УДК 519.612.2 URL: https://ptsj.ru/catalog/math/compmath/967.html

АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ ЯКОБИ И ЗЕЙДЕЛЯ

Н.С. Волков volkovns@student.bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Представлен анализ сходимости итерационных методов Якоби и Зейделя решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с вещественными матрицами. Получены области сходимости обоих методов для СЛАУ с двумя и тремя неизвестными. Выполнено статистическое сравнение сходимости методов для СЛАУ с вещественными матрицами и числом неизвестных от двух до пяти. На основе проведенного аналитического и статистического анализа сделан вывод о лучшей сходимости метода Зейделя по сравнению с методом Якоби. Приведен пример матрицы СЛАУ, для которой итерационный метод Якоби сходится, а метод Зейделя нет.

Ключевые слова: итерационные методы, система линейных алгебраических уравнений, метод простых итераций, метод Якоби, метод Зейделя, квадратное уравнение, алгебраическое уравнение третьей степени, вещественная матрица

Введение. В современном мире большое количество как прикладных, так и теоретических задач в различных областях науки и техники сводится к проблеме нахождения точного или максимально приближенного и аппроксимирующего точное решения различных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), численные методы решения которых развиваются на протяжении многих лет ввиду огромного количества областей их применения, как например в [1, 2].

Особое место в теории решения СЛАУ занимает метод простых итераций, альтернативный прямым методам поиска решения СЛАУ. При этом на основе метода простых итераций развиваются новые методы решения СЛАУ, представляющие собой улучшенные версии классического метода [3, 4].

Одними из таких методов, основанных на методе простых итераций, являются итерационные методы Якоби и Зейделя для решения СЛАУ. Их принцип заключается в выделении элементов на, над и под диагональю исходной матрицы СЛАУ в качестве отдельных матриц и реализации метода простых итераций с использованием этих матриц вместо исходной, что часто значительно упрощает вычисления [5, 6]. Итерационные методы Якоби и Зейделя, также являясь классическими итерационными методами решения СЛАУ, за последнее время претерпели различные усовершенствования, отдельные из которых описаны, например, в [6–9]. Тем не менее многие современные

 ISSN 2541-8009

альтернативы классическим методам Якоби и Зейделя основаны на достаточных признаках их сходимости к точному решению в случае диагонального преобладания в исходных матрицах СЛАУ. При этом не рассматриваются случаи без диагонального преобладания, когда данные методы могут сходиться к точному решению; кроме того, их применение описано только для специальных видов матриц [10, 11].

Сходимость итераций к точному решению представляет собой одну из основных проблем, поскольку, являясь следствиями классического метода простых итераций, методы Якоби и Зейделя не всегда сходятся к точному решению, а имеют критерии сходимости, следующие из аналогичного критерия для метода простых итераций [5]. Поиск областей сходимости и основанное на нем теоретическое сравнение эффективности методов являются основными задачами данной работы.

Полученные в [5] критерии сходимости, согласно которым собственные числа матриц в методе должны быть меньше единицы по абсолютному значению, сводятся к задаче о нахождении корней алгебраического многочлена степени n с вещественными коэффициентами внутри единичного круга, различные способы решения которой описаны, например, в [12–18]. Эту задачу можно решить, применяя дробно-линейное преобразование, переводящее внутренность единичного круга комплексной плоскости на левую полуплоскость и сводя к исследованию устойчивости многочлена [13, 19]. В работе [13] рассмотрена данная задача для многочленов с вещественными коэффициентами второй и третьей степеней.

В данной работе сравнительный анализ двух методов на примере СЛАУ с двумя и тремя неизвестными выполнен на основе рассмотрения областей их сходимости, которые получены в предположении, что граница каждой области образуется, когда хотя бы один корень соответствующего уравнения имеет единичный модуль, а остальные — не превышающий единицу, а внутри области содержатся все точки, для которых все корни по модулю меньше единицы. Для более общего случая, когда матрица СЛАУ комплексная, границы областей сходимости методов получены в работе [20], в которой также описан комплексный аналог критерия Гурвица, позволяющий, не решая алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами, получаемое из критерия сходимости методов, определить, сходятся ли методы для конкретной СЛАУ с комплексной матрицей.

