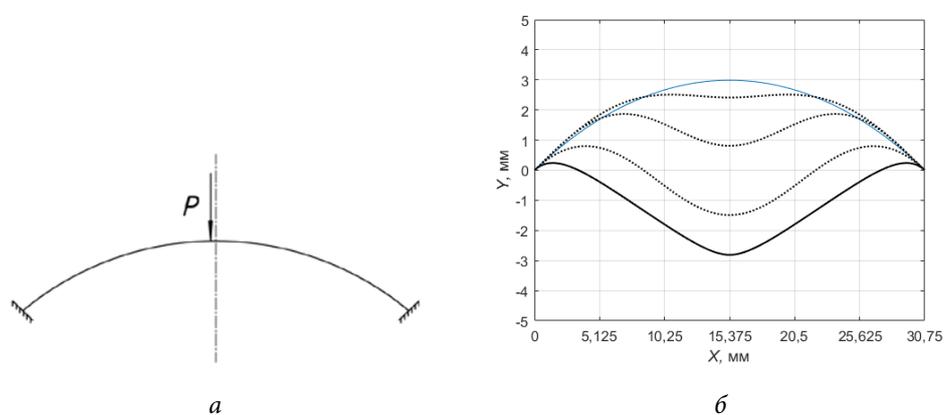


Рис. 5. Изменение формы деформированного стержня, жестко защемленного по краям:

a — схема деформирования; b — зависимость прогиба в характерной точке арки от прикладываемой силы

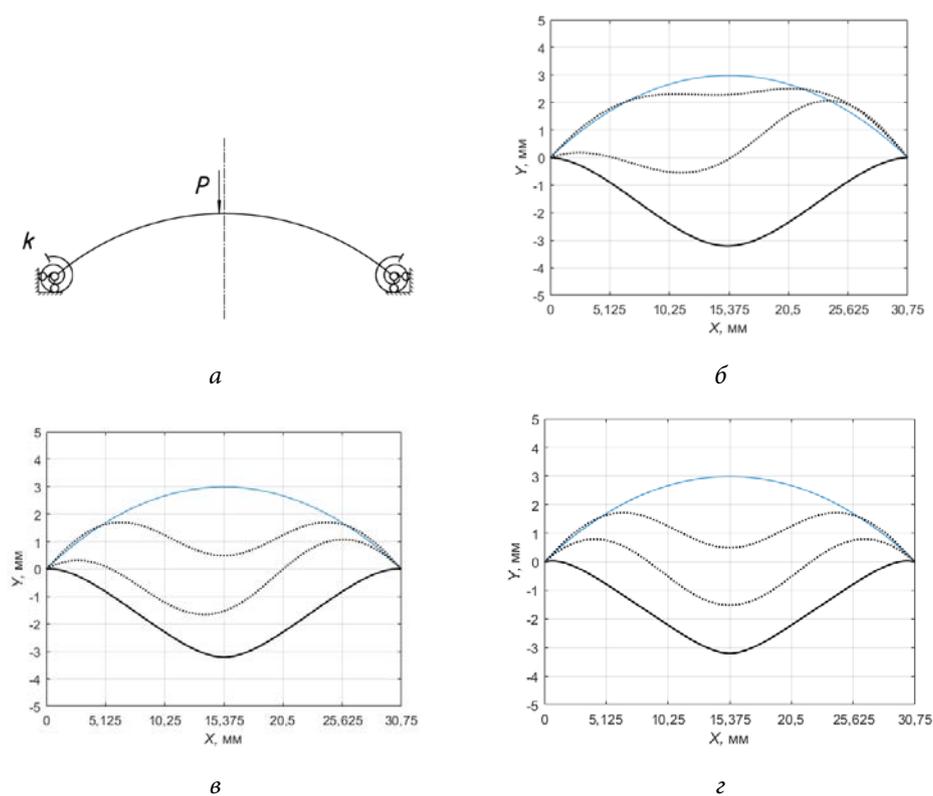


Рис. 6. Изменение формы деформированного стержня для системы промежуточной жесткости:

a — схема деформирования; b - $г$ — зависимость прогиба в характерной точке арки от прикладываемой силы. (b — $k = 100$ Н·мм; $в$ — $k = 500$ Н·мм; $г$ — $k = 1000$ Н·мм)

При анализе полученных результатов становится понятно, что для более податливой системы характерны более сложные формы деформирования. Увеличение жесткости спиральной пружины (и, как следствие, увеличение жесткости всей системы) сглаживает несимметричную форму прогиба, постепенно приводя ее к симметричной форме (эта способность, конечно, зависит от величины несовершенств в системе).

