

УДК 544.772.4+004.942

URL: <http://ptsj.ru/catalog/iemim/sta/991.html>

СОПОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ОСАЖДЕНИЯ МОНОДИСПЕРСНОГО АЭРОЗОЛЯ НА ОСНОВЕ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ И ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

Д.А. Тукмаков

tukmakovda@imm.knc.ru

SPIN code: 3556-8576

ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Республика Татарстан, Россия

Проведено моделирование процессов гравитационного осаждения аэрозоля, состоящего из частиц одинакового размера. Актуальность исследования обусловлена необходимостью применения осаждения дисперсной фазы газодисперсных сред в различных практических приложениях. Построены математические модели процессов диффузии, описывающие осаждение частиц на основе одномерных нестационарных уравнений диффузии с учетом и без учета конвективного слагаемого. Новизна работы заключается в том, что в ней сопоставляются математические модели, основанные на уравнениях в частных производных, и дискретная математическая модель. Без учета конвективного слагаемого гравитационное осаждение также происходит, но за существенно более долгий промежуток времени, чем при учете конвективного слагаемого. Также получена дискретная математическая модель осаждения частиц аэрозоля. Сопоставление демонстрирует, что наиболее интенсивно осаждение дисперсных частиц происходит по дискретной модели осаждения.

Ключевые слова: аэрозоль, дисперсия, гравитационное осаждение, седиментация, уравнение диффузии, математическое моделирование

Введение. Одним из разделов механики жидкости и газа является динамика неоднородных сред [1–14]. Частный случай неоднородных сред представляют собой аэрозоли — взвешенные в газе твердые частицы или жидкие капли. В монографии [1] разработаны общие принципы теории динамики неоднородных сред. В [2] численно исследованы одномерные течения моно и полидисперсных газовзвесей. В работе [3] представлены различные математические модели течений запыленных сред. Монография [4] посвящена разработке теоретических основ осаждения дисперсных частиц. Результаты экспериментального наблюдения параметров седиментации частиц позволяют определить свойства дисперсной системы [5]. В статье [11] математически моделируется гравитационная седиментация (осаждение) дисперсных частиц. В исследовании [12] экспериментально изучается гравитационное осаждение аэрозоля

в акустическом резонаторе. В работе [13] исследовано осаждение дисперсной фазы газозвеси в аэродинамическом и электрическом поле.

В статье [14] с помощью уравнения Фоккера — Планка получены распределения концентрации частиц в плазме.

В данной работе сопоставлены математические модели диффузии на основе обыкновенного одномерного нестационарного уравнения диффузии и на основе одномерного нестационарного уравнения диффузии с конвективным слагаемым. Также предложена математическая модель, предполагающая дискретность процесса осаждения дисперсных частиц.

Математическая модель. Схематичное изображение гравитационного осаждения аэрозоля в емкости представлено на рис. 1.

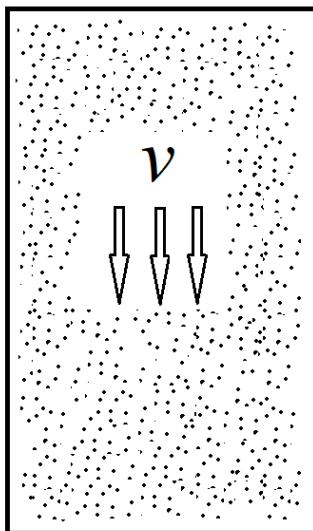


Рис. 1. Схематичное изображение емкости с осаждающимся аэрозолем

Для описания процесса изменения концентрации частиц применяют уравнение одномерной диффузии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где c — концентрация; a — коэффициент диффузии; t , x — соответственно временная и пространственная переменная.

Уравнение (1) имеет частное решение, которое описывает постепенное уменьшение концентрации дисперсных частиц, определяемое коэффициентом диффузии a [15]:

$$c(x, t) = c_0 e^{-ak^2 t} \cos kx,$$

где c_0 — начальная концентрация; k — некоторое вещественное число.