Вначале описаны общие критерии сходимости для каждого метода.

Далее получены условия сходимости методов для СЛАУ с вещественными коэффициентами и двумя неизвестными и сделан вывод по результатам их сравнения: для метода Якоби и для метода Зейделя найдены области сходимости с помощью непосредственного решения квадратного уравнения.

Затем с помощью подстановки корней с модулем, не превышающим единицу, в соответствующие уравнения, получаемые из критериев сходимости для каждого из методов, определены граничные условия этих методов для случая СЛАУ с тремя неизвестными и вещественными коэффициентами, для которого приведен сравнительный анализ.

В заключение с помощью математического моделирования проведено статистическое сравнение сходимости обоих методов для СЛАУ с вещественной матрицей.

Условия сходимости методов Якоби и Зейделя. При решении СЛАУ

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{1}$$

в соответствии с методом Якоби матрицу **A** исходной СЛАУ представляют в виде суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{R};$$

$$\det \mathbf{A} \neq 0,$$

где **L**, **D**, **R** — матрицы с поддиагональными, диагональными и наддиагональными элементами матрицы **A** соответственно; тогда из исходной СЛАУ (1) получается система

$$\mathbf{x} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R})\mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

для которой метод простых итераций сходится, если все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \lambda A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & \lambda A_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

по модулю меньше единицы [5]; A_{ij} — вещественные элементы исходной матрицы **A**.

Аналогично метод Зейделя сводит исходную СЛАУ (1) к системе

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{Rx} + (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{b},$$

метод простых итераций для которой сходится к точному решению, если все корни уравнения

 ISSN 2541-8009

$$\begin{vmatrix} \lambda A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda A_{n1} & \lambda A_{n2} & \dots & \lambda A_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

по модулю меньше единицы [5].

Когда размерность исходной СЛАУ невелика, найти условия сходимости методов можно из непосредственного решения уравнений (2) и (3). Покажем это для случаев СЛАУ с двумя и тремя неизвестными, часто возникающих в прикладных исследованиях.

Система линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. ***Метод Якоби.*** Уравнение (2) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \lambda A_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 0,$$

и для сходимости метода необходимо, чтобы его корни лежали внутри единичного круга, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\left| A_{12} A_{21} \right| < \left| A_{11} A_{22} \right|. \qquad (4)$$

Условие (4) задает область сходимости для метода Якоби: для сходимости метода в случае СЛАУ с вещественными коэффициентами и двумя неизвестными необходимо, чтобы модуль произведения внедиагональных элементов матрицы системы (1) был меньше модуля произведения ее диагональных элементов.

Метод Зейделя. Уравнение (3) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda A_{11} & A_{12} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 A_{11} A_{22} - \lambda A_{12} A_{21} = 0,$$

его корни

$$\lambda_1 = 0; \;\; \lambda_2 = \frac{A_{12} A_{21}}{A_{11} A_{22}}$$

должны быть по модулю меньше единицы ($A_{11} A_{22} \neq 0,$ так как A_{11}, A_{22} — диагональные элементы треугольной матрицы $\mathbf{L} + \mathbf{D}$). Поскольку один из них нулевой, на условие сходимости проверяется только второй корень, для которого, чтобы его модуль был меньше единицы, также должно выполняться условие (4).

Таким образом, и метод Якоби, и метод Зейделя для СЛАУ с двумя неизвестными имеют одинаковое условие сходимости (4).

Система линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными. ***Метод Якоби.*** Уравнение (2) имеет вид

$$\lambda^3 A_{11}A_{22}A_{33} - \lambda(A_{13}A_{22}A_{31} + A_{23}A_{11}A_{32} + A_{12}A_{33}A_{21}) + (A_{13}A_{21}A_{32} + A_{12}A_{23}A_{31}) = 0,$$

и для сходимости метода необходимо, чтобы его корни лежали внутри единичного круга.

