УДК 004.021 DOI: 10.18698/2541-8009-2023-5-894

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗНОСТНОЙ И ВЕРОЯТНОСТНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

С.А. Крюков sergey.krykov.2806@gmail.com

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Проведен сравнительный анализ разностной и вероятностной вычислительных моделей для исследования уравнения теплопроводности с краевыми условиями I рода. Первая из них реализована явной пятиточечной схемой, а вторая — алгоритмом случайного блуждания. Предложенные подходы подтверждены моделированием температурного поля в тонкой прямоугольной пластине, подвергающейся воздействию внешних источников излучения. В ходе серии экспериментов удалось установить, что вероятностный метод для определения значения температуры в одной точке позволяет получить приблизительный результат от 2 до 200 раз быстрее в зависимости от числа испускаемых частиц и требует меньших затрат памяти по сравнению с разностным методом. Установлено, что если исследуемая точка расположена близко к одной из границ, то разница между результатами, полученными в ходе работы алгоритмов, составляет в среднем 1 °С, а если ее местоположение в середине пластины, то различия доходят до 3 °С. Вероятностная модель в большинстве случаев будет приводить к некорректному результату при малом числе узлов сетки. Между тем разностная модель показывает более точные значения и определяет тепловое поле полностью.

Ключевые слова

Моделирование температурного поля, эллиптическое уравнение, разностная схема, случайное блуждание частицы, краевые условия Дирихле, вероятностный метод, разностный метод

Поступила в редакцию 19.04.2023

Введение. Уравнение Пуассона — пример эллиптического дифференциального уравнения в частных производных [1]. Оно очень важно в науке, особенно в физике, потому что описывает поведение электрического и гравитационного потенциала [2], а также теплопроводность. В работе рассмотрена разностная и вероятностная вычислительные модели для исследования распределения температуры в тонкой металлической пластине. Основное внимание уделено быстроте и точности каждой из рассматриваемых схем.

Чтобы сравнить эти два подхода, сначала потребуется рассмотреть алгоритм для численного исследования модели вероятностным методом. Далее следует изучить принципы вероятностной вычислительной модели. После теоретического этапа разрабатывают программу и проводят эксперименты с замерами времени и определением поля температур. В конце выявляют преимущества, недостатки рассмотренных методов и определяют, какой из них лучше применять в том или ином случае.

На базе выполненного исследования можно будет делать выводы о том, с какой температурой нужно воздействовать на края объекта, чтобы достичь желаемого значения в отдельных его точках. Путем измерения показателей на локальном участке можно контролировать температурный режим у цифровых микросхем сверхбольшой интеграции.

Выбор математической модели. В качестве математической модели было выбрано уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

Она описывает двумерное температурное поле $u(x,y)$ в тонкой прямоугольной пластине с внешними размерами $a\times b$. Температуру по толщине пластины (третьей координате) принимают постоянной. Функция $f(x,y)$ описывает внутренние объемные источники тепловыделения, например, в результате поглощения излучения в полупрозрачном материале пластины. Излучение может представлять собой, например, узконаправленный луч лазера.

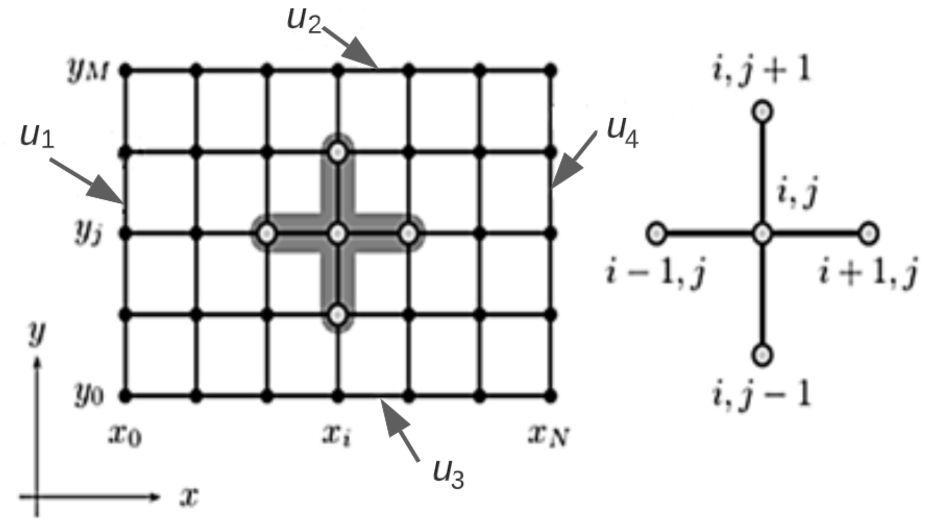
Значения на границах пластины задаются с помощью краевых условий I рода:

$$\begin{cases} x=0, & u(0,y)=u_1; \\ y=b, & u(x,b)=u_2; \\ y=0, & u(x,0)=u_3; \\ x=a, & u(a,y)=u_4, \end{cases}$$

$$u_i=\text{const}, \quad i=\overline{1,4}.$$

Алгоритм для численного исследования модели разностным методом. Идея метода конечных разностей решения краевых задач весьма проста и видна уже из самого названия: вместо производных в дифференциальном уравнении применяют их конечноразностные аппроксимации. Твердое тело представляют в виде совокупности узлов. Заменяя частные производные конечными разностями, на основе шаблона получают систему линейных алгебраических уравнений для определения температуры как локальной характеристики в каждом узле сетки [3].

Полученная схема является незамкнутой, для ее замыкания используют разностное представление граничных условий. В результате приходят к системе линейных алгебраических уравнений, которую решают численными методами.



Сетка и разностный шаблон для уравнения Пуассона

Рассмотрим явную разностную схему на основе пятиточечного шаблона «крест» (см. рисунок). Она будет иметь вид

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}=\left(\frac{u_{i+1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}}{h_x^2}+\frac{u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{h_y^2}\right)+f(x_i,y_j).$$

Выразив из разностной схемы величину $u_{i,j}^{n+1}$, получим рекуррентное соотношение

$$u_{i,j}^{n+1}=u_{i,j}^{n}+\Delta t\left[\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n}-4u_{i,j}^{n})+f(x_i,y_j)\right].$$

В качестве условия окончания итерационного процесса можно принять следующий критерий:

$$\max_{i,j}\left|u_{i,j}^{(n+1)}-u_{i,j}^{n}\right|\le\varepsilon(1-\nu),\ \text{где}\ \nu=\frac{\max\limits_{i,j}\left|u_{i,j}^{(n+1)}-u_{i,j}^{n}\right|}{\max\limits_{i,j}\left|u_{i,j}^{s}-u_{i,j}^{(s+1)}\right|}.$$

Здесь ε — некоторая наперед заданная положительная величина, характеризующая точность вычислений.

Алгоритм для численного исследования модели вероятностным методом. Обычно процесс случайного блуждания моделируется на решетке, вписанной в некоторую область G так, что в каждый момент времени происходит «перескок» частицы M из одного узла в соседний. Находясь во внутреннем узле сетки $M_{ij}(x_i,y_j)$, она может за один переход с одной и той же вероятностью, равной

1/4, переместиться в любой из четырех соседних, причем изменение положения не зависит он прошлой истории. Блуждание частицы заканчивается, как только она выходит на границу, которая представляет собой поглощающий экран [4].

Равномерное случайное блуждание на плоскости можно организовать с помощью генератора случайных чисел. Выберем точку $Q_{i,j}$, в которой мы хотим определить значение температуры. Далее будем перемещаться по сетке в зависимости от того, чем уравняется случайное число p из интервала [0, 1) [4]:

$$\begin{cases} 0 \le p < \frac{1}{4} \Rightarrow Q_{n+1} = Q_{i+1,j}; \\ \frac{1}{4} \le p < \frac{1}{2} \Rightarrow Q_{n+1} = Q_{i-1,j}; \\ \frac{1}{2} \le p < \frac{3}{4} \Rightarrow Q_{n+1} = Q_{i,j+1}; \\ \frac{3}{4} \le p < 1 \Rightarrow Q_{n+1} = Q_{i,j-1}. \end{cases}$$

Допустим, мы выпустили N таких частиц. Тогда значение температуры в исходной точке будет рассчитываться по формуле

$$u_{i,j} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} u_g,$$

где g — номер границы, на которой закончилось блуждание конкретной частицы [5, 6].

Способы проведения экспериментов. Для проведения исследования был выбран язык Python, потому что он имеет мощные числовую и научную библиотеки, такие как Numpy и Scipy, а также позволяет легко визуализировать полученные результаты с помощью библиотеки Matplotlib.

