

УДК 539.3

URL: <http://ptsj.ru/catalog/mech/mdsb/963.html>

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБОВ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ РАЗНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Д.И. Тукусер

tukuserdanila@gmail.com

SPIN-код: 3954-3672

*ПетрГУ, Петрозаводск, Российская Федерация*

Рассмотрен вопрос определения прогибов для неоднородного составного стержня, некоторые части поперечного сечения которого, состоят из различных по физико-механическим свойствам материалов. В качестве решения предлагается введение приведенной жесткости, зависящей как от геометрических параметров частей сечения, так и от свойств соответствующих им материалов, а также некоторое обобщение интеграла Мора для указанного случая сопротивления. Отметим, что данная модель не учитывает эффекты контактного взаимодействия в зонах контакта различных составных частей стержня. Рассмотрено практическое приложение предложенного решения, в целях оценки точности предложенного решения, проведен конечно-элементный расчет в программном комплексе «Компас-3D».

**EDN:** XSUAVY

**Ключевые слова:** составной стержень, неоднородный материал, расчет на жесткость, определение прогибов, переменная жесткость, составное сечение, приведенная жесткость, интеграл Мора

**Введение.** Основным предметом дисциплины «Сопротивление материалов», дисциплины, изучаемой на технических направлениях подготовки, являются вопросы прочности, жесткости и устойчивости изотропных прямолинейных тел [1]. В рамках этой дисциплины применяется модель идеализированного деформируемого твердого тела, включающая в себя несколько допущений о свойствах материала, геометрии сечений, а также о малости и суперпозиции прикладываемых нагрузок.

Среди прочих в данной дисциплине принимаются две гипотезы: 1) гипотеза сплошности (материал представляет однородную сплошную среду, а свойства материала одинаковы); 2) гипотеза изотропности (физико-механические свойства одинаковы по всем направлениям) [2]. Однако в инженерной практике может возникнуть необходимость применения конструкций, где в некотором сечении можно выделить несколько частей, состоящих из различных материалов (например, вопросы прочности биметаллических тел или составных сечений из различных материалов). В таком случае гипотеза сплошности и изотропности не подтверждается. В данной статье рассмот-

рен вопрос определения прогибов для неоднородных тел, представляемых в виде составных стержней из различных материалов.

**Постановка задачи.** В ходе конструкторской работы возникла необходимость применения сборки, состоящей из прямолинейного стержня из алюминиевого сплава, с ориентированными перпендикулярно его геометрической оси отверстиями, расположенными на расстоянии от начала координат  $c_i$ . В эти отверстия устанавливаются вставки цилиндрической формы из стали, которые после установки обрабатываются по цилиндрической форме стержня. Всего предусмотрено 29 вставок.

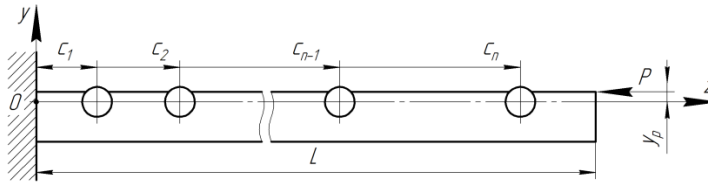


Рис. 1. Расчетная схема

Данную сборку можно представить в виде расчетной схемы, представленной на рис. 1. Имеем консольно расположенный стержень с защемленным в жесткой заделке левым концом. Стержень, состоящий из материала с модулем упругости  $E_1$ , имеет  $n$  расположенных перпендикулярно своей оси отверстий, в которые устанавливаются описанные выше вставки из материала с модулем упругости  $E_2$ . Стержень внецентренно нагружен силой  $P$ , прикладываемой с плечом  $y_p$  к удаленному от начала координат торцу. Необходимо осуществить проверочный расчет на жесткость, т. е., по сути, определить максимальный прогиб, а также построить график прогибов исследуемой расчетной схемы.