Одномерное уравнение конвективной диффузии имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x}, \tag{2}$$

где v — скорость конвективного движения.

С помощью подстановки в уравнение (2) описанной в монографии [15] функции

$$c^*(x, t) = e^{2avx} e^{tv^2/4a} c(x, t) \tag{3}$$

уравнение (2) приводится к уравнению (1), имеющему решение с учетом (3) в виде выражения

$$c(x, t) = c_0 e^{-2avx} e^{-tv^2/4a} e^{-ak^2 t} \cos kx.$$

Здесь k определяется из условия, что $c(x, 0) \approx c_0$.

В данной работе предполагается, что скорость конвективного движения — это скорость гравитационного осаждения дисперсных включений. Таким образом, величина v определяется выражением [4, 11]:

$$v = \frac{gd^2(\rho - \rho_{10})}{18\mu}.$$

Здесь d — диаметр частицы; g — ускорение свободного падения; ρ — плотность газа; ρ_{10} — плотность материала частицы; μ — динамическая вязкость газа.

Коэффициент диффузии сферической частицы согласно работам [5, 16] имеет вид

$$a = \frac{Tk_B}{3\pi\mu d},$$

где T — температура среды; k_B — постоянная Больцмана.

Общее количество частиц монодисперсной газозвеси N_p для емкости объема V и объемного содержания дисперсной фазы α можно определить выражением

$$N_p = \frac{6\alpha V}{\pi d^3};$$

время осаждения дисперсных частиц t_s определяется скоростью их осаждения v и высотой емкости L согласно формуле

$$t_s = \frac{L}{v}. \quad (4)$$

Можно предположить, что в поперечном сечении в емкости дисперсные частицы распределены равномерно. Таким образом, в емкости с аэрозолем образуется некоторое количество слоев толщиной в диаметр одной частицы, расстояние между слоями также можно принять равным одному диаметру частиц (рис. 2). Количество слоев n определяется формулой

$$n = \frac{L}{2d}. \quad (5)$$

С учетом (5) количество частиц в каждом слое N_s

$$N_s = \frac{N_p}{n}.$$

Выражение (4) описывает полное время осаждения, тогда как в дискретной модели осаждения частиц предполагается, что N_s частиц осаждается за период времени t_{s0} :

$$t_{s0} = \frac{2d}{v}.$$

При описании процесса осаждения дисперсных частиц дифференциальными уравнениями количество осевших частиц определяются функцией $N(t)$ определяемой формулой

$$N(t) = N_p - \alpha V \int_0^L c(x, t) dx.$$

Для моделей (1) и (3) скорости осаждения частиц имеют вид соответственно

$$N(t) = N_p - \frac{6\alpha V e^{-ak^2 t} \sin k}{\pi d^3 k};$$

$$N(t) = N_p - \frac{6\alpha V}{\pi d^3} \left[\left(\frac{e^{-ak^2}}{a^2 k^4 + k^2} \right) (-ak^2 \cos k + k \sin k) + \left(\frac{ak^2}{a^2 k^4 + k^2} \right) \right] e^{-t(v^2/4a + ak^2)}.$$

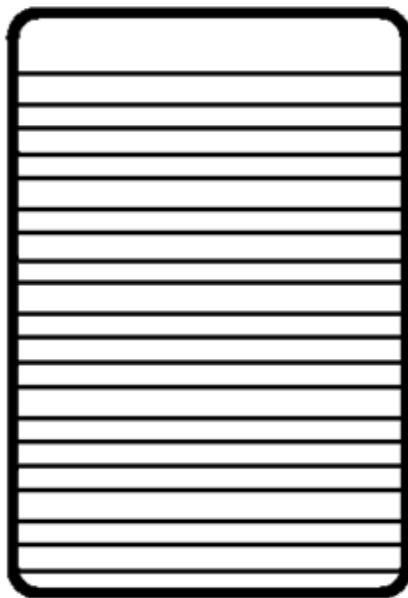


Рис. 2. Схематическое изображение слоев аэрозоля

В расчетах были заданы следующие параметры несущей среды и дисперсной фазы — Физическая плотность дисперсной фазы $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$, диаметр частиц $d = 5 \text{ мкм}$, объемное содержание дисперсной фазы $\alpha = 10^{-5}$. Длина области течения $L = 1 \text{ м}$, динамическая вязкость газа $\mu = 1,72 \times 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$, плотность несущей среды $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$.