Для получения результата использовали следующие программные средства: операционная система Windows 10; Python 3.10; Numpy 1.24.0; Matplotlib 3.6.0.

Ширина и высота пластины составляют 10 см. Значения на границах следующие: $u_1 = 20$, $u_2 = 5$, $u_3 = 70$, $u_4 = 10$.

В качестве функции источника теплоты использовано распределение $f(x, y) = f_0 \exp\left(-\beta(x - x_0)^2 (y - y_0)^2\right)$, где f_0 и β — некоторые коэффициенты, определяемые в соответствии со смыслом задачи.

Окончание итераций в разностном методе происходило при ε = 0,00001, оптимальный временной шаг в нем определяли экспериментально.

В исследовании использовали следующие размерности сетки: 20×20, 60×60 и 100×100 узлов.

Вероятностную вычислительную модель исследовали на основе разного числа испускаемых частиц: 100, 500, 1 000, 3 000, 5 000, 10 000.

Результаты экспериментов. Первый эксперимент проводили с использованием сетки размером 20×20 узлов. В выбранной точке с координатами (7, 7) в результате работы разностного метода было получено значение температуры 36,945 °C, время работы алгоритма составило 0,160 с. Данные, показываемые вероятностным методом при разном числе испускаемых частиц, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты работы вероятностного метода на сетке 20×20 узлов

Число испускаемых частиц	Значение температуры, °C	Время работы, с
100	23,450	0,004
500	21,820	0,013
1 000	20,645	0,031
3 000	21,578	0,069
5 000	21,658	0,127
10 000	21,601	0,251

Второй эксперимент выполняли с использованием сетки 60×60 узлов. В результате, когда разностный метод достиг обозначенной точности, значение температуры в выбранной точке с координатами (30, 30) было равно 28,170 и затраченное время на его получение составило 0,921 с. Результаты работы вероятностного алгоритма приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты работы вероятностного метода на сетке 60×60 узлов

Число испускаемых частиц	Значение температуры, °C	Время работы, с
100	25,250	0,022
500	27,060	0,144
1 000	27,755	0,289
3 000	26,733	0,783
5 000	26,878	1,375
10 000	26,584	2,575

Таблица 3

Результаты работы вероятностного метода на сетке 100×100 узлов

Число испускаемых частиц	Значение температуры, °C	Время работы, с
100	10,750	0,024
500	11,790	0,096
1 000	12,045	0,310
3 000	11,955	0,716
5 000	11,640	1,158
10 000	11,777	2,305

Третий эксперимент проводили с использованием сетки 100×100 узлов. На этот раз была взята точка ближе к одной из границ, ее координаты (7, 50). Время работы разностного метода составило 4,543 с, а температура в точке была равна 12,679 °С. Вероятностный метод показал следующее (табл. 3).

Обсуждение результатов. Эксперименты показывают, что для применения вероятностного метода сетка должна быть довольно-таки мелкой иначе значение температуры может определяться с погрешностью до 16 °С. Это много, поскольку первоначальный диапазон значений задавался от 0 до 100 °С.

В целом метод блуждающей точки позволяет получить удовлетворительные результаты даже при 100 испускаемых частицах, отличие от эталонного значения, полученного в разностном алгоритме 2…3 °С. Если учесть, что он работает минимум в 2 раза быстрее на сетке 100×100, а также требует меньше памяти, то вероятностный алгоритм однозначно стоит применять, когда требуется найти значение температуры в одной, двух, трех точках температурного поля.

Отметим, что чем ближе к одной из границ находится исследуемая точка, тем меньше различаются значения температуры. Во втором эксперименте точка лежала в середине поля, и различия доходили до 3 °С. В третьем расстояние до границы составляло 10 % от длины поля, и в большинстве испытаний различия в результатах методов доходили до 1 °С.

Заключение. Подводя итоги, можно сформулировать следующие выводы.

1. Проведен сравнительный анализ разностной и вероятностной вычислительных моделей для исследования дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа.

2. Показано, что вероятностный метод имеет преимущество относительно разностного. С его помощью можно найти значение температуры в конкретной точке в 200 раз быстрее, однако на сетке с небольшим количеством узлов он будет работать некорректно, приводя к погрешности вплоть до 35 % точного значения.