**Решение в общем виде.** Рассмотрим решение общей задачи о нахождении прогиба в произвольной точке для составного стержня с переменной жесткостью. Условимся, что данная модель не учитывает эффекты контактного взаимодействия в зонах контакта различных составных частей изделия, т. е. различные части сечения в равной мере сопротивляются изгибу и жестко без зазоров соединены между собой. Пусть стержень состоит из  $n$  сечений. Сечения могут различаться по своим геометрическим параметрам и по наличию различных материалов, одновременно работающих на изгиб, также заданы границы этих сечений  $[a_i, a_{i+1}]$ . Как показано в статье [3], для составных сечений можно ввести приведенные значения, отражающие их жесткость и геометрические параметры. Введем согласно [3] значение приведенной

жесткости для произвольного сечения относительно оси  $x$   $(EI_x)_{\text{ж}}$  при плоскопараллельном переносе для произвольного числа различных по своей геометрии и материалу частей выражается как

$$(EI_x)_{\text{ж}} = \sum_{i=1}^n E_i \left( I_{x(i)} + A_{(i)} y_i^2 \right), \quad (1)$$

где  $E_i$  — модуль упругости  $i$ -й части сечения;  $I_{x(i)}$  — момент инерции относительно центральных осей  $i$ -й части сечения;  $A_{(i)}$  — площадь  $i$ -й части сечения;  $y_i$  — расстояние от центра тяжести  $i$ -й составной части сечения до центра жесткости всего сечения.

Отметим, что, в сущности, выражение (1) справедливо и для сопротивления составного сечения из одного материала. Поскольку приведенная жесткость всего сечения  $(EI_x)_{\text{ж}}$  определяется как геометрическими параметрами, так и модулями упругости, очевидно, что на некоторых участках эта жесткость может быть как постоянной величиной, так и некоторой функцией от  $z$ . Для этого необходимо лишь представить в выражении (1) зависящие от  $z$  члены в виде соответствующих функций.

Центр жесткости сечения [3], в отличие от центра тяжести сечения [4], отражает влияние не только геометрических параметров сечения, но и учитывает значение модуля упругости каждой составной части сечения. Согласно [3], положение центра жесткости всего сечения выражается как

$$y_c = \frac{\sum E_i S_i}{\sum E_i A_i}, \quad (2)$$

где  $S_i$  — статический момент площади  $i$ -й части сечения. Отметим, что поиск расстояния  $y_i$  и  $S_i$  может осуществляться относительно произвольно выбранной системы координат.

Центр тяжести  $i$ -й части сечения  $y_i$  определяется по известным методам курса «Сопротивление материалов» [4]. Тогда определить расстояние от центра тяжести  $i$ -й части сечения до центра жесткости всего сечения можно по следующей зависимости:

$$y_i = y_c - y_{c(i)}.$$

Для определения прогиба  $\delta$  в произвольной точке  $z=l$  составного стержня воспользуемся известным следствием теоремы Максвелла — Мора, интегралом Мора [4, 5]:

$$\delta = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dz,$$

где  $M$  — изгибающий момент;  $\bar{M}$  — фиктивный (единичный) момент, вызванный единичной силой в исследуемой точке  $z = l$ . Данные моменты могут быть как некоторой постоянной величиной, так и функцией от  $z$ .

Преобразуем данное выражение: в силу свойств определенного интеграла, а именно, если отрезок интегрирования разбит на части, то определенный интеграл по всему отрезку есть сумма определенных интегралов по его частям, т. е. справедлив переход от интегрирования по длине стержня до точки  $z = l$  к некоторым участкам с границами  $[a_i, a_{i+1}]$ . В полученной сумме интегралов Мора подынтегральные выражения могут принимать различный вид в зависимости от выбранного участка, т. е. существуют постоянные величины или некоторые функции от  $z$ , обозначаемые как  $M_i, \bar{M}_i, E_i, I_i$ . В силу указанных замечаний касательно сопротивления составного сечения из различных материалов заменим произведение  $E_i I_i$  приведенной величиной жесткости  $(EI_x)_{ж(i)}$ :

$$\delta = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{M_i \bar{M}_i}{(EI_x)_{ж(i)}} dz. \quad (3)$$

Таким образом, получена общая расчетная зависимость (3) для стержня, имеющего  $n$  различных составных сечений с переменной жесткостью, т. е. отличающихся по геометрическим параметрам и по материалам составных частей сечений.