В начальный момент времени концентрации частиц, рассчитываемые по математическим моделям, основанным на дифференциальных уравнениях (1) и (2), различаются несущественно (рис. 3, а, б). Но в последующие моменты времени распределения концентраций, рассчитываемые по математическим моделям (1) и (2), существенно отличаются друг от друга и от результатов, получаемых по дискретной модели (рис. 3, а-в). На графиках видно, что при описании процесса диффузии дифференциальными уравнениями максимальное значение концентрации частиц достигается вблизи нижней границы емкости.

Количество осевших частиц N за все время осаждения при расчете по уравнению (1) и уравнению (2) составляет соответственно 90 и 9 % количества осевших частиц, полученных на дискретной модели (рис. 4, а). Полное осаждение, описываемое однородным уравнением диффузии, происходит за существенно более долгий период времени (рис. 4, б).

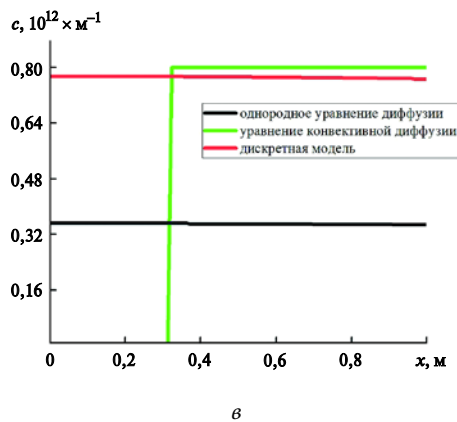
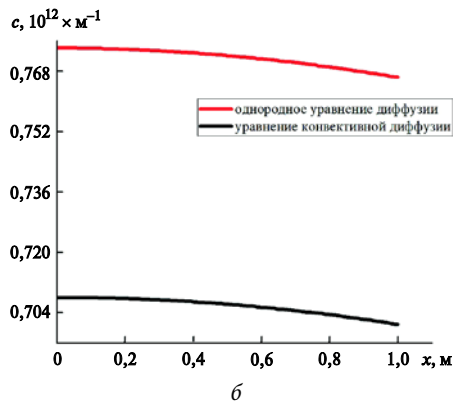
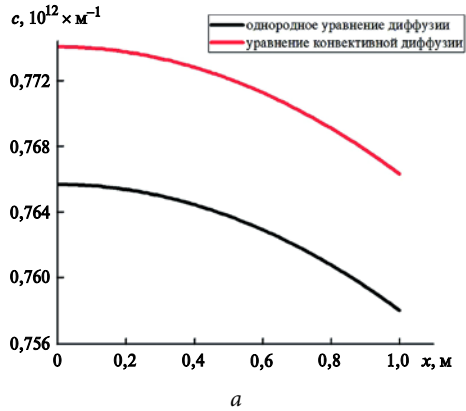


Рис. 3. Пространственные распределения концентрации частиц дисперсной фазы при расчете по различным моделям в моменты времени:
 $a - t = 0,02t_s$; $b - t = 0,05t_s$; $v - t = 0,33t_s$