Разделим его на $A_{11}A_{22}A_{33}$ (на диагонали матрицы $\mathbf{A}$ нет нулевых элементов, так как матрица $\mathbf{D}$ должна иметь обратную) и получим каноническое кубическое уравнение

$$\lambda^3 + a\lambda + b = 0, \tag{5}$$

в котором

$$a = \frac{-A_{12}A_{33}A_{21} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{23}A_{11}A_{32}}{A_{11}A_{22}A_{33}}; \;\; b = \frac{A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{32}A_{21}}{A_{11}A_{22}A_{33}}.$$

Найдем область сходимости метода, выраженную через a, b, путем получения уравнений ее границ и их объединения.

Уравнения границ определим в предположении, что на них имеется как минимум один корень уравнения (5), модуль которого равен единице, а внутренними точками области будут те, в которых модуль каждого корня меньше единицы, при этом граница в область сходимости не входит, поскольку на ней как минимум один из корней имеет единичный модуль, что противоречит условию сходимости [5]. Рассмотрим несколько случаев.

Найдем уравнение первой границы области сходимости: пусть один из корней уравнения (5) вещественный и равен единице, а два других — комплексно-сопряженные, модуль которых не превышает единицу:

$$\begin{gathered}(\lambda - 1)(\lambda - r\,\mathrm{e}^{i\varphi})(\lambda - r\,\mathrm{e}^{-i\varphi}) = 0; \\ 0 \le r \le 1.\end{gathered} \tag{6}$$

Раскрывая скобки в уравнении (6) и сравнивая его с (5), получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 + r\mathrm{e}^{i\varphi} + r\mathrm{e}^{-i\varphi} = 0; \\ r^2 + r\mathrm{e}^{i\varphi} + r\mathrm{e}^{-i\varphi} = a; \\ -r^2 = b, \end{cases}$$

из которой имеем уравнение первой границы области сходимости метода Якоби в координатах a, b:

$$\begin{cases} a = -b - 1; \\ -1 \le b \le 0. \end{cases} \tag{7}$$

Уравнение второй границы найдем аналогично, но в качестве вещественного корня уравнения (5) примем минус единицу:

$$(\lambda + 1)(\lambda - re^{i\varphi})(\lambda - re^{-i\varphi}) = 0; \\ 0 \le r \le 1. \tag{8}$$

Аналогично предыдущему случаю раскроем в (8) скобки и сравним его с (5), в результате запишем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 - r\,e^{i\varphi} - r\,e^{-i\varphi} = 0; \\ r^2 - r\,e^{i\varphi} - r\,e^{-i\varphi} = a; \\ r^2 = b, \end{cases}$$

из которой получим уравнение второй границы области сходимости метода Якоби в координатах a, b:

$$\begin{cases} a = b - 1; \\ 0 \le b \le 1. \end{cases} \tag{9}$$

Для нахождения третьей границы выберем вариант, когда один из корней вещественный с модулем, не превышающим единицу, а два других — комплексно-сопряженные с единичным модулем:

$$(\lambda + r)(\lambda - e^{i\varphi})(\lambda - e^{-i\varphi}) = 0; \\ -1 \le r \le 1.$$

Аналогично двум предыдущим случаям, получим систему уравнений

$$\begin{cases} r + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 0; \\ 1 + r\,e^{i\varphi} + r\,e^{-i\varphi} = a; \\ r = b, \end{cases}$$

из которой имеем уравнение третьей границы области сходимости метода Якоби:

$$\begin{cases} a = -b^2 + 1; \\ -1 \le b \le 1. \end{cases} \tag{10}$$

Границы (7), (9), (10) при замыкании образуют единую границу области сходимости метода Якоби для СЛАУ с тремя неизвестными и вещественной матрицей (рис. 1, пунктирная линия), а область сходимости будет лежать внутри этой границы (рис. 1, заштрихованная область).