**Пример расчета.** Рассмотрим применение указанной зависимости для практического расчета конструкции на рис. 1. На схеме  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — координаты геометрических центров отверстий. Внецентренно прикладываемая сила  $P$  имеет плечо, данное относительно оси  $z$  и равно  $u_p$ . Для расчета разобьем рассчитываемую конструкцию на  $n+1$  участков с постоянным осевым моментом инерции  $I_x$  и  $n$  участков с изменяющейся в зависимости от  $z$  приведенной жесткостью сечения  $(EI_x)_{ж}$ . Выразим эти величины.

Поперечное сечение с осевым моментом инерции  $I_x$  (рис. 2) имеет форму окружности с лыской высотой  $t$ . Осевой момент инерции такого сечения относительно геометрического центра окружности диаметром  $D$  можно вычислить по следующей формуле, применяемой для сегмента круга [5]:

$$I_x^* = \frac{R^4}{8} \left( 2\alpha - \sin 2\alpha + 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha \right),$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\pi}{2} + a \sin \left( \frac{R-t}{R} \right), \quad R = \frac{D}{2}.$$

Однако для расчетных целей необходимо иметь зависимость для осевого момента  $I_x$  относительно центральных осей сегмента круга, для чего можно применить стандартные методы дисциплины «Сопротивление материалов» [4, 5] или выполнить расчет численно с помощью, например, программного комплекса «Компас-3D». Для данного сечения плечо внецентренно прикладываемой силы  $P$  есть величина постоянная и равная  $y_p - y_c$ , где  $y_c$  — координата центра тяжести сечения.

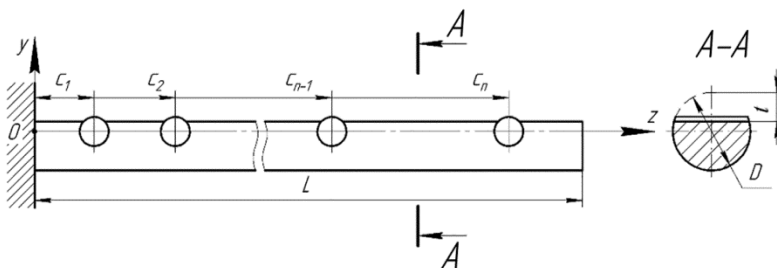


Рис. 2. Схема поперечного сечения участка с постоянной величиной осевого момента инерции

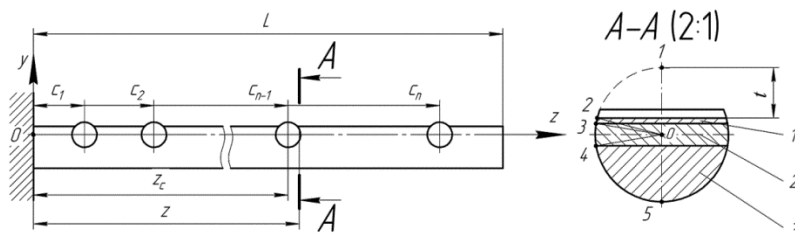


Рис. 3. Схема поперечного сечения участка с переменной жесткостью

Рассмотрим составные сечения, состоящие из двух различных материалов. Рассматриваемые составные сечения (рис. 3, А-А) имеет в своей основе ту же форму, что и описанное выше, но с той разницей, что в данном сечении на некотором расстоянии  $z_c$  от начала координат перпендикулярно оси имеются отверстия диаметром  $d$ . В данные отверстия монтируются вставки из материала с иным модулем упругости. Очевидно, что в интервале  $[z_c - R, z_c + R]$  меняется геометрия сечения, а значит, жесткость сечения. Рассмотрим сечение в точке, принадлежащей одному из таких интервалов (рис. 3, А-А). Нетрудно заметить, что выделенное сечение образовано из трех частей. Части 1 и 3, образованные стержнем, (рис. 3, А-А) имеют модуль упругости  $E_1$ . В свою очередь, часть 2, образованная вставкой, имеет модуль упругости  $E_2$ .