Влияние различной жесткости закрепления. Предположим, что жесткость закрепления спиральных пружин на левом и правом краю стержня неодинакова. При этом будем считать, что нагрузка прикладывается без эксцентриситета, другие возможные несовершенства также отсутствуют. Расчетная схема представлена на рис. 7.

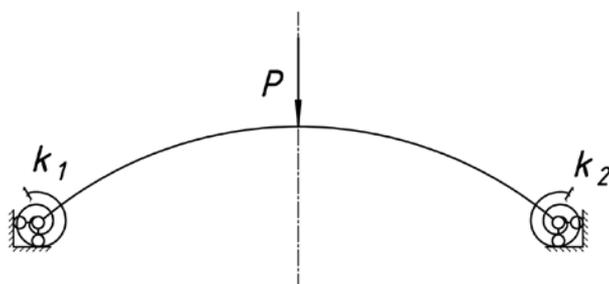


Рис. 7. Расчетная схема для задачи с различной жесткостью левой и правой спиральных пружин

Безразмерные жесткости для левого и правого торца соответственно равны $k_1 = 50 \text{ Н} \cdot \text{мм}$, $k_2 = 60 \text{ Н} \cdot \text{мм}$. По результатам расчета построим на одном графике (рис. 8) две упругие характеристики и сравним их.



Рис. 8. Упругие характеристики для задачи с различной жесткостью левой и правой спиральных пружин

На рис. 8 видно, что предельная точка для случая асимметричного деформирования расположена ниже предельной точки для системы, заставленной деформироваться симметрично, а значит, при деформировании стержня косая симметрия имеет преимущество перед прямой симметрией.

Влияние эксцентриситета приложения нагрузки. Теперь рассмотрим наиболее очевидную причину, по которой стержень может начать деформироваться несимметрично, — наличие эксцентриситета. закрепление одинаково для левого и правого торца, другие возможные несовершенства также отсутствуют. расчетная схема представлена на рис. 9.

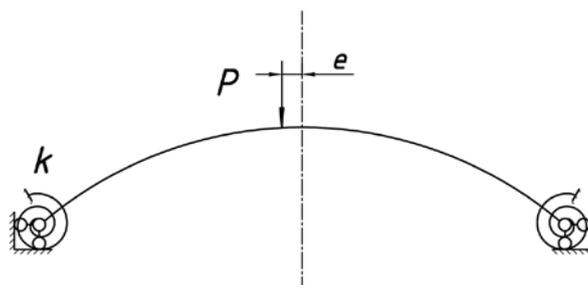


Рис. 9. Расчетная схема для задачи, в которой нагрузка прикладывается к системе с эксцентриситетом $e = 0,15$ мм; $k = 150$ Н·мм

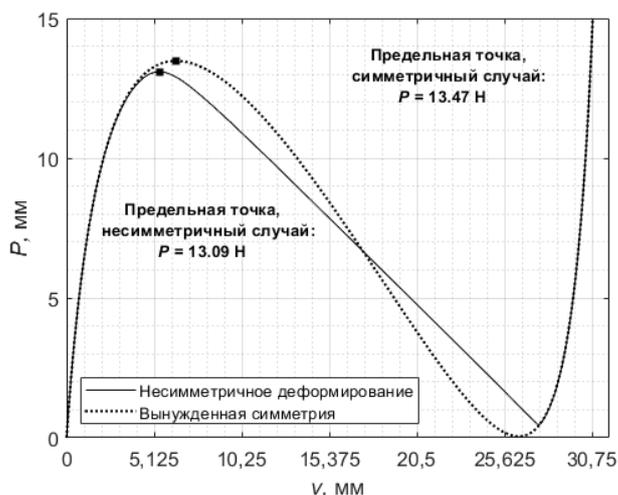


Рис. 10. Упругие характеристики для задачи, в которой нагрузка прикладывается к системе с эксцентриситетом $e = 0,15$ мм; $k = 150$ Н·мм

Оценим положение критических точек на рис. 10. Критическая точка, соответствующая асимметричному случаю деформирования, оказывается ниже критической точки, которая соответствует случаю симметричной деформации. Это

говорит о том, что при наличии эксцентриситета в системе однозначно будет реализовываться асимметричное деформирование.