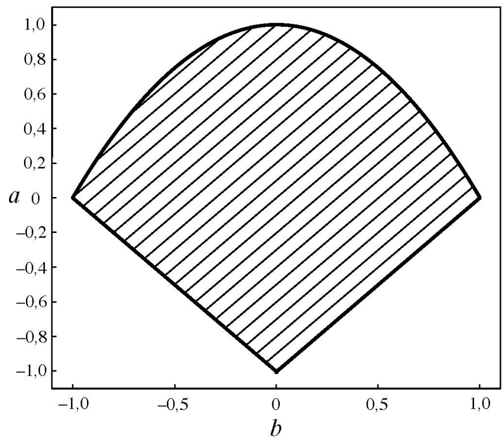

Рис. 1. Граница области сходимости и область сходимости метода Якоби для СЛАУ с тремя неизвестными и вещественной матрицей

Метод Зейделя. Уравнение (3) будет иметь вид

$$\lambda^3 A_{11}A_{22}A_{33} - \lambda^2 (A_{21}A_{13}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{32}A_{11}A_{23} - A_{21}A_{33}A_{12}) + \\ + \lambda A_{12}A_{23}A_{31} = 0, \tag{11}$$

а метод будет сходиться, если все его корни лежат внутри единичного круга.

Один из корней уравнения (11) равен нулю, а два других находятся из квадратного уравнения

$$\lambda^2 c + \lambda d + e = 0, \tag{12}$$

для которого

$$c = A_{11}A_{22}A_{33};$$
$$d = A_{21}A_{13}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{32}A_{11}A_{23} - A_{21}A_{33}A_{12};$$
$$e = A_{12}A_{23}A_{31}.$$

Для нахождения области сходимости метода Зейделя рассмотрим два случая сочетания корней квадратного уравнения (12): случай вещественных корней, модуль которых меньше единицы, и случай комплексно-сопряженных корней, модуль которых также меньше единицы.

Пусть уравнение (12) имеет два вещественных корня r_1, r_2, модуль которых меньше единицы. Перепишем его в виде

 ISSN 2541-8009

$$c(\lambda - r_1)(\lambda - r_2) = 0. \quad (13)$$

Тогда, раскрыв скобки в уравнении (13) и сравнив его с (12), запишем систему

$$\begin{cases} -cr_1 - cr_2 = d; \\ cr_1 r_2 = e, \end{cases}$$

из которой, с учетом условия $|r_1|, |r_2| < 1$, получим область сходимости метода Зейделя для СЛАУ с тремя неизвестными и вещественной матрицей в случае вещественных корней уравнения (12) ($c \neq 0$, так как представляет собой произведение диагональных элементов матрицы СЛАУ):

$$\begin{cases} |d| < |c + e|; \\ \left|\dfrac{e}{c}\right| < 1. \end{cases} \quad (14)$$

Область сходимости в случае комплексно-сопряженных корней уравнения (12) найдем, непосредственно решая его и применяя определение модуля комплексного числа. В этом случае область сходимости метода Зейделя удовлетворяет условию

$$0 < \frac{e}{c} < 1, \quad (15)$$

а условие

$$|d| < |c + e| \quad (16)$$

следует непосредственно из отрицательности дискриминанта $d^2 < 4ce$.

Кроме того, в случае комплексно-сопряженных корней квадратного уравнения (12) параметры c, e заведомо имеют одинаковый знак и оба не равны нулю, поэтому условия (15), (16) можно считать частью условий (14), и тогда область сходимости метода Зейделя для СЛАУ с тремя неизвестными и вещественной матрицей задается системой (14), первое неравенство которой интерпретируется как отрезок d на бесконечной прямой.

В отличие от метода Якоби, область сходимости метода Зейделя непостоянна, и «ширина» упомянутого отрезка может изменяться в зависимости от параметров c, e. Сравним условия сходимости обоих методов в случае вещественных коэффициентов системы (1). Для этого построим область сходимости, ограниченную границами (7), (9), (10), и область (14) на одной координатной плоскости aOb. Параметры a, b для метода Якоби и c, d, e для метода Зейделя связаны соотношением

$$d = (a + b)c - e,$$

подставив которое в (14), получим

$$\begin{cases} \left|(a+b)c-e\right| < \left|c+e\right|; \\ \left|\dfrac{e}{c}\right| < 1. \end{cases} \tag{17}$$