Согласно (1) для описанной выше конструкции, приведенная жесткость сечения  $(EI_x)_{\text{ж}}$  относительно оси  $x$  при плоскопараллельном переносе для  $n = 3$  различных по своей геометрии и материалу частей, выражается как

$$(EI_x)_{\text{ж}} = E_1 \left( I_{x(1)} + A_{(1)} y_1^2 \right) + E_2 \left( I_{x(2)} + A_{(2)} y_2^2 \right) + E_3 \left( I_{x(3)} + A_{(3)} y_3^2 \right).$$

Определим момент инерции, площадь и расстояние от центра тяжести части сечения до центра жесткости для каждой части сечения. Выделим из рассматриваемого сечения (см. рис. 3) углы  $\varphi_i$ , поскольку геометрические размеры рассматриваемого сечения меняются в зависимости от  $z$  и  $z_c$ , то и некоторые углы будут функцией от  $z$  и  $z_c$ , тогда

$$\varphi_1 = \angle 2O1 = \arccos\left(\frac{R-t}{R}\right); \quad \varphi_4 = \angle 5O1 = \pi;$$

$$\varphi_2(z, z_c) = \angle 3O1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{r^2 - (z - z_c)^2}}{R}\right) \quad \text{при} \quad \sqrt{r^2 - (z - z_c)^2} \leq R - t;$$

$$\varphi_3(z, z_c) = \angle 4O1 = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{r^2 - (z - z_c)^2}}{R}\right).$$

Теперь можно перейти к определению момента инерции произвольной части сечения относительно оси  $z$ . Нетрудно заметить, что эти части есть сегменты круга или фигуры, ограниченные двумя параллельными хордами, тогда из определения момента инерции сечения и стандартной техники поиска моментов инерции сечений [6] заданных функцией имеем:

$$I_{x(i)} = \int y^2 dA = \frac{r^4}{8} \left( 2\alpha - \sin 2\alpha + 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha \right) \Bigg|_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}. \quad (4)$$

Площадь произвольной части сечения определим через интеграл следующего вида:

$$A_{(i)} = \int dA = 2R^2 \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \sin^2 \alpha d\alpha = r^2 \left( \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) \Bigg|_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}. \quad (5)$$

Найденные выше выражения (4) и (5) справедливы для любых сегментов круга (при  $\varphi_i$  или  $\varphi_{i+1}$ , равном нулю) и фигур, ограниченных двумя параллельными хордами окружности.

Поскольку моменты инерции рассматриваемых сечений представляется переменной величиной, меняется и положение на оси  $Oy$  центральных осей инерции. В силу того что выше длина плеча прикладываемой внецентренно силы  $y_p$ , заданная на участках с постоянной жесткостью, относительно центральных осей инерции сечения была постоянной величиной, то изменение положения этих осей для сечений переменной жесткости сказывается и на длине плеча прикладываемой внецентренно силы на этом участке. Данное рассуждение легко представляется в следующем виде:

$$y_p^*(z, z_c) = y_p - y_c(z, z_c) = y_p - \frac{\sum E_i S_{x(i)}}{\sum E_i A_{(i)}}$$

где  $y_c(z, z_c)$  — положение центральных осей инерции на оси  $Oy$  в точке  $z$ .

В общем случае определить  $y_c$  можно по указанной выше зависимости (2). Выведем выражение статического момента площади  $S_i$  для  $i$ -й части сечения, справедливое для сегмента круга и фигуры, ограниченной двумя параллельными хордами окружности. Пользуясь определением статического момента площади, а также стандартной техникой определения статических моментов [6], получим:

$$S_{x(i)} = \int y dA = \frac{2R^3}{3} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \cos \alpha \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{2R^3}{3} \sin^3 \alpha \Big|_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}.$$

Таким образом, имеем все необходимые зависимости для непосредственного расчета жесткости сечения в произвольной точке  $z$ .