Проверка симметричной формы деформирования. Для достижения поставленной задачи необходимо изолировать простейшую форму деформирования арки, добавив в систему дополнительное закрепление (рис. 11). В качестве закрепления предположим пружину, работающую на сжатие жесткости c , Н/мм. Рассмотрим новую схему для жестко защемленного гибкого стержня, изображенную на рис. 11. Полученные в результате расчета упругие характеристики представлены на рис. 12, 13.

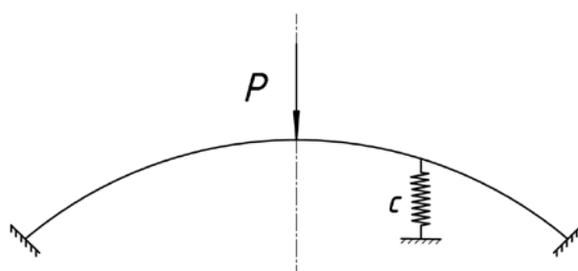


Рис. 11. Расчетная схема для задачи с введением дополнительного закрепления для получения асимметричной формы прогиба, $c = 50$ Н/мм

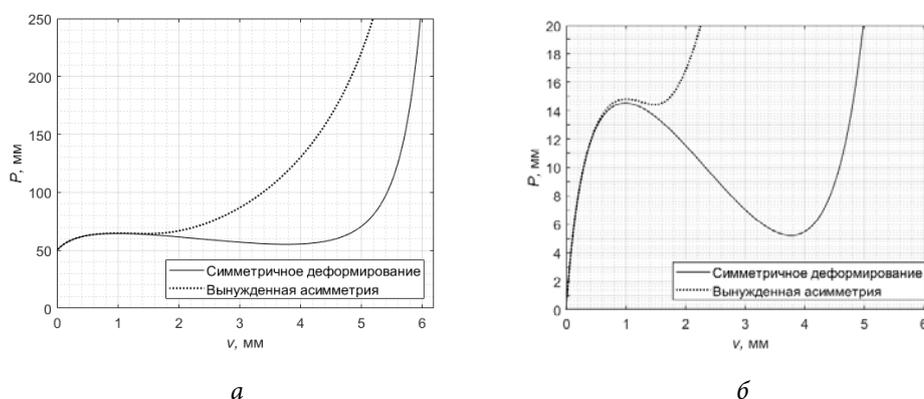


Рис. 12. Упругие характеристики для задачи с введением дополнительного закрепления для получения асимметричной формы прогиба, $c = 50$ Н/мм:
a — общий вид; *б* — общий вид (увеличено)

Полученный результат подтверждает выдвинутую нами гипотезу. Добавление в систему пружины с собственной жесткостью позволяет наложить на конструкцию дополнительную связь и изолировать симметричную форму деформирования, таким образом заставив гибкий стержень деформироваться асимметрично. Вместе с этим картина была ожидаемой: предельная точка упругой

характеристики, соответствующей дозакрепленной конструкции оказалась выше предельной точки для исходной упругой характеристики, полученной при симметричной форме деформирования. Это означает, что в реальности при симметричной нагрузке и закреплении системе также предопределено деформироваться симметрично.