3. При выборе разных узлов было получено важное замечание — чем ближе к одной из границ находится точка (относительно размеров сетки), тем точнее будут совпадать значения температурного поля в ней, полученные рассмотренными подходами. Когда точка близка к середине сетки, разница может доходит до 3 °С, а если выбрать позицию, удаленную от края, например на 1/10 размера поля, получаемые значения будут различаться в пределах 1 °С.

4. На основе полученных результатов показано, что вероятностный алгоритм может быть с успехом применен для решения задач в металлургии, приборостроении, если требуется определить значения температуры в одной или нескольких точках тела.

Литература

[1] Егоров Ю.В., Шубин М.А. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории. *Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*, 1988, т. 30, с. 5–255.

[2] Савченко А.О., Савченко О.Я. Проводящее тело в переменном магнитном поле. *Журнал технической физики*, 2015, т. 85, вып. 7, с. 8–12.

[3] Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва, Наука, 1978.

[4] Ермаков С.М. *Метод Монте-Карло и смежные вопросы, сер. Теория вероятностей и математическая статистика*. Москва, Наука, 1971.

[5] Кузнецов В.Ф. *Решение задач теплопроводности методом Монте-Карло*. Москва, ИАЭ им. И.В. Курчатова, 1973, 21 с.

[6] Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. *SIAM*, 2003, pp. 231–234. http://doi.org/10.1137/1.9780898718003

Крюков Сергей Алексеевич — студент кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Крюков С.А. Сравнительный анализ разностной и вероятностной вычислительных моделей для исследования дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа. *Политехнический молодежный журнал*, 2023, № 05 (82).
http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2023-5-894

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE DIFFERENCE AND PROBABILISTIC COMPUTATIONAL MODELS TO STUDY PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE ELLIPTICAL TYPE

S.A. Kryukov sergey.krykov.2806@gmail.com

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper presents a comparative analysis of the difference and probabilistic computational models to study the heat transfer equation with the boundary conditions of the I kind. The first model was implemented by an explicit five-point scheme, and the second — by the random walk algorithm. The proposed approaches were confirmed by simulating the temperature field in a thin rectangular plate exposed to external radiation sources. During a series of experiments, it was found that the probabilistic method for determining the temperature value at a single point made it possible to obtain an approximate result from 2 to 200 times faster, depending on the number of irradiated particles and requird less memory compared to the difference method. It was established that, if the point under study was located close to one of the boundaries, the difference between results obtained during the algorithms operation was on average 1°C. And if its location was in the middle of the plate, the differences reached 3°C. The probabilistic model in most cases would lead to the incorrect result with a small number of the grid nodes. Meanwhile, the difference model demonstrates values that are more accurate and determines the thermal field completely.

Keywords

Temperature field simulation, elliptic equation, difference scheme, particle random walk, Dirichlet boundary conditions, probabilistic method, difference method

Received 19.04.2023

References

[1] Egorov Yu.V., Shubin M.A. Linear partial differential equations. Foundations of the classical theory. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya*, 1988, vol. 30, pp. 5–255. (In Russ.).

[2] Savchenko A.O., Cavchenko O.Ya. Conducting body in an alternating magnetic field. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2015, vol. 85, iss. 7, pp. 8–12. (In Russ.).

[3] Samarskiy A.A., Nikolaev E.S. *Metody resheniya setochnykh uravneniy* [Methods for solving grid equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978. (In Russ.).

[4] Ermakov S.M. *Metod Monte-Karlo i smezhnye voprosy, ser. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Monte Carlo Method and Related Issues, ser. Theory of Probability and Mathematical Statistics]. Moscow, Nauka Publ., 1971. (In Russ.).

[5] Kuznetsov V.F. *Reshenie zadach teploprovodnosti metodom Monte-Karlo* [Solution of heat conduction problems by the Monte Carlo method]. Moscow, IAE im. I.V. Kurchatova Publ., 1973, 21 p. (In Russ.).

[6] Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. *SIAM*, 2003, pp. 231–234. http://doi.org/10.1137/1.9780898718003

Kryukov S.A. — Student, Department of Computer Software and Information Technology, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:

Kryukov S.A. Comparative analysis of the difference and probabilistic computational models to study partial differential equation of the elliptical type. *Politekhnicheskiy molodezhnyy zhurnal*, 2023, no. 05 (82). (In Russ.). http://doi.org/10.18698/2541-8009-2023-5-894