С помощью выведенного выше выражения для определения прогиба в произвольной точке (3) составим выражение для, например, нахождения прогиба в наиболее удаленной точке, то есть при  $z = L$ . Для данной расчетной схемы имеем два вида поперечных сечений, а соответственно и две суммы интегралов Мора с пределами интегрирования, которые соответствуют границам интегрируемых участков. Значит, будем иметь сумму  $n+1$  интегралов с моментом инерции  $I_{x1}$  и сумму  $n$  интегралов с изменяющейся жесткостью сечения  $(EI_x)_{ж}$ . Для дальнейших рассуждений определим границы участков. Обозначим границы участков как  $a_0, a_1, \dots, a_m$ , пусть  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = c_1 - r$ ,  $a_2 = c_1 + r$ . Обобщив, получим:

$$a_0 = 0; a_{2k-1} = c_k - r; a_{2k} = c_k + r,$$

где  $k = 1, \dots, n+1$ ;  $a_{2n+1} = L$  — крайняя правая граница.

Из расчетной схемы очевидно, что границам  $[a_i, a_{i+1}]$  с  $i = 0, 2, 4, \dots$  соответствуют участки с моментом инерции  $I_x$ , а границам  $[a_i, a_{i+1}]$

с  $i=1, 3, 5, \dots$  соответствуют участки с изменяющейся жесткостью сечения  $(EI_x)_{ж}$ . Тогда справедливо следующее выражение:

$$\delta = \sum_{i=0}^n \int_{a_{2i}}^{a_{2i+1}} \frac{M_i \bar{M}_i}{E_1 I_x} dz + \sum_{i=1}^n \int_{a_{2i-1}}^{a_{2i}} \frac{M_i \bar{M}_i}{(EI_x)_{ж}} dz.$$

Для рассматриваемого случая  $M_i = P(y_p - y_{c(i)})$ . Для первой суммы это условие постоянно, для второй, в силу изменяющейся жесткости, функция от  $z$  и координат отверстий  $c_i$ . Нетрудно показать, что фиктивный момент  $\bar{M}_i$  для двух сумм определяется как  $\bar{M}_i = L - z$ .

Преобразуем выражение, выносим постоянные величины, также для функций запишем их аргументы. Тогда выражение для поиска максимального прогиба примет вид

$$\delta = \frac{P(y_p - y_{c1})}{E_1 I_x} \sum_{i=0}^{n+1} \int_{a_{2i}}^{a_{2i+1}} (L - z) dz + P \sum_{i=1}^{n+1} \int_{a_{2i-1}}^{a_{2i}} \frac{y_p^*(z, z_c)(L - z)}{(EI_x)_{ж}(z, c_i)} dz.$$

**Результаты расчетов.** Расчет по указанному выражению был проведен в пакете прикладных программ MATHCAD 15. Найденная глубина максимального прогиба составила  $\delta = 1,945$  мм. Также был составлен график зависимости прогиба  $\delta$  от координаты  $z$  (рис. 4).

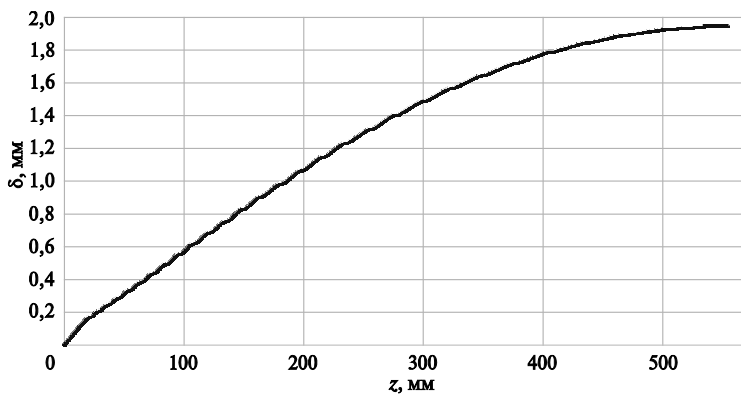


Рис. 4. График зависимости прогиба  $\delta(z)$

Также некоторый интерес представляет график приведенной жесткости составного сечения (рис. 5). Приведенная жесткость на участке с постоянной формой сечения  $EI_1 = 66,9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ , в то время как максимальное значение приведенной