Раскрыв в первом неравенстве системы (17) модули, найдем, что одной из границ области сходимости метода Зейделя всегда служит прямая

$$a = -b-1, \tag{18}$$

которая также является одной из границ области сходимости метода Якоби, а второй также служит прямая, которая имеет вид

$$a = -b + \frac{c+2e}{c}.$$

Она также показывает, что размеры области сходимости метода Зейделя зависят от параметров c, e. Причем при одних значениях этих параметров область сходимости метода Зейделя может частично проходить через область сходимости метода Якоби, а при других может «накрыть» ее полностью. Из второго неравенства системы (17) следует

$$-1 < \frac{c+2e}{c} < 3,$$

поэтому область сходимости метода Зейделя на плоскости aOb представляет собой часть этой плоскости, которая всегда ограничена снизу прямой (18) и, в зависимости от конкретного случая, ограничена сверху параллельной ей прямой, самой верхней из которых будет прямая

$$a = -b+3.$$

Таким образом, вместе области сходимости каждого метода на одной плоскости aOb выглядят так, как показано на рис. 2.

Преимущества метода Зейделя перед методом Якоби, когда система (1) имеет вещественные матричные элементы, очевидны (в случае, представленном на рис. 2, область для метода Якоби целиком входит в область для метода Зейделя), особенно когда параметры a и b имеют большой модуль — тогда метод Якоби заведомо не сходится. Тем не менее верхняя граница области для метода Зейделя изменяется в зависимости от параметров c и e, поэтому если для СЛАУ сходится итерационный процесс метода Якоби, это не означает, что будет сходиться итерационный процесс метода Зейделя.

 ISSN 2541-8009

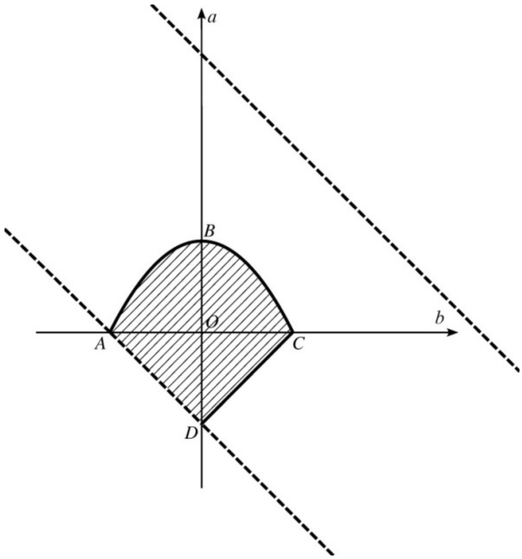

Рис. 2. Области сходимости методов на плоскости aOb: полоса, ограниченная пунктирной линией — максимальная (с верхней границей $a = -b + 3$) область сходимости метода Зейделя; заштрихованная область $ABCD$ — область сходимости метода Якоби

Приведем примеры построения области сходимости для метода Зейделя в координатах aOb, чтобы продемонстрировать, как она изменяется в зависимости от параметров c и e, и в этих же координатах построим область сходимости метода Якоби для наглядности.

Пример 1. Пусть параметры $c = 2,\ e = 1$, тогда область сходимости метода Зейделя будет иметь вид

$$\begin{cases} \left|2(a+b)-1\right| < 3; \\ \left|\dfrac{e}{c}\right| = \dfrac{1}{2} < 1, \end{cases}$$

при этом

$$\frac{c+2e}{c} = 2.$$

Тогда, по аналогии с рис. 2, области сходимости для каждого метода на плоскости aOb будут выглядеть так, как показано на рис. 3.

На рис. 3 видно, что область сходимости метода Якоби целиком лежит в области сходимости метода Зейделя, поэтому в данном конкретном случае параметров c, e для любой СЛАУ, для которой будет сходиться метод Якоби, будет сходиться и метод Зейделя, но обратное неверно.