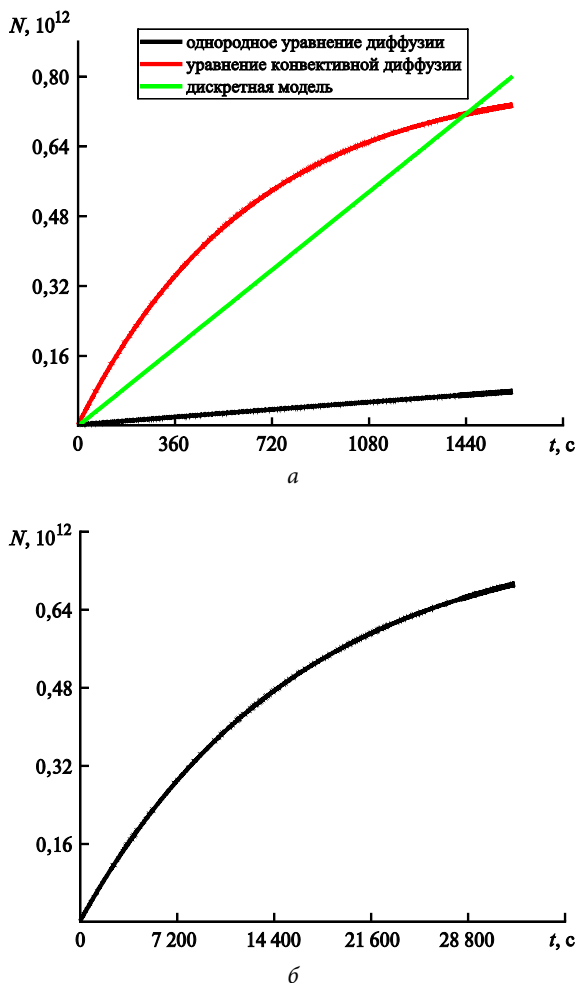


Рис. 4. Временные зависимости количества частиц для различных моделей расчета (а) и однородного уравнения диффузии (б)

Заключение. В работе выполнено моделирование процессов гравитационного осаждения аэрозоля. Получены математические модели, описывающие осаждение частиц с учетом и без учета конвективного слагаемого. Построена дискретная математическая модель осаждения частиц аэрозоля. Установлено, что наиболее интенсивно осаждение частиц происходит при расчетах по дискретной математической модели.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 23-21-00363 «Моделирование процесса осаждения капель двухфазной газожидкостной среды».

Литература

- [1] Нигматулин Р.И. *Основы механики гетерогенных сред*. Москва, Наука, 1978, 336 с.
- [2] Кутушев А.Г. *Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах*. Санкт-Петербург, Недра, 2003, 284 с.
- [3] Федоров А.В., Фомин В.М., Хмель Т.А. *Волновые процессы в газозвесах частиц металлов*. Новосибирск, Параллель, 2015, 301 с.
- [4] Ходаков Г.С., Юдкин Ю.П. *Седиментационный анализ высокодисперсных систем*. Москва, Химия, 1981, 192 с.
- [5] Леушина А.П., Данилов Д.Н. *Молекулярно-кинетические свойства дисперсных систем. Седиментационный анализ*. Киров, ВятГУ, 2008, 54 с.
- [6] Тукмаков Д.А. Трехмерная нестационарная математическая модель загрязнения канала осаждающейся дисперсной примесью. *Экологические системы и приборы*, 2022, № 11, с. 26–35.
- [7] Тукмаков Д.А. Исследование загрязнения водотока взвесью с помощью стационарной двухмерной математической модели. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная экология. Урбанистика*, 2022, т. 45, № 1, с. 88–98.
- [8] Тукмаков Д.А. Численная модель течения аэрозоля, обусловленного взаимодействием частиц и газа. *Сложные системы*, 2021, № 1, с. 64–71.
- [9] Тукмаков Д.А. Аналитическая модель одномерной нестационарной динамики одиночной частицы в акустическом и электрическом полях. *Лесной вестник / Forestry Bulletin*, 2022, т. 26, № 5, с. 135–144.
- [10] Тукмаков Д.А. Сопоставление численных моделей динамики электрически заряженных газозвесей с массовой и поверхностной плотностями зарядов для различных дисперсностей частиц. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 3 (102), с. 43–56.
- [11] Студенов И.И., Шилова Н.А. Расчет гидравлической крупности взвеси при моделировании динамики концентрации взвешенных веществ в приустьевых районах арктических морей на примере Белого моря. *Научные исследования в Арктике*, 2015, № 3, с. 40–47.
- [12] Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А., Шайдуллин Л.Р. Осаждение дыма при нелинейных колебаниях в открытой трубе вблизи резонанса. *Теплофизика высоких температур*, 2019, т. 57, № 5, с. 793–796.
- [13] Тукмаков А.Л. Модель движения и осаждения заряженной газозвеси в электрическом поле. *Инженерно-физический журнал*, 2014, т. 87, № 1, с. 35–44.
- [14] Савельев Т.А., Саврицкий А.Н., Назарян А.М. Нахождение функции распределения частиц на основе уравнения Фоккера — Планка для лазерной