жесткости составного сечения  $EI_{\max} = \max[(EI_x)_{\text{ж}}(z)] = 145,1 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ . Тогда максимальное отношение приведенных жесткостей есть величина, равная

$$\mu = \frac{EI_{\max}}{EI_1} = \frac{145,1}{66,9} = 2,17.$$

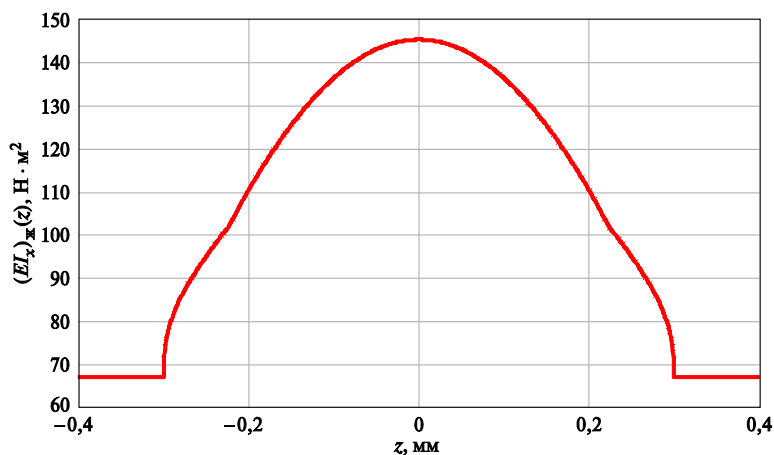


Рис. 5. График зависимости приведенной жесткости составного сечения из двух различных материалов от  $z$

Вычисление методом конечных элементов. Широкое распространение при анализе напряжений и деформаций для инженерных расчетов имеет метод конечных элементов (МКЭ) [7]. В целях проверки указанного выше аналитического решения были проведены соответствующие расчеты по поиску перемещений в системе APM FEM v20.0.3.7 [8] для выполнения экспресс-расчетов твердотельных объектов. Данная система является одним из модулей программы КОМПАС-3D v21. Система имеет множество функций и возможностей для прикладных расчетов и исследований [9, 10]. Расчет был проведен по следующей методике:

- 1) определение закрепления и совпадающих поверхностей;
- 2) определение вида и параметров загрузений модели;
- 3) назначение материалов и уточнение их свойств;
- 4) генерация конечно-элементной сетки;
- 5) проведение статического расчета;
- 6) анализ карт результатов (эпюр) перемещений.

В соответствии с расчетной схемой (см. рис. 1) была построена сборка, состоящая из стержня и 29 вставок описанной выше формы. Для указанной расчетной схемы применяется жесткая заделка, данная модель в APM FEM

реализуется с помощью команды «Закрепление» с зафиксированным перемещением по трем осям.

Для расчета необходимо обеспечить контакт компонентов сборки. В системе АРМ FEM указанной выше версии существует шесть способов определения контакта компонентов сборки, для этого применяется команда «Совпадающие поверхности». Для принятой расчетной схемы был выбран «скользящий контакт» со следующими параметрами: «радиус» 0,05 мм (задает значение возможного зазора между поверхностями контактирующих деталей), «максимальный зазор» 0,01 мм (параметр точности, указывающий максимальный зазор, при котором считается, что компоненты находятся в контакте).