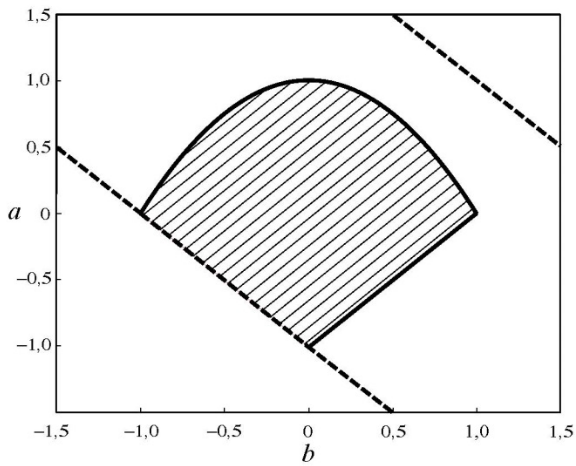

Рис. 3. Области сходимости методов Якоби и Зейделя при параметрах $c = 2,\ e = 1$:

полоса, ограниченная пунктирной линией — область сходимости метода Зейделя; заштрихованная область — область сходимости метода Якоби

Пример 2. Приведем пример СЛАУ с тремя неизвестными, для которой сходится метод Якоби, но не сходится метод Зейделя: пусть матрица СЛАУ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & 6 & -4 \\ -9 & 8 & 6 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

В данном случае параметры будут следующими: $c = -192,\ e = 144,$ тогда область сходимости метода Зейделя имеет вид

$$\begin{cases} \left|-192(a+b) - 144\right| < 48; \\ \left|\dfrac{e}{c}\right| = \dfrac{144}{192} < 1; \end{cases} \qquad \frac{c+2e}{c} = -\frac{1}{2}.$$

По аналогии с рис. 2 получим картину областей сходимости для обоих методов на плоскости *aOb*, показанную на рис. 4.

Полученная область сходимости метода Зейделя не удовлетворяет параметрам *a*, *b*, которые в данном конкретном примере для матрицы *A* будут следующими:

$$a = -\frac{50}{192}; \quad b = \frac{36}{192}.$$

 ISSN 2541-8009

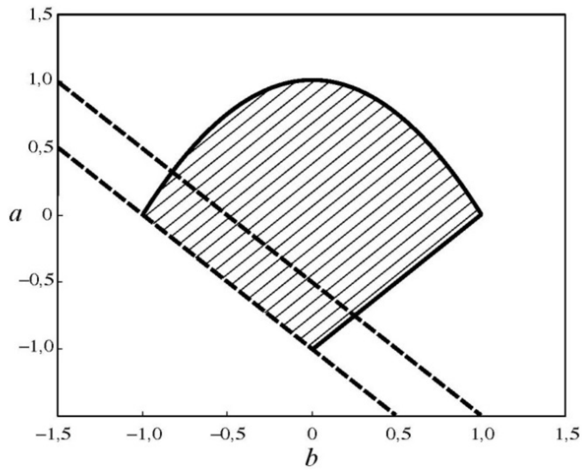

Рис. 4. Области сходимости методов Якоби и Зейделя при параметрах $c = -192$, $e = 144$:

полоса, ограниченная пунктирной линией — область сходимости метода Зейделя; заштрихованная область — область сходимости метода Якоби

Согласно рис. 4 очевидно, что данная точка (a, b) не принадлежит области сходимости метода Зейделя на плоскости aOb, но принадлежит области сходимости метода Якоби.

Помимо этого в данном конкретном случае видим, что на большей части области сходимости метода Якоби метод Зейделя не сходится, однако он может сходиться при больших значениях a и b, а метод Якоби — нет.

Статистическое сравнение сходимости методов Якоби и Зейделя. Было сгенерировано 200 000 случайных матриц СЛАУ (1) с вещественными матричными элементами, являющимися равномерно распределенными случайными величинами на отрезке $\left[-10; 10\right]$, без диагонального преобладания, с числом неизвестных от двух до пяти, для каждой из которых проверялись общеизвестные критерии сходимости каждого метода [5], после чего для каждого числа неизвестных определялось количество случаев, в которых сходятся оба метода, сходится только метод Зейделя, сходится только метод Якоби. Полученные данные сведены в таблицу.