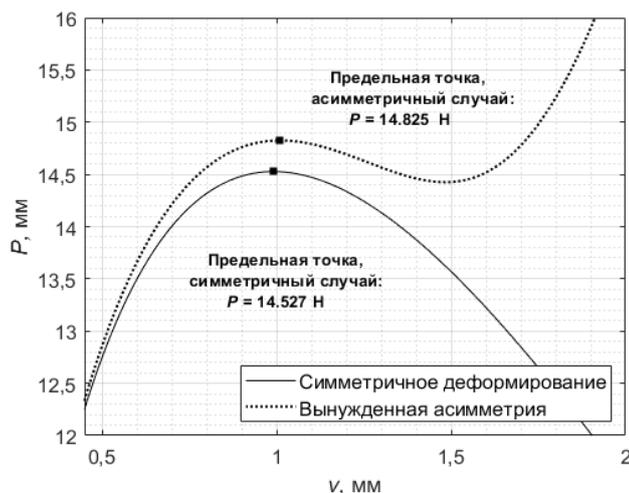
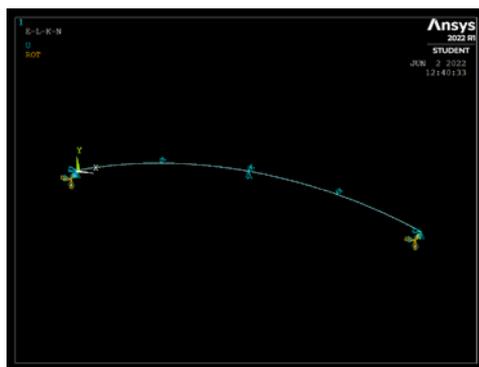
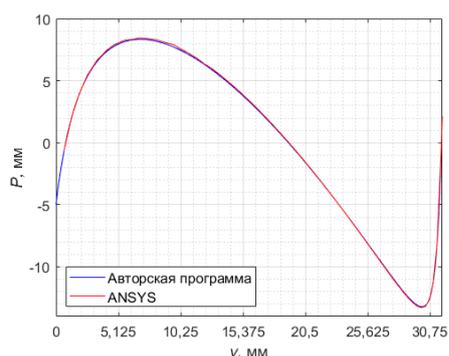


Рис. 13. Упругие характеристики для задачи с введением дополнительного закрепления для получения асимметричной формы прогиба, детальное изображение, $c = 50$ Н/мм

Решение задачи в конечно-элементном комплексе ANSYS. Для проверки результатов задача также была решена методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS APDL. При создании конечно-элементной модели стержня использовали балочный элемент BEAM 188. Для создания спиральных пружин применяли элемент COMBIN 14 с настройками для Torsion Spring.



а



б

Рис. 14. Решение задачи в ANSYS Mechanical APDL:

а — расчетная схема; б — сравнение рабочих характеристик авторской программы и ANSYS при жесткости пружин $k = 150$ Н · мм

Для получения результатов решения нелинейной задачи в модуле решения была указана опция учета больших прогибов. Для увеличения продуктивности и уменьшения времени решения задачи можно воспользоваться встроенным методом длины дуги (arc-length method). Расчетная схема, а также диаграмма со сравнением результатов расчета представлены на рис. 14.

Заключение. В результате работы была написана прикладная программа, позволяющая численно моделировать поведение гибкой арки при различных способах закрепления и нагружения. Построены картины перестроек и установлена связь между формой потери устойчивости системы и взаимоположением критических точек упругих характеристик. Выполнена проверка полученных результатов с помощью конечно-элементного пакета ANSYS Mechanical APDL.

Литература

- [1] Арнольд В.И. Теория катастроф. М., Наука, 1990.
- [2] Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М., Мир, 1980.
- [3] Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. М., Наука, 1988.
- [4] Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М., Наука, 1986.
- [5] Гаврюшин С.С. Разработка методов расчета и проектирования упругих оболочечных конструкций приборных устройств. Дисс. ... док. тех. наук. М., ГТУ, 1994.
- [6] Гаврюшин С.С. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования тонких упругих оболочек. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 115–130.
- [7] Гаврюшин С.С., Николаева А.С. Метод смены подпространства управляющих параметров и его применение к задачам синтеза нелинейно деформируемых осесимметричных тонкостенных конструкций. *Изв. РАН. МТТ*, 2016, № 3, с. 120–130.
- [8] Валишвили Н.В. Об одном алгоритме решения нелинейных краевых задач. *ПММ*, 1968, т. 32, № 6, с. 1089–1096.
- [9] Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М., Машиностроение, 1976.
- [10] Riks E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *J. Appl. Mech.*, 1972, vol. 39, no. 4, pp. 1060–1065. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3422829>
- [11] Crisfield M.A. A fast Incremental/Iterative solution procedure that handles "snapthrough". *Comput. Struct.*, 1981, vol. 13, no. 1-3, pp. 55–62. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90108-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90108-5)