Для определения загрузки использовали функцию «распределенная сила», прикладываемая в обусловленную конструктивной нагрузкой грань, ее значение 250 Н. В качестве конструкционного материала стержня переменного сечения принят деформируемый алюминиевый сплав Д16Т ГОСТ 4784–2019, в качестве материала поперечно устанавливаемых цилиндров — нержавеющая сталь AISI 304 (отечественный аналог — 08X18H10 ГОСТ 5632–2014).

Генерация конечно-элементной сетки, а также статический расчет проводили при применении 10-узловых тетраэдров при разных параметрах конечно-элементной сетки. Значения этих параметров и соответствующая им рассчитанная глубина прогиба приведены в таблице.

**Параметры конечно-элементной сетки, глубина прогиба**

№ п/п	Максимальная длина элемента, мм	Минимальная длина элемента, мм	Глубина прогиба, мм	Относительная погрешность расчета, %
1	2,2	0,055	2,076	6,74
2	2,0	0,050	2,073	6,58
3	1,8	0,045	2,252	15,78
4	1,6	0,040	2,143	10,18
5	1,4	0,035	2,197	12,96

Оценка погрешности расчета представлена в таблице в виде относительной погрешности аналитического решения по отношению к конечно-элементному расчету.

**Заключение.** Рассмотрен вопрос определения прогибов неоднородного составного стержня. Предложенный метод определения прогибов был применен к расчету проектируемой конструкции. Проверка результатов аналитического расчета дает понять, что указанные зависимости можно с некоторой точностью применять к расчету реальных конструкций. Однако стоит отметить, что в силу принятых условностей и допущений как самой модели, так и в целом дисциплины «Сопротивление материа-

лов», имеет место достаточно высокая погрешность. Таким образом, в дальнейшем стоит рассмотреть более подробные и проработанные модели, применяющие аппарат теории упругости, способные дать более общий и точный результат.

## Литература

- [1] Стружанов В.В., Бурмашева Н.В. *Теория упругости: основные положения*. Екатеринбург, Изд-во Уральского ун-та, 2019, 204 с.
- [2] Старовойтов Э.И. *Сопротивление материалов*. Гомель, БелГУТ, 1999, 219 с.
- [3] Дудяк А.И. Геометрические характеристики плоских сечений. *Актуальные вопросы машиноведения*, 2015, № 4, с. 241–244.
- [4] Беляев Н.М. *Сопротивление материалов*. Москва, Наука, 1965, 856 с.
- [5] Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. *Справочник по сопротивлению материалов*. Киев, Наукова думка, 1975, 704 с.
- [6] Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела*. Москва, Наука, 1988, 712 с.
- [7] Шимановский А.О., Путято А.В. *Применение метода конечных элементов в решении задач прикладной механики*. Гомель, БелГУТ, 2008, 61 с.
- [8] Система прочностного анализа АРМ FEM для КОМПАС-3D. URL: <https://arm.ru/arm-fem> (дата обращения 30.10.2023).
- [9] Биткина Е.Е., Федоров Н.А. Функциональные возможности модуля АРМ FEM в КОМПАС-3D. *Научное и техническое обеспечение АПК, состояние и перспективы развития. Матер. IX Междунар. науч.-практич. конф., посв. 105-летию ФГБОУ ВО Омский ГАУ*. Омск, Омский государственный аграрный университет имени П.А. Столыпина, 2023, с. 420–423.
- [10] Абрамова И.А., Сыркин В.В. Инженерный анализ машиностроительных конструкций в системе АРМ FEM. *Наука и военная безопасность*, 2020, № 2 (21), с. 71–78.

**Поступила в редакцию 28.11.2023**

**Тукусер Данила Игоревич** — студент кафедры «Транспортные и технологические машины и оборудование», ПетрГУ, Петрозаводск, Российская Федерация.