Согласно таблице, данные для числа неизвестных $n > 2$ подтверждают выводы о том, что в общем случае метод Зейделя сходится значительно чаще, чем метод Якоби, однако сходимость одного из методов не может гарантировать сходимость второго. При этом также видим, что с увеличением количества неизвестных в СЛАУ, оба метода сходятся значительно реже.

Результаты сходимости методов Якоби и Зейделя

Число неизвестных	Сходятся оба метода	Сходится методом Зейделя, но не сходится методом Якоби	Сходится методом Якоби, но не сходится методом Зейделя
2	98 048	0	0
3	21 723	16 803	2 600
4	2 750	69 99	1 195
5	162	1 419	165

Заметим также, что в случае СЛАУ с двумя неизвестными данные, приведенные в таблице, подтверждают выводы о том, что в этом случае оба метода сходятся одинаково — если сходится один, то сходится и другой.

Заключение. Найденные области сходимости в вещественном случае позволили увидеть картину условий сходимости итерационных методов Якоби и Зейделя и на основе этого провести сравнительный анализ эффективности каждого из методов: если в случае квадратных матриц СЛАУ с двумя неизвестными оба метода сходятся одинаково эффективно, то в случае матриц с тремя и более неизвестными методы имеют заметное различие в условиях сходимости — с увеличением числа неизвестных в СЛАУ заметно эффективнее показывает себя метод Зейделя.

Например, в случае матрицы СЛАУ с тремя неизвестными при построении для вещественного случая на одной координатной плоскости областей сходимости для обоих методов можно увидеть, что, вообще говоря, в общем случае метод Зейделя имеет лучшую сходимость по сравнению с методом Якоби, поскольку его область сходимости ограничена прямыми, но бесконечна в отличие от области сходимости метода Якоби, одна из границ которой и вовсе входит в границу области сходимости метода Зейделя. Однако, как было показано, область сходимости метода Зейделя зависит от параметров, которые не всегда обеспечивают полное вхождение области сходимости метода Якоби в область сходимости метода Зейделя, из-за чего могут возникать ситуации, когда сходятся к точному решению итерации методом Якоби, но не сходятся итерации методом Зейделя. Статистическое сравнение сходимости обоих методов также подтверждает данные выводы.

Литература

[1] Bylina J., Bylina B. Merging Jacobi and Gauss-Seidel methods for solving Markov chains on computer clusters. *International Multiconference on Computer Science and Information Technology*, IEEE, 2008, pp. 263–268. https://doi.org/10.1109/IMCSIT.2008.4747250

[2] Nützi G., Schweizer A., Möller M., Glocker C. Projective Jacobi and Gauss-Seidel on the GPU for non-smooth multi-body systems. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in*

Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers, 2014, vol. 46391, art. V006T10A013. https://doi.org/10.1115/DETC2014-34606

[3] Tarigan A.J.M., Mardiningsih M., Suwilo S. The search for alternative algorithms of the iteration method on a system of linear equation. *Sinkron: jurnal dan penelitian teknik informatika*, 2022, vol. 7 (4), pp. 2124–2424. https://doi.org/10.33395/sinkron.v7i4.11817

[4] Gunawardena A.D., Jain S.K., Snyder L. Modified iterative methods for consistent linear systems. *Linear Algebra and Its Applications*, 1991, vol. 154, pp. 123–143. https://doi.org/10.1016/0024-3795(91)90376-8

[5] Bagnara R. A unified proof for the convergence of Jacobi and Gauss-Seidel methods. *SIAM review*, 2001, vol. 37 (1), pp. 93–97. https://doi.org/10.1137/1037008

[6] Salkuyeh D.K. Generalized Jacobi and Gauss-Seidel methods for solving linear system of equations. *A Journal of Chinese Universities*. *Numerical mathematics*, 2007, vol. 16 (2), pp. 164–170.