Друзяк Сергей Валентинович — бакалавр кафедры «Прикладная механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Гаврюшин Сергей Сергеевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Компьютерные системы автоматизации производства», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Друзяк С.В. Расчет гибких арок при больших прогибах. *Политехнический молодежный журнал*, 2022, № 10(75). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2022-10-828>

CALCULATION OF FLEXIBLE ARCHES FOR LARGE DEFLECTIONS

S.V. Druzyak

druzyak.sergei@gmail.com

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The method of constructing the elastic characteristic of a rod structure at all stages of the nonlinear deformation process is considered. Using a rod model reflecting the linear-elastic properties of the material, the boundary value problem for the system of nonlinear differential equations depending on the parameter is solved. The iterative method of continuation over the parameter is chosen as the method for solving the nonlinear problem. The solution is a predictor-corrector scheme. The predictor stage consists in extrapolation of the solution by means of the Lagrange polynomials and the corrector stage is the specification of the results obtained by extrapolation by means of the modified Newton method. The comparison of the results obtained by the author's program with the results of solving the problem in the ANSYS Mechanical APDL finite-element complex is shown.

Keywords

Parameter continuation method, nonlinear deformation, boundary value problem, codimension, limit point, bifurcation point, elastic characteristic, slamming, control parameter

Received 26.09.2022

© Bauman Moscow State Technical University, 2022

References

- [1] Arnold V.I. Teoriya katastrof [Theory of catastrophes]. Moscow, Nauka Publ., 1990 (in Russ.).
- [2] Poston T., Stewart I. Catastrophe theory and its applications. Courier Corp., 1996 (Russ. ed.: Teoriya katastrof i ee prilozheniya. Moscow, Mir Publ., 1980.)
- [3] Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. Problemy nelineynogo deformirovaniya [Problems of nonlinear deformation]. Moscow, Nauka Publ., 1988 (in Russ.).
- [4] Ortega J.M., Poole W.G. An introduction to numerical methods for differential equations. Pitman, 1981. (Rus. ed.: Vvedenie v chislennye metody resheniya differentsialnykh uravneniy. Moscow, Nauka Publ., 1986.)
- [5] Gavryushin S.S. Razrabotka metodov rascheta i proektirovaniya uprugikh obolocheknykh konstruktsiy pribornykh ustroystv. Diss. dok. tekh. nauk [Development of calculation and design methods for elastic shell structures of instrumentation devices. Kand. tech. sci. diss.]. Moscow Publ., GTU, 1994 (in Russ.).
- [6] Gavryushin S.S. Numerical analyses of the processes of thin elastic shells nonlinear deformation. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody* [Mathematical Modeling and Computational Methods], 2014, no. 1, pp. 115–130 (in Russ.).
- [7] Gavryushin S.S., Nikolaeva A.S. Method of change of the subspace of control parameters and its application to problems of synthesis of nonlinearly deformable axisymmetric thin-

- walled structures. *Izv. RAN. MTT*, 2016, no. 3, pp. 120–130 (in Russ.). (Eng. version: *Mech. Solids.*, 2016, vol. 51, no. 3, pp. 339–348.
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654416030110>)
- [8] Valishvili N.V. On one algorithm for solving of nonlinear boundary problems. *PMM*, 1968, vol. 32, no. 6, pp. 1089–1096 (in Russ.).
- [9] Valishvili N.V. Metody rascheta obolochek vrashcheniya na ETsVM [Method for calculation of rotation shells on the computer]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976 (in Russ.).
- [10] Riks E. The application of Newton’s method to the problem of elastic stability. *J. Appl. Mech.*, 1972, vol. 39, no. 4, pp. 1060–1065. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3422829>
- [11] Crisfield M.A. A fast Incremental/Iterative solution procedure that handles “snapthrough”. *Comput. Struct.*, 1981, vol. 13, no. 1-3, pp. 55–62.
DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90108-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90108-5)

Druzyak S.V. — B.Sc. Student, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Gavrushin S.S., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Computer systems of production automation, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:

Druzyak S.V. Calculation of flexible arches for large deflections. *Politekhnicheskii molodezhnyy zhurnal* [Politechnical student journal], 2022, no. 10(75).
<http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2022-10-828.html> (in Russ.).