плазмы. *Политехнический молодежный журнал*, 2023, т. 87, № 10, с. 1–12.
<http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2023-10-944>

- [15] Полянин А.Д. *Справочник по линейным уравнениям математической физики*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2001, 576 с.
- [16] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.Ф. *Теоретическая физика. Гидродинамика*. Москва, Наука, 1986, 736 с.

Поступила в редакцию 07.05.2024

Тукмаков Дмитрий Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник ФИЦ Казанского научного центра Российской академии наук, Казань, Республика Татарстан, Россия.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тукмаков Д.А. Сопоставление математических моделей гравитационного осаждения монодисперсного аэрозоля на основе одномерных нестационарных уравнений диффузии и дискретной модели. *Политехнический молодежный журнал*, 2024, № 04 (93). URL: <https://ptsj.bmstu.ru/catalog/phys/mathphy/991.html>

COMPARING MATHEMATICAL MODELS OF THE MONODISPERSE AEROSOL GRAVITATIONAL SEDIMENTATION BASED ON THE ONE-DIMENSIONAL NONSTATIONARY DIFFUSION EQUATIONS AND A DISCRETE MODEL

D.A. Tukmakov

tukmakovda@imm.knc.ru
SPIN code: 3556-8576

Institute of Mechanics and Engineering — Subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences” (IME — Subdivision of FIC Kazan SC of RAS), Kazan, Republic of Tatarstan, Russia

The paper presents results of simulating the processes in gravitational sedimentation of an aerosol consisting of particles of the same size. The study relevance is due to the need of using sedimentation of the dispersed phase of the gas-dispersed media in various practical applications. Diffusion mathematical models are constructed describing the particles' sedimentation based on the one-dimensional non-stationary diffusion equations with and without taking into account the convective term. The work novelty lies in the fact that it compares mathematical models based on the partial differential equations and the discrete mathematical model. Without taking into account the convective term, gravitational sedimentation also occurs, but over a significantly longer period of time than when taking into account the convective term. A discrete mathematical model of the aerosol particle sedimentation is also obtained. Comparison demonstrates that the most intense sedimentation of the dispersed particles occurs according to the discrete sedimentation model.

Keywords: aerosol, dispersion, gravitational sedimentation, sedimentation, diffusion equation, mathematical simulation

Received 07.05.2024

Tukmakov D.A. — Ph. D. (Phys. & Math.), Researcher, Institute of Mechanics and Engineering — Subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences” (IME – Subdivision of FIC Kazan SC of RAS), Kazan, Republic of Tatarstan, Russia.

Please cite this article in English as:

Tukmakov D.A. Comparing mathematical models of the monodisperse aerosol gravitational sedimentation based on the one-dimensional nonstationary diffusion equations and a discrete model. *Politekhnicheskii molodezhnyy zhurnal*, 2024, no. 04 (93). (In Russ.). URL: <https://ptsj.bmstu.ru/catalog/phys/mathphy/991.html>