[7] Milaszewicz J.P. Improving Jacobi and Gauss-Seidel iterations. *Linear Algebra and its Applications*, 1987, vol. 93, pp. 161–170. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(87)90321-1

[8] Li W., Sun W. Modified Gauss-Seidel type methods and Jacobi type methods for Z-matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 2000, vol. 317 (1–3), pp. 227–240. https://doi.org/10.1016/S0024- 3795(00)00140-3

[9] Tavakoli R., Davami P. A new parallel Gauss-Seidel method based on alternating group explicit method and domain decomposition method. *Applied mathematics and computation*, 2007, vol. 188 (1), pp. 713–719. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.10.023

[10] Koester D.P., Ranka S., Fox G.C. A parallel Gauss-Seidel algorithm for sparse power system matrices. *Supercomputing’94: Proceedings of the 1994 ACM/IEEE Conference on Supercomputing*, *IEEE*, 1994, pp. 184–193. https://doi.org/10.1145/602770.602806

[11] Amodio P., Mazzia F. A parallel Gauss-Seidel method for block tridiagonal linear systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1995, vol. 16 (6), pp. 1451–1461. https://doi.org/10.1137/0916084

[12] Chen W.Y. On the polynomials with all their zeros on the unit circle. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1995, vol. 190 (3), pp. 714–724. https://doi.org/10.1006/jmaa.1995.1105

Задорожний В.Г. Условия, при которых корни многочлена лежат внутри единичного круга. *Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии*, 2018, № 2, с. 22–25. https://doi.org/10.17308/sait.2018.2/1206

[13] Konvalina J., Matache V. Palindrome-polynomials with roots on the unit circle. *Comptes Rendus Mathematiques*, 2004, vol. 26 (2), art. 39.

[14] Корсаков Г.Ф. О количестве корней полинома вне круга. *Математические заметки*, 1973, т. 13, № 1, с. 3–12. https://doi.org/10.1007/BF01093620

[15] Joyal A., Labelle G., Rahman Q. On the location of zeros of polynomials. *Canadian mathematical bulletin*, 1967, vol. 10 (1), pp. 53–63. https://doi.org/10.4153/CMB-1967-006-3

[16] Dehmer M. On the location of zeros of complex polynomials. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2006, vol. 7 (1).

[17] Frank E. On the zeros of polynomials with complex coefficients. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1946, pp. 144–157. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1946-08526-2

[18] Постников М.М. *Устойчивые многочлены*. Москва, Наука, 1981, 176 с.

[19] Khrapov P.V., Volkov N.S. Comparative analysis of Jacobi and Gauss-Seidel iterative methods. *International Journal of Open Information Technologies*, 2024, vol. 12, no. 2, pp. 23–34.

Поступила в редакцию 25.03.2024

Волков Никита Сергеевич — студент кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Храпов Павел Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация. E-mail: khrapov@bmstu.ru; SPIN-код: 2595-4188.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Волков Н.С. Анализ сходимости методов Якоби и Зейделя. *Политехнический молодежный журнал*, 2024, № 02 (91). URL: https://ptsj.ru/catalog/math/compmath/967.html

ANALYSIS OF THE JACOBI AND SEIDEL METHODS CONVERGENCE

N.S. Volkov volkovns@student.bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

The paper analyzes the Jacobi and Seidel iterative methods convergence in solving the systems of linear algebraic equations (SLAE) with the real matrices. The convergence areas for both methods in SLAE with two and three unknowns are obtained. The convergence methods in SLAEs are statistically compared with the real matrices and the number of unknowns from two to five. Based on the analytical and statistical analysis performed, it was concluded that the Seidel method has better convergence compared to the Jacobi method. An example of the SLAE matrix is provided, where the Jacobi iterative method converges, but the Seidel method is not efficient.

Keywords: iterative methods, system of linear algebraic equations, simple iteration method, Jacobi method, Seidel method, quadratic equation, third degree algebraic equation, real matrix

Received 25.03.2024

Volkov N.S. — Student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Khrapov P.V., Ph. D. (Phy. and Math.), Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation. E-mail: khrapov@bmstu.ru; SPIN code: 2595-4188.

Please cite this article in English as:
Volkov N.S. Analysis of the Jacobi and Seidel methods convergence. *Politekhnicheskiy molodezhnyy zhurnal*, 2024, no. 02 (91). (In Russ.). URL: https://ptsj.ru/catalog/math/compmath/967.html