**Научный руководитель** — Пискунов Максим Анатольевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Транспортные и технологические машины и оборудование», ПетрГУ, Петрозаводск, Российская Федерация. E-mail: [piskunov\\_mp@list.ru](mailto:piskunov_mp@list.ru)

## Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тукусер Д.И. Определение прогибов составных стержней из разнородных материалов. *Политехнический молодежный журнал*, 2024, № 01 (90). URL: <http://ptsj.ru/catalog/mech/mdsb/963.html>

## DETERMINATION OF THE DEFLECTING COMPOSITE RODS MADE OF DISSIMILAR MATERIALS

D.I. Tukuser

tukuserdanila@gmail.com

SPIN-code: 3954-3672

*Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russian Federation*

The paper considers the problem of determining deflections in the inhomogeneous composite rod, which certain cross section parts consist of materials with different physical and mechanical properties. It proposes a solution to introduce the reduced stiffness depending both on the section part geometric parameters and on properties of the corresponding materials, as well as a certain Mohr integral generalization for the indicated resistance case. It is noted that this model is not accounting for the contact interaction effect in contact zones of the rod various components. The paper analyzes practical application of the proposed solution. To assess accuracy of the proposed solution, a finite element computation was carried out in the Compass-3D software package.

**EDN:** XSUAVY

**Keywords:** composite rod, inhomogeneous material, stiffness computation, deflection determination, variable stiffness, composite cross section, reduced stiffness, Mohr integral

### References

- [1] Struzhanov V.V., Burmasheva N.V. *Teoriya uprugosti: osnovnye polozheniya* [Theory of elasticity: basic principles]. Ekaterinburg, Ural'skii un-t Publ., 2019, 204 p. (In Russ.).
- [2] Starovoytov E.I. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Gomel', BelGUT Publ., 1999, 219 p. (In Russ.).
- [3] Dudyak A.I. Geometrical plane section characteristics. *Topical issues of mechanical engineering*, 2015, no. 4, pp. 241–244. (In Russ.).
- [4] Belyaev N.M. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 856 p. (In Russ.).
- [5] Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [Handbook of strength of materials]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1975, 704 p. (In Russ.).
- [6] Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 712 p. (In Russ.).
- [7] Shimanovskiy A.O., Putyato A.V. *Primenenie metoda konechnykh elementov v reshenii zadach prikladnoy mekhaniki* [Application of the finite element method in solving problems of applied mechanics]. Gomel', BelGUT Publ., 2008, 61 p. (In Russ.).

- [8] *Sistema prochnostnogo analiza APM FEM dlya KOMPAS-3D* [APM FEM strength analysis system for KOMPAS-3D]. URL: <https://apm.ru/apm-fem> (accessed October 30, 2023).
- [9] Bitkina E.E., Fedorov N.A. Functionality of the apm fem module in Kompas-3D. *Nauchnoe i tekhnicheskoe obespechenie APK, sostoyanie i perspektivy razvitiya. Mater. IX Mezhdunar. nauch.-praktich. konf., posv. 105-letiyu FGBOU VO Omskiy GAU* [Scientific and technical support of the agro-industrial complex, state and development prospects. Materials of the IX International Scientific and Practical Conference dedicated to the 105th anniversary of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Omsk State Agrarian University]. Omsk, Omskiy gosudarstvennyy agrarnyy universitet imeni P.A. Stolypina Publ., 2023, pp. 420–423. (In Russ.).
- [10] Abramova I.A., Syrkin V.V. Engineering analysis of engineering structures in the APM FEM system. *Science and military security*, 2020, no. 2 (21), pp. 71–78. (In Russ.).

**Received 28.11.2023**

**Tukuser D.I.** — Student, Department of Transport and Technological Machines and Equipment, Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russian Federation.

**Scientific advisor** — Piskunov M.A., Ph. D. (Eng.), Associate Professor, Department of Transport and Technological Machines and Equipment, Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russian Federation. E-mail: [piskunov\\_mp@list.ru](mailto:piskunov_mp@list.ru)

**Please cite this article in English as:**

Tukuser D.I. Determination of the deflecting composite rods made of dissimilar materials. *Politekhnicheskiiy molodezhnyy zhurnal*, 2024, no. 01 (90). (In Russ.). URL: <http://ptsj.ru/catalog/mech/mdsb/963.html>